This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

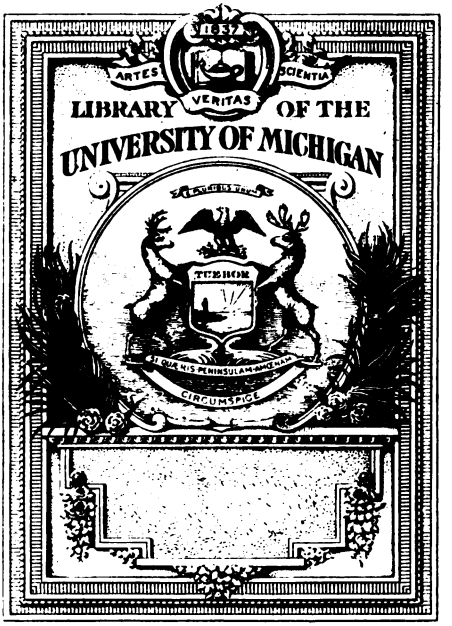
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

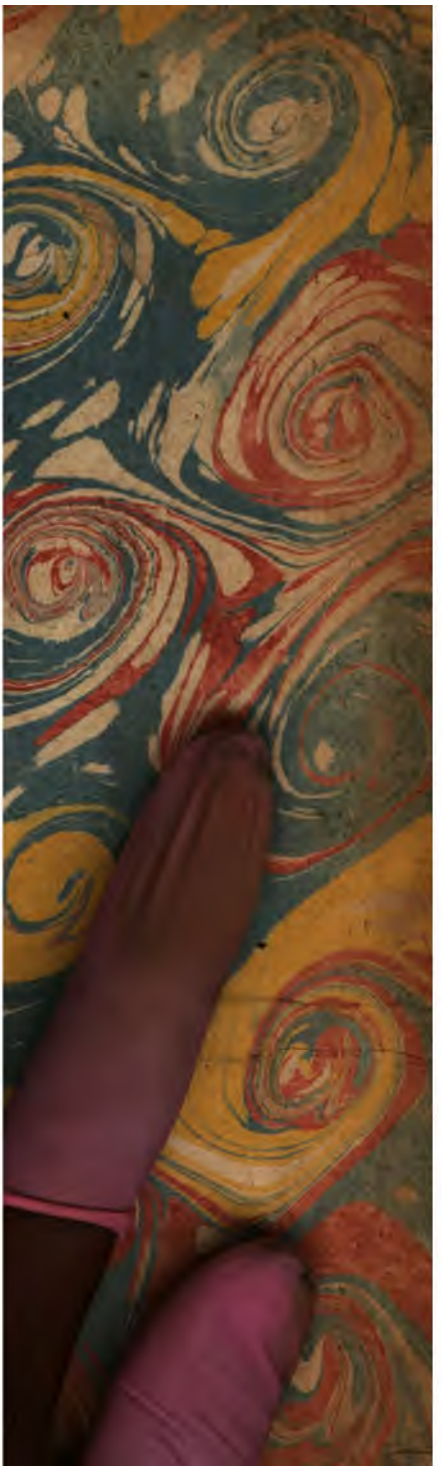
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

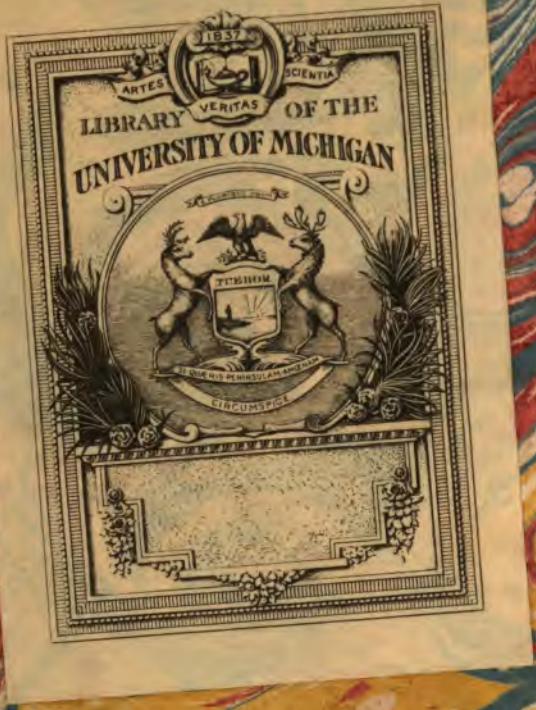
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

A 546931


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



A 546931


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TURRIM
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

François Peroggio

QA
35
.S26

# COURS
## DE
# MATHÉMATIQUES.

## TOME I.

*Hæc qui ſpernit, id eſt, has ſemitas ſapientiæ, ei denuncio non rectè philoſophandum.* BOETIUS. ARIT. Lib. I. Cap. I.

# COURS COMPLET

## DE

# MATHÉMATIQUES,

PAR M. L'ABBÉ SAURI,

*ANCIEN PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE EN L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER.*

## TOME PREMIER.

*A PARIS,*

Aux Dépens de RUAULT, Libraire, rue de la Harpe, près de la rue Serpente.

MDCCLXXIV.

*Avec Approbation, & Privilege du Roi.*

Hist of Sci
Lafitte
2-10-28
16267
5 vols.

# A MONSEIGNEUR

# LE COMTE DE NOAILLES,

*Duc de Mouchy, Grand d'Eſpagne de la premiere claſſe, Lieutenant-Général des Armées du Roi, Chevalier de ſes Ordres, de la Toiſon d'or & Grand-Croix de l'Ordre de Malthe, Gouverneur des Villes & Châteaux de Verſailles & de Marly, Lieutenant-Général de la Province de Guyenne, &c. &c. &c.*

MONSEIGNEUR,

*L'OUVRAGE que j'ai l'honneur de vous préſenter a un rapport eſſentiel avec cette ſcience ſublime qui apprend à conduire les armées & à repouſſer les ennemis de l'Etat. Si la Tactique a, pour ainſi dire, changé de face depuis environ un ſiecle, ſi elle a fait de nos jours des progrès étonnans, c'eſt aux Mathématiques dont le goût eſt ſi généralement répandu,*

*que nous devons cette révolution. Un Ouvrage qui renferme les découvertes les plus intéreſſantes des Géomètres anciens & modernes, n'avoit-il pas droit, MONSEIGNEUR, de paroître ſous vos heureux auſpices? Héritier des vertus & des talens militaires des Héros de votre illuſtre famille, vous avez prouvé à Ettinghen, & dans toutes les occaſions, que vous étiez digne d'une ſi noble origine. Pendant la paix, au milieu de l'éclat que donnent la naiſſance & les dignités, au milieu du tumulte de la Cour, vous penſez, vous vivez en ſage, protégeant les Arts & cultivant les Sciences. Mais, MONSEIGNEUR, je dois me ſouvenir que vous aimez à mériter des éloges, non à les entendre, & qu'on s'expoſe à vous déplaire, quand on entreprend de vous louer. Auſſi ne me ſuis-je propoſé, en vous faiſant l'hommage public de mon Livre, que de vous donner une foible marque de la vive reconnoiſſance dont je ſuis pénétré pour les bontés dont vous daignez m'honorer.*

*Je ſuis avec un profond reſpect,*

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéiſſant
Serviteur
*SAURI.*

# DISCOURS
## *PRÉLIMINAIRE.*

QUOIQUE les Grecs aient enrichi la Géométrie de très-belles découvertes, & qu'ils aient beaucoup travaillé ſur quelques Courbes, principalement ſur les Sections Coniques, je ne puis me perſuader que leurs Géometres aient fait uſage de ce genre d'Analyſe que nous appellons *Algebre*. En effet, avec quelque ſoin qu'on parcourre les Écrits des anciens Grecs, & ſur-tout ceux de Pappus qui a fait la collection de leurs admirables découvertes, on n'y trouve aucun veſtige de notre Analyſe.

Le ſeul Diophante a fait un Ouvrage d'Algebre en Langue Grecque, mais quoiqu'on ignore le temps auquel il a vêcu, tout le monde convient néanmoins qu'il a écrit après la naiſſance de Jéſus-Chriſt. On prétend qu'il avoit compoſé treize Livres ſur l'Analyſe algébrique. Guillaume Xilandre a donné une traduction Latine des ſix premiers, imprimée à Baſle en 1576 ; les

autres paroiſſent perdus. Bacchet de Mazierac en donna une édition Grecque-Latine en 1621. Enfin le célebre Fermat en fit paroître une autre en 1670, accompagnée de pluſieurs Notes très-intéreſſantes.

Diophante ne traite nullement de ce genre de Problêmes, que nous appellons *déterminés*, il parle ſeulement de cette eſpece de Problêmes ſémi-déterminés qui regardent les quarrés ou les cubes des nombres, pour la ſolution deſquels il faut éviter les quantités radicales, ce qui demande ſouvent beaucoup d'induſtrie.

Avant qu'on connût en Europe les Ouvrages de Diophante, l'Algebre des Arabes étoit déja aſſez répandue. F. Lucas Paccioli fit imprimer le premier un Livre ſur l'Algebre, qui a pour titre : *Summa Arithmeticæ & Geometriæ, proportionumque & proportionalitatum.* Si nous en croyons Wallis, l'édition en parut à Veniſe en 1494. L'Auteur de cet Ouvrage avoue qu'il a pris beaucoup de choſes de pluſieurs Savans qu'il nomme, tels que Léonard de Piſe, Jordan, &c.

F. Lucas parle fort au long de l'Arithmétique & de l'Algebre ; mais il ne va pas au-delà des Équations du ſecond degré. C'eſt là

auſſi que les Arabes s'étoient arrêtés. De ſorte que F. Lucas & les autres Analyſtes Européens qui l'ont précédé n'ont fait autre choſe que ſimplifier ce que les Arabes leur avoient tranſmis. Cardan, s'appuyant ſur le témoignage de Léonard de Piſe, aſſure que nous devons l'invention de l'Algebre à Mahomet, fils de Moſis. A celui-là l'on peut joindre un autre Mahomet de Bagdad, Geber, & d'autres dont les noms ſont à peine connus; & il eſt douteux s'ils ſe ſont occupés de l'Algebre, ou ſeulement de l'étude de l'Aſtronomie.

Les Auteurs qui ont écrit avant Cardan, tels que Michel Stifeli; bien plus, pluſieurs de ceux qui ont travaillé depuis Cardan, comme Pierre Nonnius, Profeſſeur de Conimbre, n'ont rien ajouté à cette Science.

En 1545 parut *le grand Art* de Jérôme Cardan de Milan, Ouvrage dans lequel, outre la réſolution des Équations Quadratiques, on trouve encore celle des Équations Cubiques. Ce Géometre avoue ingénument que la méthode de réſoudre les Équations du troiſiéme degré appartient à Scipion Ferreo de Boulogne. Celui-ci cacha pendant longtemps ſa découverte, ne l'ayant communi-

quée qu'au ſeul Antoine Florido, Vénitien ; ſon Auditeur. Ce dernier ayant propoſé dans un combat littéraire, à Nicolas Tartalea quelques Problêmes qui ſuppoſoient la réſolution des Équations du troiſieme degré, ſon adverſaire travailla avec tant de ſuccès qu'il trouva enfin la ſolution deſirée. Tartalea découvrit la regle à Cardan, mais ne lui communiqua point la démonſtration. Celui-ci à force de méditations & de travaux trouva & perfectionna cette démonſtration ; & comme il fut le premier qui la rendit publique, on a appellé *formule de Cardan* celle dans laquelle ſe réſout une Équation du troiſiéme degré.

Dans le même Ouvrage de Cardan on trouve une autre découverte plus admirable encore, je veux parler de la réſolution des Équations du quatriéme degré, que nous devons, au témoignage même de ce Géometre, à Louis de Ferrariis, ſon Auditeur. Raphaël Bombelli la publia dans ſon Algebre en 1574. Depuis ce temps-là on a fait très-peu de découvertes relativement à la réſolution des Équations, & il nous manque encore & il nous manquera ſans doute encore long-temps une méthode générale pour réſoudre celles qui paſſent le quatriéme degré ;

cependant Vincent Ricati a trouvé la maniere de réſoudre les Équations de tous les degrés lorſqu'elles ont certaines conditions qui les rendent ſuſceptibles d'une formule ſemblable à celle de Cardan.

Dans ce temps-là les Algébriſtes ne faiſoient uſage des lettres alphabétiques ou des autres ſignes, que pour indiquer les quantités inconnues, employant les nombres pour déſigner les quantités connues. Cet uſage rendoit les ſolutions moins univerſelles, & lorſque les données étoient changées dans un Problême de la même eſpece, on étoit obligé de recommencer le calcul.

Le célebre Viete, François, un peu avant 1600 introduiſit l'uſage de donner des noms aux quantités connues & inconnues par le moyen des ſymboles algébriques; il appella cela l'*Arithmétique Spécieuſe*. On ne ſauroit douter que cette méthode n'ait fait changer de face à l'Algebre & rendu les ſolutions des Problêmes plus faciles, plus ſimples & plus univerſelles.

Après Viete, Guillaume Oughtred, Anglois, publia un Livre intitulé *Clavis Mathematica*, en 1631. La même année parut l'Algebre de Thomas Hariot auſſi Anglois,

ouvrage posthume, dont l'Auteur étoit mort en 1621. En 1637 le grand Descartes donna sa savante Géométrie, qu'on doit plutôt regarder comme un Traité d'Algebre. Ces Auteurs firent connoître la formation des Équations composées, & diviserent les Racines en négatives & positives, en rationnelles & radicales, en réelles & imaginaires. On a ensuite découvert plusieurs autres vérités & plusieurs usages qui ont enrichi l'Algebre.

On ne doit pas passer sous silence l'Ouvrage posthume d'un certain Marin Getald de Raguse, qui a pour titre : *de Compositione, & Resolutione Mathematicâ*, imprimé à Rome en 1630. On y trouve une méthode très-claire pour construire géométriquement, & pour déterminer les Racines réelles des Équations du premier & du second degré, après qu'elles ont été résolues.

Mais le célebre Descartes a rendu le plus grand service aux Mathématiques en appliquant l'Analyse aux Courbes : car il a démontré leurs propriétés & construit par leur moyen les Équations supérieures au second degré. Plusieurs Géometres travaillant après ses idées ont répandu une nouvelle lumiere sur ces matieres, parmi lesquels on doit

compter le célebre Rabuel, qui nous a donné un Commentaire très-ſavant ſur la Géométrie de Deſcartes.

Il ſeroit trop long de faire mention ici de tous les Analyſtes qui ont écrit après Deſcartes; je me contenterai de parler de ce qui me paroîtra le plus digne d'attention. Premiérement, quoiqu'une Équation ait des Racines réelles, il eſt ſouvent très-pénible de les trouver. Les Analyſtes ont donné pluſieurs méthodes pour y parvenir; mais le ſavant Clairaut paroît avoir épuiſé la matiere. Bien plus, il a enſeigné la maniere de trouver les Facteurs Rationels du ſecond degré qui peuvent diviſer une Formule donnée.

Le ſubtil Taylor ayant propoſé un certain Problême à tous les Mathématiciens non Anglois, Jean Bernoulli, Jacob Herman, Gabriel Manfredi & Julien de Fagnan découvrirent la méthode de réſoudre pluſieurs Binomes & Trinomes en Facteurs réels du ſecond degré. Les Ouvrages poſthumes de M. Cotes prouvent aſſez que cette méthode ne lui étoit pas inconnue: puiſqu'on y trouve un Théorême très-élégant ſur la diviſion de la circonférence d'un Cercle en parties égales, qui eſt le fondement de

cette invention. Il ne ſera pas inutile de lire ce que le célebre Euler a écrit ſur cette matiere dans ſon Introduction à l'Analyſe des infiniment-petits. Le célebre M. d'Alembert a démontré que toutes les quantités imaginaires de quelle forme qu'elles ſoient, peuvent toujours ſe réduire à la forme $A + B \cdot \sqrt{(-1)}$, A & B, étant des quantités réelles.

Euler a ajouté à l'Analyſe le nouveau Calcul des Sinus & des Co-ſinus, qui eſt de la plus grande utilité. Vincent Ricati ne s'eſt pas contenté d'augmenter ce Calcul, il a inventé celui des ſinus & des co-ſinus hyperboliques, qui ont une très-grande analogie avec les circulaires.

Pluſieurs Savans ont fait uſage des Séries; ceux ſur-tout qui ont traité de probabilités dans les haſards, comme Montmort, Jacques Bernoulli & Moivre; mais Vincent Ricati a parlé fort au long de cette matiere dans un Ouvrage intitulé : *de Seriebus recipientibus ſummam algebraicam, aut exponentialem Commentarius.*

L'uſage de l'Algebre dans la Géométrie a été perfectionné & augmenté depuis Deſcartes. Newton nous a donné l'énumération des

lignes du troiſiéme ordre, mais ſans démonſtration & ſans parler des regles qu'il avoit ſuivies ; de ſorte qu'on l'a accuſé d'avoir écrit plutôt pour ſe faire admirer que pour inſtruire. Cependant on s'eſt apperçu que ſa méthode étoit fondée ſur le parallélogramme analytique que le ſavant de Gua a changé en triangle. Le célebre Stirling non-ſeulement a développé les principes de Newton, il a même corrigé avec ſoin les erreurs qui étoient échappées à ce grand homme. Après lui M. Nicole nous a donné dans les Mémoires de l'Académie des Sciences l'énumération des Lignes du troiſiéme ordre, en développant tous les principes que Newton avoit pu ſuivre. M. de Bragelogne a auſſi entrepris l'énumération des lignes du quatriéme ordre ; mais ſon travail eſt imparfait. Il a parlé fort au long des points multiples, mais il n'a preſque rien dit des branches infinies. Le célebre de Gua a développé dans un ſavant Ouvrage les uſages de l'Analyſe Carthéſienne pour la recherche des propriétés des Lignes géométriques d'un ordre quelconque. Ce Mathématicien auroit, pour ainſi dire, épuiſé cette théorie, s'il n'étoit tombé dans une eſpece de paralogiſme, en voulant juger des Séries par leur ſeul premier terme. Cette recherche a été enfin finie par Cramer

dans ſon Livre intitulé : *Introduction à l'Analyſe des Lignes courbes algébriques.* Cet Ouvrage in-4°. de 680 pages a été imprimé à Genêve en 1750. L'Auteur y fait uſage du Triangle algébrique, ce qui rend ſes opérations longues & pénibles ; il ne parle d'ailleurs ni des courbes qu'on appelle *tranſcendantes*, ni des courbes à *double courbure.*

Peu de temps auparavant avoit paru *l'Introduction à l'Analyſe des infiniment-petits* de M. Euler, Ouvrage latin, en deux volumes in-4°. Cet Auteur traite, comme Cramer, des branches infinies des courbes & de leurs genres, des points de contact, des rayons oſculateurs, des points ſinguliers, des points conjugués ou ſolitaires, des points multiples, &c. Ces Savans ſont d'accord dans les conſéquences, quoique leurs méthodes ſoient différentes : mais celle d'Euler eſt plus facile à entendre & à retenir.

Outre les Ouvrages dont nous venons de parler, il y en a pluſieurs autres dont nous croyons devoir faire mention, telle eſt l'Algebre de Jean Wallis, Anglois, qu'on trouve dans le ſecond Tome de ſes Ouvrages ; le Chevalier Newton dans ſon Arithmétique univerſelle, Ouvrage très-

digne d'un ſi grand Géométre ; le Marquis de Lhôpital, qui dans ſon Traité des Sections Coniques parle des équations ſupérieures au ſecond degré ; le célebre Boſcovich, Clairaut, dont l'Algebre a fait tant de bruit ; Mac-laurin, Saunderſon, Emerſon ; l'Algebre de M. Bezout, celle de M. l'Abbé Marie, celle de M. l'Abbé Boſſut qui a paru en 1773 ; la traduction françoiſe de celle de M. Euler, en deux vol. in-8°. qui a paru la même année. Nous avons renfermé dans notre Ouvrage les découvertes & les méthodes les plus dignes d'attention qu'on trouve dans les Livres dont nous venons de parler, & nous avons tâché de les mettre à la portée des eſprits médiocres.

Le Pere Reineau de l'Oratoire nous a donné en 1708 un Cours complet intitulé l'*Analyſe demontrée*. Il faut convenir que cet Ouvrage a formé pluſieurs Mathématiciens ; mais parce que dans ce temps-là les découvertes des grands hommes, ſur-tout dans le calcul intégral, étoient très-fréquentes, cet Ouvrage eſt aujourd'hui très-imparfait. Je ne dois pas paſſer ſous ſilence le Cours de M. Wolf ; mais cet Auteur n'a donné que les premiers élémens de l'Algebre. La célebre Marie Agneſi a publié en 1748 de ſavantes Inſtitutions analytiques en deux vo-

lumes in-4°. Cet Ouvrage Italien, qui a été reçu avec applaudiſſement, a eu le plus grand ſuccès, & il n'eſt plus poſſible aujourd'hui de ſe le procurer à quelque prix que ce ſoit. Enfin Vincent Ricati & Jérôme Saladini ont compoſé de concert des Inſtitutions analytiques en deux volumes in-fol. Dans le premier Tome, en 390 pages, on trouve l'Algebre & ſon application à la Géométrie avec le Calcul des ſinus & des co-ſinus, & un Traité de lignes courbes algébriques; mais il n'y eſt pas queſtion de courbes tranſcendantes, ni à double courbure. Le ſecond Tome, en 769 pages, traite du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral, j'en rendrai compte dans le Diſcours Préliminaire qui précédra la ſeconde Partie de ce Cours de Mathématiques : mais cet Ouvrage latin eſt peu connu en France.

Il nous reſte maintenant à donner une idée tant de la méthode que nous avons ſuivie, que des matieres que nous avons traitées. Nous avons diviſé notre Ouvrage en deux parties; la premiere, dont nous allons rendre compte, renferme le Calcul, la Géométrie, les Courbes algébriques, les Courbes tranſcendantes & à double courbure. Dans le premier Volume je traite d'abord

d'abord des regles ordinaires de l'Arithmétique, des Fractions ordinaires & décimales, de l'évaluation des fractions, de la multiplication & diviſion des Nombres complexes. Je paſſe tout de ſuite à l'Algebre, dont j'ai développé les regles le plus clairement qu'il m'a été poſſible; je n'ai pas oublié de donner la méthode de trouver le plus grand commun diviſeur de deux quantités, méthode utile dans la réſolution des équations; je viens enſuite à la formation des puiſſances des Monomes & Polynomes, à l'extraction des Racines, au calcul des Radicaux & des Expoſans, & je démontre la fameuſe Formule du Binome de Newton : ſuivent les raiſons & les proportions. Je parle bientôt après des progreſſions arithmétiques & géométriques; je développe enſuite la la théorie des Logarithmes & leurs uſages *. Je viens après cela aux Equations; je donne d'abord quelques principes, mais j'en fais tout de ſuite l'application à pluſieurs queſtions très-intéreſſantes. Après avoir parlé des Problêmes déterminés, je paſſe à ceux que les Géometres appellent *indéterminés*, *ſémi-*

* L'invention en eſt due au célebre Neper, Ecoſſois, & on la regarde, avec raiſon, comme une des plus belles découvertes, dont les Mathématiques aient été enrichies dans ces derniers ſiecles.

*déterminés* & *plus que déterminés*. Je réſous douze Problêmes ſémi-déterminés du premier degré, & cinquante-deux des degrés ſupérieurs : car ce n'eſt que par le grand nombre d'exemples qu'on peut ſe flatter de former les jeunes Géometres ; mais j'ai eu l'attention de rendre les ſolutions faciles, & de choiſir des queſtions capables de piquer la curioſité des Commençans.

De-là paſſant aux Equations du ſecond degré à pluſieurs inconnues, je donne la méthode de réſoudre ces ſortes d'équations, & j'en fais l'application à pluſieurs Problêmes intéreſſans. Je n'oublie pas de parler des Equations à deux termes, de celles qui, quoique plus élevées que le ſecond degré, peuvent néanmoins ſe réſoudre par la méthode du ſecond ; & à cette occaſion je donne une formule générale, pour avoir la racine $m$ d'une quantité de cette forme $a^m + b$, $b$ étant une quantité fort petite en comparaiſon de $a^m$.

Je paſſe tout de ſuite aux équations de tous les degrés, dont je développe la formation ; j'apprends à délivrer une équation des radicaux, de ſon ſecond terme, des fractions qu'elle peut contenir, du coefficient de ſon premier terme ; à changer les

racines positives en négatives, & réciproquement; à changer les racines d'une équation sans les connoître, soit en les augmentant ou en les diminuant d'une quantité donnée, ou en faisant qu'elles soient à ce qu'elles étoient dans un rapport donné; à trouver les limites des racines d'une équation; à trouver les racines commensurables & les diviseurs rationels tant du premier que du second degré. Je traite après cela de la résolution des équations par le moyen des diviseurs d'un ordre quelconque. J'apprends ensuite à trouver les racines approchées, lorsqu'on ne peut pas en avoir d'exactes; à trouver les racines égales d'une équation quand il y en a. Je donne la méthode de trouver les racines de tous les degrés d'une quantité de cette forme $A + \sqrt{B}$, ce qu'on ne savoit faire dans tous les cas que pour quelques degrés. Les Equations du troisiéme & du quatriéme degré sont trop célébres pour les passer sous silence; c'est pourquoi j'en ai parlé assez au long. J'ai cru même faire plaisir à mes Lecteurs en leur expliquant une méthode très-élégante de résoudre les équations du quatriéme degré, que nous devons au savant Euler.

Quoi qu'il n'y ait aucune méthode, du moins pratiquable, pour résoudre les équa-

tions ſupérieures dans tous les cas, cependant lorſqu'une des racines peut s'exprimer par une formule ſemblable à celle de Cardan, on peut trouver cette racine, ainſi que je l'ai fait voir par pluſieurs exemples; j'ai donc cru devoir donner la méthode générale pour connoître les Equations qui ſe trouvent dans ce cas. Je parle enſuite de l'Infini, des Séries ou Suites des Nombres figurés & Polygones; de la méthode de trouver le terme général & le terme ſommatoire des ſuites, ſoit algébriques, ſoit récurrentes, ſoit algébrico-géométriques. Outre les Séries récurrentes ordinaires & qu'on peut appeller *Séries récurrentes ſimples*, j'ai encore parlé d'une autre eſpece de Séries récurrentes que j'appelle *compoſées*: elles ſe forment d'un certain nombre de termes antécédens, multipliés par des quantités conſtantes, en ajoutant à leur ſomme une même quantité poſitive ou négative.

Parce que les Séries récurrentes peuvent être d'un grand ſecours dans la recherche des racines des équations, j'ai cru devoir développer les principes ſur leſquels cette méthode eſt fondée, en faiſant voir par pluſieurs exemples la maniere dont on doit s'en ſervir : enfin je termine mon Traité d'Algebre par la théorie des Fractions continues,

dont on peut faire uſage dans la réſolution de pluſieurs Problêmes. M. de la Grange en a traité fort au long dans les Additions qu'on trouve à la fin de l'Edition françoiſe des Elémens d'Algebre de M. Euler. Mais la théorie de ce grand Géometre paroît trop ſavante pour être miſe à la ſuite d'un Ouvrage auſſi élémentaire que celui de M. Euler ; ce n'eſt pas que nous ſoyons de l'avis de ceux qui aſſurent (voyez l'Avertiſſement des Editeurs de l'original) qu'un jeune homme qui avoit appris le Métier de Tailleur, & qui ne pouvoit être mis, quant à ſa capacité, qu'au rang des eſprits ordinaires, avoit non-ſeulement très-bien ſaiſi tout ce que ſon Maître lui enſeignoit & lui dictoit, mais qu'il s'étoit encore trouvé en peu de tems en état d'achever tout ſeul les Calculs algébriques les plus difficiles, & de réſoudre promptement toutes les queſtions analytiques qu'on lui propoſoit. Ce ſont-là de pures fables qu'on voudra bien nous diſpenſer de croire. Nous ne révoquons pas cependant le fait en doute : nous prétendons ſeulement que le jeune homme en queſtion avoit des diſpoſitions plus que communes ; parce que, quoique l'Ouvrage de M. Euler ſoit écrit avec beaucoup de méthode & de netteté, un eſprit ordinaire ne peut ſe flatter de l'apprendre qu'avec beaucoup de peine &

de travail *. Au reſte nous avons parcouru cette Algebre avec beaucoup d'attention, & quoiqu'elle ne ſoit pas complette, la lecture peut cependant en être très-utile aux Commençans. Mais on trouvera dans la nôtre tout ce qu'il y a d'intéreſſant dans celle du ſavant Auteur dont nous venons de parler, & ſur-tout les méthodes qui regardent l'Analyſe de Diophante, avec pluſieurs Problêmes dont ce Savant n'a point parlé.

Il ſeroit difficile de fixer l'époque de l'origine de la Géométrie; mais on ne peut douter qu'elle ne ſoit de la plus grande antiquité: dès les premiers temps on eut beſoin de meſurer les terreins, & bientôt après la curioſité porta les hommes à chercher des méthodes pour connoître la largeur d'une riviere qu'on ne pouvoit paſſer, la hauteur d'une montagne, la ſolidité d'une muraille, &c. on tâtona ſans doute long-temps, & ce ne fut qu'après bien des efforts qu'on trouva des moyens faciles de réuſſir. Euclide fut le premier, il y a environ deux mille ans, qui fit la collection des Principes Géométriques connus de ſon temps: & ſon Ouvrage con-

* Cet Ouvrage en deux volumes in-8°. a été imprimé à Lyon en 1773.

ſacré par l'eſtime générale des ſiécles éclairés, eſt un de ces monumens précieux qui ont échappé aux injures des temps.

La Géométrie, comme tout le monde le ſait, n'eſt autre choſe que la Science de l'Eſpace ou de l'Étendue en *longueur*, *largeur* & *profondeur*; c'eſt-à-dire, la Science des *Lignes*, des *Surfaces* & des *Solides*. Après avoir parlé de l'Algebre, je viens à la Géométrie; je traite d'abord des Lignes & de leurs propriétés, des Angles & de leurs meſures. Les Géometres enſeignent communément que les Angles qui ont les côtés paralleles ſont égaux: je démontre qu'ils ſont égaux, ou ſupplémens l'un de l'autre. Je parle des l'égalité & de la ſimilitude des triangles, des Lignes proportionnelles, &c. Je paſſe à la meſure & au rapport des Surfaces, aux propriétés des Plans, aux Angles ſolides, &c. Je traite enſuite des Solides, de la meſure & du rapport de leur ſurface & de leur ſolidité. Enfin venant à la Trigonométrie, je développe les méthodes connues de réſoudre les Triangles, ſoit rectangles ſoit obliquangles. J'apprends à meſurer la largeur d'une Riviere, la hauteur d'une Tour, celle d'une Montagne, la diſtance de deux Lieux inacceſſibles; à lever

une Carte Géographique ; à trouver le rapport approché du Diametre à la circonférence d'un Cercle ; &c.

Reprenant enſuite la théorie des Sinus, Co-ſinus, Tangentes, Co-tangentes, &c. j'enſeigne à trouver ſoit le Sinus, ſoit le Co-ſinus, ſoit la Tangente, ſoit la Co-tangente des Arcs multiples. J'applique cette théorie à la réſolution des Équations du troiſiéme degré dans le cas irréductible. Enfin je réſous ce Problême : couper la demi-circonférence d'un Cercle en un nombre quelconque de parties égales par des lignes tirées d'un point, ſitué ſur le diametre, mais hors du centre ; l'Équation à laquelle je parviens, renferme le beau Théorême de M. Cotes.

Après avoir parlé de la Trigonométrie plane ou rectiligne, je développe les principes de la Trigonométrie ſphérique, ſcience dont on ne peut ſe paſſer dans l'Aſtronomie, & qui eſt d'une ſi grande utilité dans la navigation. J'ai tâché de la mettre à la portée des eſprits ordinaires, en la préſentant ſous un point de vue facile à ſaiſir, & écartant toutes les inutilités dont certains Auteurs ont, pour ainſi dire, accablé cette partie de la Géométrie.

Pour traiter les choſes dans l'ordre le plus naturel qu'il ſoit poſſible, je n'ai pas fait difficulté de faire uſage de l'Algebre toutes les fois qu'il m'a paru qu'elle pouvoit ſimplifier les démonſtrations géométriques. Ceux qui ont traité la Géométrie avant l'Algebre ont été obligés non-ſeulement de rendre leur ouvrage plus long, mais encore de renvoyer à l'Algebre des queſtions qui doivent naturellement être placées dans la Géométrie, inconvénient qui ne me paroît pas petit.

Tel eſt le premier volume de notre Cours de Mathématiques. Le ſecond contient la Géométrie ſublime ou la Géométrie des Courbes. Les Courbes, comme tout le monde le ſçait, ſont de trois eſpeces, géométriques ou algébriques, tranſcendantes, & à double courbure. Parmi les Courbes algébriques, les Sections Coniques tiennent le premier rang à cauſe de leur utilité dans les Arts, l'Aſtronomie & la Méchanique : elles n'étoient pas inconnues aux anciens Géometres Grecs, qui s'en ſont beaucoup occupés. Je commence donc par développer les propriétés de ces Courbes ; je n'oublie pas de parler des Logarithmes hyperboliques ordinaires, des Logarithmes ſimples ou d'une dimenſion, des Sinus & Co-ſinus hyperboliques. Je viens aux Sections coni-

ques des genres ſupérieurs, & je fais voir que toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle, & que ſi elle en a pluſieurs elles ſont toujours en nombre impair; de ſorte que les racines imaginaires ſont toujours en nombre pair : au contraire les Equations de degré pair ont des racines réelles en nombre pair, ou n'en ont aucune. Je parle auſſi de quelques uſages des Sections Coniques, & je donne une idée de la maniere dont on emploie la Parabole & l'Ellipſe dans la conſtruction des vaiſſeaux. Je fais voir auſſi que la fuſée d'une montre doit avoir la figure d'un hyperboloïde formé par la révolution d'un hyperbole autour de ſon aſymptote.

Après les Sections Coniques, je parle des Courbes Algébriques de tous les genres; j'apprends à décrire la Courbe lorſqu'on a ſon équation; je traite enſuite de la méthode des Interpôlations, ſi utile dans l'Aſtronomie. De-là paſſant à d'autres objets, j'enſeigne à tranſporter l'Équation d'une Courbe, dont les Axes des $x$ & des $y$ forment un Angle donné, à d'autres Axes dont l'Angle ſoit différent : je démontre que les ſeules Lignes droites ſont déſignées par une Équation du premier degré à une ou pluſieurs inconnues. Je parle auſſi de quelques pro-

priétés de Lignes de tous les ordres. Je fais voir enſuite que les Lignes du ſecond ordre ſont repréſentées par des Équations du ſecond degré ; j'indique les marques auxquelles on peut reconnoître ſi une Ligne du ſecond ordre eſt Ellipſe, Parabole ou Hyperbole. Je paſſe auſſi-tôt après aux propriétés des Lignes du troiſiéme ordre, aux Branches infinies des Courbes, & à leurs Aſymptotes rectilignes ou curvilignes. Je donne la méthode de diviſer les Lignes d'un même ordre en eſpeces. Les Lignes du ſecond ordre ſont au nombre de trois ; ſçavoir, la Parabole, l'Ellipſe & l'Hyperbole ; mais les Lignes du troiſiéme ordre ont ſeize eſpeces. J'ai ſuivi la méthode de M. Euler, qui m'a paru préférable à celle du grand Newton. Je parle enſuite d'une autre méthode pour trouver les Aſymptotes des Courbes : elle eſt fondée ſur les propriétés du Quarré analytique ou algébrique, dont je développe la conſtruction & les uſages, pour trouver les valeurs d'une inconnue par une Série qui contienne l'autre inconnue qui ſe trouve dans l'équation propoſée : je traite auſſi du retour des Suites, & je donne la méthode d'exprimer un Nombre par ſon Logarithme. Je parle enſuite des diametres & du centre des Courbes, de leurs tangentes & de leur

courbure, de leur figure dans un espace fini; des Lignes courbes décrites par le moyen des instrumens; des Courbes dont on trouve l'équation par des propriétés données qui dépendent de plusieurs points de section; des Courbes semblables; des intersections des Lignes algébriques; de la construction des Problêmes & des Équations. Je résous plusieurs équations déterminées du second degré, & plusieurs Problêmes géométriques. Je traite aussi-tôt après de la construction des Équations du second degré à deux inconnues, de la résolution des Équations déterminées du troisiéme & du quatriéme degré, des Problêmes déterminés & indéterminés, des Degrés supérieurs, & je donne une méthode par laquelle on peut facilement construire une équation déterminée d'un degré quelconque : enfin je fais voir comment on peut trouver les Racines réelles d'une Équation numérique à une seule inconnue.

Les Courbes transcendantes, qu'on appelle encore *méchaniques*, devant faire partie d'un Cours complet de Mathématiques, j'ai cru devoir parler des plus fameuses, telles que la Ligne des sinus & des co-sinus, les Spirales de différens genres, la Quadratrice de Dinostrate, la Cycloïde, la Logarithmi-

que, & je n'ai pas oublié les Courbes que M. Leibnitz appelle *intercendantes.*

Outre les Lignes dont nous venons de parler, qui ſont toûjours ſituées ſur une ſurface plane, les Géometres modernes conſiderent encore les Courbes à double courbure, dont tous les points ne ſont pas placés dans le même plan ; mais parce que la théorie des Courbes à double courbure ſuppoſe celle des ſurfaces courbes, je traite d'abord des équations des ſurfaces courbes ; & venant enſuite aux Courbes à double courbure, j'apprends à les décrire par le moyen des équations de leurs trois Courbes de projection, me réſervant de parler plus au long de ces ſortes de Courbes dans la ſeconde Partie de cet Ouvrage.

Il nous reſte à dire un mot de la maniere dont les Commençans peuvent étudier notre Cours de Mathématiques. Ceux qui n'ont pas le ſecours d'un bon Maître, choſe rare dans les Provinces, doivent lire d'abord tout ce qui eſt écrit en caractere ordinaire, avec les Notes qui y ont rapport, Notes inutiles ſans doute pour les Savans, mais que nous avons jugé à propos de multiplier, afin de nous rendre plus intelligibles, nous étant

propoſés d'inſtruire les Commençans, & non de nous faire admirer. Revenant enſuite ſur leurs pas, ils reprendront le tout, en liſant de ſuite l'Ouvrage tout entier : j'en excepte la derniere ſection de la ſeconde Partie, pour laquelle il ne ſera pas néceſſaire de prendre cette précaution. Le petit caractere contient (excepté dans la quatriéme ſection de la ſeconde Partie) des choſes moins eſſentielles, quoique très-intéreſſantes ; & ceux qui veulent approfondir les Mathématiques & devenir vraiment Géometres, ſeront bien-aiſe de trouver raſſemblés dans un petit nombre de volumes les découvertes & les travaux des Mathématiciens anciens & modernes. Une longue expérience nous ayant appris la maniere dont on doit préſenter la vérité aux jeunes gens pour qu'ils la ſaiſiſſent avec facilité, nous eſpérons que les eſprits même ordinaires pourront, moyennant une application un peu ſoutenue, comprendre facilement notre Ouvrage & devenir Géometres ſans le ſecours d'aucun Maître : mais ceux qui auront ce ſecours pourront faire des progrès plus rapides, & approfondir les Mathématiques en fort peu de temps.

# APPROBATION

## DU CENSEUR ROYAL.

J'AI lu par l'ordre de Monſeigneur le Chancelier, le *Cours complet de Mathématiques*, compoſé par M. l'Abbé SAURI. Ce Cours m'a paru plus complet que tous ceux qui ont paru juſqu'à préſent, ſoit en France, ſoit dans le reſte de l'Europe : la Géométrie, l'Algebre, les Séries, la théorie des Sinus y ſont traités d'une maniere auſſi claire que profonde ; les Sections Coniques y ſont très-bien développées ; on y trouve tout ce qu'on peut déſirer ſur les Courbes tranſcendantes & ſur les Courbes à double courbure, avec la réſolution des Problêmes de Géométrie qui s'y rapportent, la méthode de trouver les racines des Equations par le moyen des Courbes & du quarré analytique.

La ſeconde Partie de cet Ouvrage contient quatre Sections : dans la premiere ſont les principes généraux du Calcul différentiel & du Calcul intégral, les applications du Calcul différentiel aux ſous-tangentes, ſous-normales, tangentes & normales des Courbes, ſoit algébriques, ſoit tranſcendantes, & aux queſtions importantes de *maximis* & *minimis*. L'Auteur examine, par exemple, qu'elles ſont les conditions que doivent avoir les fonctions algébriques, pour être ſuſceptibles du *maximum* & du *minimum*. Il explique les *maxima* & *minima* de la ſeconde eſpece, les rayons de courbure, les points d'inflexion & de rebrouſſement, les cauſtiques par réflexion & par réfraction, & l'uſage du Calcul différentiel dans la recherche des racines des Equations. Les notions qu'il donne ſur la nature du Calcul infinitéſimal, ſont claires & ſatisfaiſantes ; il paroît même prouver que Newton, Euler ſe ſont trompés dans l'idée qu'ils s'en formoient.

La ſeconde Section comprend les applications du Calcul intégral à la Géométrie ; on y apprend la quadrature & la rectification des Courbes, la maniere de trouver le centre de gravité des Solides, la méthode inverſe des tangentes, & l'application du Calcul différentiel & intégral aux Courbes à double courbure.

Dans la troiſiéme Section, M. l'Abbé SAURI donne la maniere d'intégrer les Formules & les Equations différentielles à une & à pluſieurs variables ; on y apprend dans quel cas une différentielle d'un ordre quelconque peut être intégrée un certain nombre de fois dans l'état où elle eſt. Tout ce qu'on a

trouvé de plus intéreſſant ſur le Calcul intégral, depuis que les plus grands Géometres s'en ſont occupés, eſt renfermé dans cette Section, qui tiendra lieu de pluſieurs volumes à ceux qui voudront approfondir cette partie, la plus abſtraite de la haute Géométrie. L'Auteur y développe la nouvelle théorie des Variations, avec les conſéquences qu'on peut en tirer pour la perfection du Calcul intégral; il fait enfin l'application de ce Calcul aux queſtions de *maximis* & *minimis*, qui ne peuvent ſe réſoudre par le Calcul différentiel.

La quatriéme Section renferme l'application de tous ces Calculs aux plus beaux Problêmes de Phyſique, de Marine, de Méchanique & d'Hydrodinamique.

Cet expoſé du Cours de Mathématiques de M. l'Abbé SAURI fait voir qu'il étoit difficile d'y réunir plus d'avantages; on les chercheroit inutilement dans tout autre Ouvrage. L'Auteur y a mis la plus grande clarté. Il ſubſtitue ſouvent aux méthodes des plus habiles Géometres, des méthodes plus ſimples qui lui ſont propres & qui ſont ingénieuſes; il releve des erreurs dans des Auteurs célebres, relativement à des queſtions importantes; enfin il réunit tous les genres de mérite que l'on pouvoit donner à cet Ouvrage. On pourra par le moyen de ce Livre approfondir les Mathématiques plus facilement & en moins de temps qu'on ne pouvoit le faire avec le ſecours diſpendieux d'un grand nombre de Livres étrangers & de Mémoires de différentes Académies, dont on pourra ſe paſſer au moyen du nouvel Ouvrage de M. l'Abbé SAURI. A Paris, le premier Mars 17[illegible]. *Signé*, DELALANDE, de l'Académie des Sciences.

---

*Le Privilége ſe trouve au* Cours de Philoſophie *par le même Auteur.*

COURS

# COURS COMPLET
## DE
# MATHÉMATIQUES.

## PREMIERE PARTIE.

### *CALCUL.*

1. LES MATHÉMATIQUES ne ſont autre choſe que la ſcience de la grandeur. La *grandeur* ou *quantité* eſt une choſe ſuſceptible d'augmentation ou de diminution : comme les nombres qu'on peut augmenter, en leur ajoutant une ou pluſieurs unités, qu'on peut diminuer en en retranchant un autre nombre : ainſi, en ajoutant trois unités au nombre douze, on a *quinze* ; & ſeulement *huit*, ſi de ce nombre l'on retranche quatre. La quantité dont les parties ſont ſéparées, s'appelle *grandeur diſcrete* : tel eſt un amas de grains ; elle fait l'objet de l'Arithmétique. On appelle *grandeur continue*, celle dont les parties ſont unies entr'elles : ſi ces parties exiſtent ſucceſſivement, & non toutes à la fois, c'eſt alors la *grandeur ſucceſſive* : tel eſt le temps, dont les

parties se suivent les unes les autres sans aucune interruption; si les parties existent toutes à la fois, on la nomme *grandeur permanente* : telle est l'étendue, qui fait l'objet de la Géométrie.

On peut diviser les Mathématiques en *pures* & *mixtes*. Les Mathématiques pures considerent la grandeur en tant que grandeur; les Mathématiques mixtes considerent la grandeur en tant que revêtue des qualités sensibles & physiques : comme la Méchanique, qui considere le mouvement des corps; l'Optique, qui traite des propriétés de la lumiere. Comme nous avons déja rendu compte du plan de notre Ouvrage, il seroit inutile de revenir là-dessus; mais, avant d'entrer en matiere, il est bon d'expliquer ce qu'on entend par certains termes fort usités chez les Mathématiciens.

Un *Théorême* est une proposition dont il s'agit de démontrer la vérité.

Un *Corollaire* est une proposition qui suit d'une autre.

Un *Problême* est une proposition qui enseigne le moyen de faire quelque chose.

Un *Lemme* est une proposition qu'on démontre pour servir de principe à un autre.

Un *Scolie* est une remarque que l'on fait sur une proposition déja démontrée, ou bien encore la récapitulation succinte d'une théorie plus étendue.

Une *Définition* est une proposition qui explique la nature d'une chose, ou la signification d'un mot.

On entend, par *Axiomes*, des vérités si palpables que personne ne les conteste : telles sont les propositions suivantes.

Le tout est plus grand qu'une de ses parties; deux choses égales à une troisiéme, sont égales en-

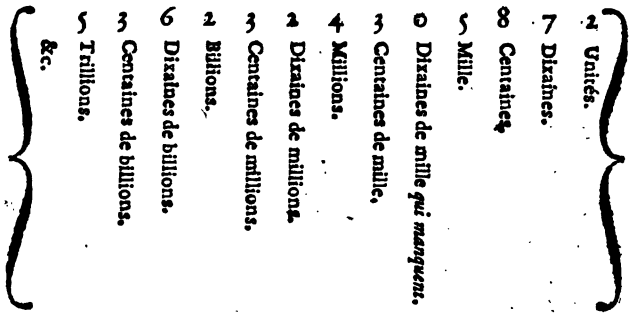
tr'elles ; ſi à des quantités égales on ajoute des quantités égales ; ou bien, ſi de quantités égales on retranche des quantités egales, elles reſteront égales.

## *DE L'ARITHMÉTIQUE.*

1. L'*Arithmétique*, ou la ſcience des nombres, apprend à les compoſer & décompoſer. On entend par un *nombre*, l'*aſſemblage de pluſieurs unités* ; l'*unité* eſt une choſe indiviſible, ou qu'on regarde comme telle, mais cela n'empêche pas que certaines unités ne ſoient compoſées d'autres unités plus petites : *par exemple*, l'unité de livre eſt compoſée de ſeize onces. On ſe ſert dans la numération actuelle des dix caracteres ſuivans :

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| zero ; | un ; | deux ; | trois ; | quatre, | cinq ; | ſix, | ſept ; | huit ; | neuf |

Le 0 ſeul ne ſignifie rien, mais il augmente la valeur des chiffres qui le précédent vers la gauche : le caractere 3, *par exemple*, ne vaut que trois unités ; mais, s'il eſt ſuivi d'un 0, en cette maniere 30, il vaut *trente* : de même le chiffre 2 ne vaut que *deux* ; mais ſuivi d'un 3, en cette maniere 23, il vaut *vingt-trois* : de ſorte que, dans la numération actuelle, la valeur des chiffres va en augmentant de droite à gauche, en proportion décuple : c'eſt-à-dire, l'unité d'un chiffre plus à gauche, vaut dix fois l'unité d'un chiffre immédiatement plus à droite : donc, en allant de la droite à la gauche, les unités du premier chiffre ſeront des unités ſimples ; celles du ſecond, des dixaines ; celles du troiſiéme, des centaines ; celles du quatriéme, des mille, &c. comme on le voit ici :




Si donc on propoſe d'exprimer en chiffres le nombre cinquante millions cinq cens douze mille cent, je commence par les millions, en écrivant 50 ; j'écris enſuite 512, & à côté je poſe encore 100, & j'ai 50, 512, 100, nombre demandé : mais, pour exprimer dans le diſcours le même nombre exprimé en chiffres, après l'avoir partagé en tranches, en commençant par la droite, enſorte que chaque tranche contienne trois chiffres, excepté la premiere à gauche qui peut en contenir moins, je vois que la premiere tranche (car on ſuppoſe qu'il y en a plus d'une, autrement ce que nous venons de dire n'auroit pas lieu) contient des unités ; la ſeconde des mille, & la troiſiéme des millions : ainſi, en allant de la gauche à la droite, je dirai cinquante millions cinq cens douze mille cent.

## *DE L'ADDITION.*

3. L'*Addition* eſt cette opération par laquelle on trouve la ſomme de pluſieurs nombres qu'on veut joindre enſemble.

PROBLEME. *Soit propoſé d'ajouter enſemble les nombres* 73520, 702, 897 : les ayant écrits les uns ſous les autres, les unités ſous les unités, les dixaines

sous les dixaines, &c. on tirera une barre au-dessous; prenant ensuite la somme des unités, on l'écrira sous les unités; on prendra ensuite la somme des dixaines, qu'on écrira sous les dixaines; puis celle des centaines, &c. Si la somme des unités ne peut s'exprimer que par 2 chiffres, on écrira sous les unités celui de la droite, & l'on retiendra celui de la gauche pour l'ajouter à la somme des dixaines; on fera la même chose à l'égard des dixaines par rapport aux centaines, &c. Ainsi je dirai 7 & 2 font 9, que j'écris sous les unités : je passe ensuite aux dixaines, en disant 9 & 2 font 11, qui valent une dixaine & 10 dixaines, c'est-à-dire, une dixaine & une centaine, c'est pourquoi j'écris 1 sous les dixaines, & je retiens 1 pour l'ajouter à la somme des centaines : je dis donc 1 de retenu & 8 font 9, & 7 font 16, & 5 font 21, j'écris 1 sous les centaines, & je retiens les 2 pour les ajouter au chiffre 3 situé dans la colonne des mille, je dis donc 2 de retenu & 3 font 5, que j'écris sous les mille; je passe ensuite à la colonne des dixaines de mille, qui ne contient que le chiffre 7 que j'écris sous cette colonne, de sorte que j'ai pour somme cherchée le nombre 75119.

| |
|---|
| 73520 |
| 702 |
| 897 |
| 75119 |

4. PROBLEME. *Ajouter ensemble des nombres complexes, c'est-à-dire, des nombres qui contiennent des grandeurs de différentes espèces, comme livres, sols, deniers.* Il faut écrire les unités de même nature les unes sous les autres, c'est-à-dire, les deniers, *par exemple*, sous les deniers, les sols sous les sols, &c. On prendra ensuite la somme des plus petites especes, & l'on verra si cette somme ne contient pas une ou plusieurs unités de l'espece plus grande, dans ce cas on retiendroit cette unité,

ou ces unités, pour en faire une seule somme avec le nombre qui désigne la somme des unités de la grandeur suivante : on en feroit de même pour les sols à l'égard des livres ; ainsi, pour ajouter ensemble les nombres qu'on voit ici,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 352 | liv. | 3 | sols. | 5 | den. |
| 872 | | 18 | | 10 | |
| 3 | | 0 | | 2 | |
| 1228 | liv. | 2 | sols. | 5 | den. |

je prends la somme des deniers, laquelle étant 17 (on prend les 10 deniers tous à la fois) vaut 5 deniers & 12 deniers, c'est-à-dire, un sol & cinq deniers : c'est pourquoi écrivant 5 sous les deniers, je retiens un sol pour l'ajouter à la somme de la colonne suivante : je dis donc un sol de retenu & 9 & 18 font 19 & 3 font 22, qui valent 2 sols & 1 liv. c'est pourquoi j'écris 2 sols sous les sols, & je retiens 1 que j'ajoute aux livres ; je dis donc un de retenu & 3 font 4, & 2 font 6, & 2 font 8, que j'écris sous les unités de livre. Je passe ensuite à la colonne suivante, dont la somme est 12, c'est pourquoi j'écris 2 sous cette colonne, & je retiens 1 pour la colonne suivante, qui par ce moyen (2) vaudra 12 ; ainsi j'écrirai 2 sous les centaines de livre, & 1 au rang des mille, de sorte que la somme sera 1228 liv. 2 s. 5 den. On opérera de même s'il s'agit d'ajouter ensemble des toises, pieds & pouces ; en se souvenant que la toise vaut 6 pieds, & le pied 12 pouces.

*Scolie.* On peut, en opérant sur les deniers ou les sols, prendre à la fois la somme des dixaines & des

unités, ſans s'aſſujettir à paſſer des unités aux dixaines.

DEMONSTRATION de l'Addition. En ſuivant la regle preſcrite, on prend la ſomme des unités, celle des dixaines, celle des centaines, &c. donc on prend la ſomme entiere des nombres propoſés.

Pour faire la preuve de l'Addition, on peut recommencer l'opération, en allant de bas en haut, ſi l'on a d'abord opéré, en allant de haut en bas, ou réciproquement; & ſi l'on trouve la même ſomme que l'on a d'abord trouvée, c'eſt une marque qu'il n'y a pas d'erreur; car il n'y a point d'apparence qu'on faſſe la même faute dans les deux opérations.

## *DE LA SOUSTRACTION.*

5. *Souſtraire un nombre 3, par exemple*, de 5, c'eſt ôter 3 de 5; le reſte 2 eſt l'excès du plus grand ſur le plus petit: on l'appelle auſſi *différence*. Il eſt viſible que l'excès ou la différence 2 étant ajoutée au nombre 3 qu'on a ſouſtrait, doit donner le nombre 5 dont on a ſouſtrait. Il eſt encore évident que ſi on ajoutoit au nombre 5 un nombre 10, *par exemple*, en ajoutant le même nombre au nombre 3 qu'on veut ſouſtraire de 5, la différence 2 de 15 à 13 ſeroit encore la même qu'auparavant.

6. PROBLEME. *Souſtraire le nombre 3502 du nombre 58001.* Ecrivez le plus petit ſous le plus grand, enſorte que les unités répondent aux unités, les dixaines aux dixaines, &c. Retranchez, en allant de la droite à la gauche, chaque chiffre du nombre inférieur du chiffre correſpondant dans le nombre ſupérieur; écrivez la différence ſous chaque co-

| |
|---|
| 58001 |
| 3502 |
| 54499 |

lonne. Si un des chiffres du nombre inférieur ſe trouve plus grand que ſon correſpondant dans le nombre ſupérieur, ajoutez 10 au nombre ſupérieur; mais enſuite n'oubliez pas d'ajouter une unité au chiffre ſuivant du nombre inférieur. Cette unité étant ajoutée à un chiffre immédiatement plus à gauche, vaudra les dix unités ajoutées au nombre ſupérieur (2); ainſi (5) la différence ſera toujours la même. Ayant donc écrit les deux nombres, comme on le voit ici : je dis 2 de 1, cela ne ſe peut; c'eſt pourquoi ajoutant 10 à 1, je retranche 2 de 11, j'écris le reſte 9 ſous les unités; mais je me ſouviens enſuite d'ajouter 1 au chiffre ſuivant 0 du nombre inférieur (cela ſe fait ſeulement par la penſée) ce qui fait 1, qui ne peut être ſouſtrait du chiffre correſpondant 0; j'ajoute donc 10 à 0, & je retranche 1 de 10 pour avoir le reſte 9, que j'écris au rang des dixaines; & à cauſe de 10 ajouté au nombre ſupérieur, j'ajoute 1 au chiffre 5 du nombre inférieur 1, la ſomme 6 ne peut être retranchée du chiffre correſpondant 0, j'ajoute donc 10 à 0, d'où rétranchant 6, il reſte 4, que j'écris à la différence; je me ſouviens d'ajouter 1 au chiffre ſuivant 3 du nombre inférieur pour avoir la ſomme 4, qui ôtée de 8, il reſte 4 que j'écris à la différence; & comme je n'ai rien à ôter de 5, je dis rien, ou 0, de 5, il reſte 5 que j'écris encore à la différence, comme on le voit, de ſorte que la différence cherchée eſt 54499.

Si les nombres ſont complexes, il faut écrire les unités de même eſpece les unes ſous les autres, & ſouſtraire en allant de droite à gauche, chaque chiffre du nombre inférieur de ſon correſpondant dans le nombre ſupérieur. S'il arrivoit que le nombre

des deniers, *par exemple*, dans le nombre inférieur fût plus grand que ſon correſpondant, on ajouteroit à ce nombre correſpondant un ſol réduit en deniers, c'eſt-à-dire, 12 deniers; mais il faudroit ajouter 1 aux ſols du nombre inférieur, afin que la différence fût toujours la même. Si l'on étoit obligé d'ajouter aux ſols du nombre ſupérieur, on leur ajouteroit 20 ſols, c'eſt-à-dire, une livre réduite en ſols, puis on ajouteroit 1 livre aux livres du du nombre inférieur. S'il s'agiſſoit de pouces, pieds, & toiſes, on s'y prendroit comme dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE. *Soit propoſé de ſouſtraire 25 toiſes, 3 pieds, 10 pouces, de 368 toiſes, 2 pieds, 8 pouces.* Ayant diſpoſé ces nombres, comme on le voit ici:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 368 | toiſes. | 2 | pieds. | 8 | pouces. |
| 25 | | 3 | | 10 | |
| 342 | | 4 | | 10 | |
| 368 | toiſes. | 2 | pieds. | 8 | pouces. |

Je dis 10 de 8, cela ne ſe peut; c'eſt pourquoi j'ajoute 1 pied, ou 12 pouces, à 8, ce qui me donne 20, d'où retranchant 10, reſte 10, que j'écris ſous les pouces. J'ajoute enſuite un pied au nombre inférieur pour avoir 4 pieds, qui ne peuvent s'ôter de 2; c'eſt pourquoi j'ajoute une toiſe, ou 6 pieds au nombre ſupérieur, ce qui me donne 8, d'où retranchant 4, il reſte 4, que j'écris ſous les pieds. Comme j'ai ajouté une toiſe au nombre ſupérieur, je dois en ajouter une à l'inférieur; je dis donc 5 & 1 ſont 6, de 8, il reſte 2, que j'écris

ſous les toiſes : j'ôte enſuite 2 de 6, & je poſe 4 à côté du 2, & enfin, ôtant rien, ou 0 de 3, il reſte 3 que j'écris encore à la différence, qui eſt 342 toiſes, 4 pieds, 10 pouces.

Pour faire la preuve de la Souſtraction, on ajoutera enſemble le nombre qu'on a ſouſtrait avec la différence, & l'on trouvera la même ſomme, ſi l'opération eſt bien faite. Si l'on ajoute donc 25 toiſes, 3 pieds, 10 pouces, avec 342 toiſes, 4 pieds, 10 pouces, on aura 368 toiſes, 2 pieds, 8 pouces : ainſi l'opération ci-deſſus eſt bien faite.

Pour faire la démonſtration de la Souſtraction, il n'y a qu'à remarquer qu'en ſuivant la méthode propoſée, on prend la différence des unités, celle des dixaines, des centaines, &c. du plus grand & du plus petit nombre : on trouve donc la différence totale de l'un à l'autre.

## *DE LA MULTIPLICATION.*

7. *Multiplier un nombre par un autre, c'eſt prendre le premier, qu'on appelle* Multiplicande *autant de fois qu'il y a d'unités dans le ſecond, qu'on nomme* Multiplicateur ; *le réſultat s'appelle* Produit. *Par exemple*, multiplier 5 par 3, c'eſt prendre 5 trois fois, ce que l'on fait, en diſant, 3 fois 5 font 15. 5 eſt le *multiplicande*, 3 le *multiplicateur*, & 15 le *produit*. Il ſuit de là que le produit 15 doit contenir le multiplicande 5 trois fois, c'eſt-à-dire, autant de fois que le multiplicateur contient l'unité.

Pour exécuter facilement la multiplication, il eſt bon d'apprendre par cœur la table ſuivante, dont l'uſage eſt facile à concevoir :

Si je veux ſavoir, *par exemple*, combien font 7

fois 6, je cherche la case qui répond à 7 & à 6, le nombre 42 qui se trouve dans cette case, est le produit de 7 par 6, & ainsi des autres.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

PROBLEME. *Multiplier un nombre par un autre.* Écrivez le multiplicateur au-dessous du multiplicande, de maniere que les unités répondent aux unités, les dixaines aux dixaines, &c. Ecrivez ensuite, en allant de la droite à la gauche, le produit de chaque chiffre du multiplicande par les unités du multiplicateur, ayant attention, lorsqu'un produit contient deux chiffres, de retenir celui de la gauche, pour l'ajouter au produit suivant, dont les unités sont des dixaines du produit précédent. S'il y a plusieurs chiffres au multiplicateur, le premier chiffre de chaque produit doit être écrit sous le chiffre correspondant du multiplicateur, ce qui est évident; puisque, quand on multiplie, *par exemple*, par les dixaines du multiplicateur, le premier chiffre du produit doit être au rang des

dixaines, &c. Prenez enſuite la ſomme de tous les produits, & vous aurez le produit total : Pour multiplier 3052, *par exemple*, par 153, après avoir écrit le multiplicande & le multiplicateur, comme on le voit ici, je dis 3 fois 2 font 6, que j'écris ſous le premier chiffre du multiplicateur ; je dis enſuite 3 fois 5 font 15, j'écris 5 à côté de 6, & je retiens 1 : continuant d'opérer, je dis 3 fois 0 font 0, & 1 de retenu font 1, que j'écris à la gauche du 5 : je dis enſuite 3 fois 3 font 9, que j'écris comme on le voit, & j'ai le produit du multiplicande par le premier chiffre du multiplicateur. Je prends de même le produit du multiplicande par le ſecond chiffre du multiplicateur, en diſant 5 fois 2 font 10 ; j'écris 0 ſous le ſecond chiffre 5 du premier produit, & je retiens 1. En continuant d'opérer, je dis, 5 fois 5 donnent 25, & 1 de retenu font 26, j'écris 6 & retiens 2 ; je dis enſuite 5 fois 0 donnent 0, & 2 de retenus donnent 2, que j'écris à côté de 6 : je dis enfin 5 fois 3 font 15, que je poſe, comme on le voit. Je paſſe au troiſiéme chiffre du multiplicateur, en diſant, 1 fois 2 eſt 2, que j'écris ſous 1, c'eſt-à-dire, au rang des centaines ; je dis enſuite 1 fois 5 donne 5, j'écris 5 à côté de 2 : enſuite 1 fois 0 donne 0, que j'écris après 5 ; enfin 1 fois 3 fait 3, que j'écris après 0. J'ajoute ces différens produits, en diſant, 6 que j'écris ſous 6 ; enſuite 0 & 5 font 5, que j'écris à côté de 6. Et continuant d'opérer, je dis, 1 & 6 font 7, & 2 donnent 9, que j'écris à coté de 5 ; & continuant de même, j'ai le produit total 466956.

| |
|---|
| 3052 |
| 153 |
| 9156 |
| 15260 |
| 3052 |
| 466956 |

DEMONSTRATION de la Multiplication. En ſui-

vant le procédé que nous venons d'indiquer, on prend le produit du multiplicande par les unités, par les dixaines, centaines, &c. du multiplicateur : donc on trouve le vrai produit, ou, ce qui revient au même, l'on prend le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur . . . En effet, en multipliant par 3, on a pris le multiplicande 3 fois, en multipliant par 5 on l'a pris 50 fois, puiſqu'on a écrit le premier chiffre du produit au rang des dixaines, en multipliant par 1, & mettant le premier chiffre du produit au rang des centaines, on a multiplié par 100 : on a donc pris le multiplicande 153 fois.

Comme dans certains cas on peut abréger la multiplication, il eſt bon d'en faire connoître quelques-uns. Si l'on doit multiplier par 1 ſuivi d'un ou de pluſieurs 0 il ſuffira d'écrire à la ſuite du multiplicande autant de 0 qu'il y en a au multiplicateur : *par exemple*, pour multiplier 25 par 100, j'écris 2500, ce qui eſt évident, puiſque multiplier 25 par 100, c'eſt prendre le multiplicande 100 fois, ou, ce qui revient au même, c'eſt rendre le multiplicande 100 fois plus grand ; or, en ajoutant deux 0, on rend le multiplicande 100 fois plus grand, puiſque ſes unités deviennent des centaines, & ſes dixaines deviennent des mille : donc, &c. Si on avoit à multiplier 25 par un nombre quelconque, ſuivi d'un ou de pluſieurs 0, on multiplieroit à l'ordinaire ſans avoir égard aux 0, on ajouteroit enſuite au produit autant de 0 qu'il y en auroit au multiplicateur : ainſi, ſi le multiplicateur étoit 300, on multiplieroit 25 par 3, le produit eſt 75, à côté duquel écrivant 00, j'ai pour produit total 7500 : en effet le produit de 25 par 300 doit être triple du pro-

duit de 25 par 100 ; or, 7500 eſt triple de 2500.

S'il y avoit des o, tant à la fin du multiplicande, que du multiplicateur : *par exemple*, ſi on avoit à multiplier 250 par 300, on multiplieroit 25 par 3, & l'on ajouteroit au produit 75 autant de o qu'il y en a, tant au multiplicande qu'au multiplicateur, & le produit cherché ſeroit 75000. Pour en avoir la raiſon, il ſuffit de remarquer que le produit de 25 par 300 doit être 7500, ainſi que nous l'avons dit ci-deſſus ; or 250 eſt 10 fois plus grand que 25, donc le produit 7500 eſt 10 fois trop petit ; on doit donc, en ajoutant un o, le rendre 10 fois plus grand : donc, &c.

REMARQUE I. Cela n'a pas lieu pour les o qui ſe trouvent entre les chiffres poſitifs du multiplicande ou du multiplicateur : ainſi, pour multiplier 12000 par 10100, on doit multiplier 12 par 101, & ajouter au produit autant de o qu'il y en a, tant à la fin du multiplicande, qu'à la fin du multiplicateur, & l'on aura pour produit 121200000.

REMARQUE II. La Multiplication ſert à réduire les grandes eſpeces en petites ; *par exemple*, les toiſes en pieds, les pieds en pouces, les livres en ſols, les ſols en deniers. Ce qui ſe fait en multipliant les grandes eſpeces par le nombre qui déſigne combien de fois la grande contient la petite eſpece : ainſi, pour ſavoir combien 8 toiſes valent de pieds, je multiplie 8 par 6 ; parce que la toiſe contient ſix pieds, le produit 48 me fait voir que 8 toiſes valent 48 pieds.

Pour prouver la multiplication, on peut changer l'ordre des nombres donnés, c'eſt-à-dire, prendre pour multiplicande le multiplicateur, & réciproquement ; car on doit toujours trouver le même

produit : en effet, 4 multiplié par 3 donne 12 ; & 3 multiplié par 4 donne auſſi 12.

## DE LA DIVISION.

8. *La Diviſion eſt une opération par laquelle on cherche combien de fois un nombre*, par exemple, *15 qu'on appelle* Dividende, *contient un autre nombre 5*, par exemple, *qu'on nomme* Diviſeur ; *le nombre 3 qui exprime combien de fois le dividende 15 contient le diviſeur 5, eſt appellé* Quotient.

COROLLAIRE. De-là il ſuit : 1°. que le dividende contient le diviſeur autant de fois que le quotient contient l'unité ; 2°. que la diviſion eſt une eſpece de ſouſtraction, puiſque, quand on demande de diviſer 15 par 5, c'eſt la même choſe que ſi on demandoit de ſouſtraire 5 de 15 autant de fois qu'il y eſt contenu, c'eſt-à-dire, 3 fois ; & ſi l'on fait attention qu'en multipliant 5 par 3, on ajoute 5 trois fois, il ſera aiſé de voir que la multiplication eſt une eſpece d'addition, comme la diviſion eſt une eſpece de ſouſtraction ; 3°. que parce que le quotient exprime combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende, ſi on prend le diviſeur autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, on aura le dividende ; de ſorte que le produit du diviſeur, par le quotient, doit rendre le dividende (& c'eſt en cela que conſiſte la preuve de la diviſion), ſi le quotient eſt exact ; mais ſi ce quotient n'eſt pas exact, c'eſt-à-dire, s'il y a un reſte, il eſt néceſſaire qu'en ajoutant le reſte au produit dont nous venons de parler, on retrouve le dividende. *Par exemple*, ſi je diviſe 24 par 5, je dirai en 24 combien de fois 5, je trouve 4 pour quotient ; mais 4

parce que 20, produit du diviſeur 5 par le quotient 4, étant ſouſtrait du dividende 24, il y a 4 de reſte, il faut qu'en ajoutant le reſte 4 au produit 20, on retrouve le dividende 24; 4°. puiſqu'en multipliant 5 par 3, le produit 15 contient évidemment le multiplicande 5 trois fois, c'eſt-à-dire, autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, ſi on diviſe le produit par le multiplicande, on doit retrouver le multiplicateur au quotient: en effet, en diviſant 15 par 5, on a 3 pour quotient. On voit auſſi qu'en diviſant le produit 15 par le multiplicateur, on aura le multiplicande 5, & c'eſt en cela que conſiſte la preuve de la multiplication.

PROBLEME. *Diviſer un nombre par un plus petit.* Ecrivez le diviſeur à la droite du dividende, en les ſéparant l'un de l'autre par une barre; tirez-en une autre au-deſſous; prenez pour premier membre de diviſion un nombre de chiffres capable de contenir le diviſeur; cherchez combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le premier membre dont nous venons de parler: écrivez le quotient, en commençant par la gauche; multipliez enſuite le quotient que vous venez d'écrire par le diviſeur; ôtez le le produit du premier membre de diviſion; à côté du reſte, ou de 0, s'il n'y a point de reſte, deſcendez le chiffre ſuivant du dividende; diviſez le reſte joint au chiffre deſcendu, ou le chiffre deſcendu ſeul, s'il n'y a point de reſte, par le diviſeur; écrivez le réſultat au quotient, & ainſi de ſuite juſqu'à la fin. Si, en opérant ainſi, l'on s'apperçoit que le diviſeur n'eſt pas contenu dans quelqu'un des membres de diviſion qui ſuivent le premier, on mettra 0 au quotient; & ſi à la fin on trouve

trouve un reſte, on l'écrira à part, en le renfermant entre deux crochets, pour l'ajouter au produit du quotient entier par le diviſeur.

EXEMPLE I. *Soit propoſé de diviſer 824 par 4.* Ayant écrit le diviſeur à la droite du dividende, comme on le voit ici, je prends 8 pour premier membre de diviſion, & je dis en 8 combien de fois 4, je trouve qu'il y eſt 2 fois, c'eſt pourquoi j'écris 2 au quotient; multipliant enſuite le diviſeur par le quotient, & retranchant le produit de 8, il reſte 0, à côté duquel je deſcends 2; mais, parce que 2 ne contient pas 4, j'écris 0 au quotient. A côté de 2 je deſcends 4 pour avoir 24 au troiſiéme membre de diviſion: je diviſe 24 par 4, & j'écris le quotient 6, que je multiplie par le diviſeur 4; Le produit 24 étant retranché de 24, il ne reſte rien, de ſorte que le quotient eſt exact, & égal à 206.

| 824 | 4 |
|---|---|
| 8 | 206 |
| 024 | |

EXEMPLE II. *Soit propoſé de diviſer 358 par 5.* Je prends 35 pour premier membre de diviſion, parce que le premier chiffre 3 ne contient pas le diviſeur; je dis enſuite en 35, combien de fois 5, il y eſt 7 fois, j'écris 7 au quotient; je multiplie le diviſeur 5 par 7, le produit 35 étant retranché de 35, le reſte eſt 0; à côté duquel je deſcends 8, pour dire enſuite, en 8 combien de fois 5, 1 fois, j'écris donc 1 au quotient; & multipliant 5 par 1, je retranche le produit 5 de 8. J'ai un reſte 3 que j'écris entre deux crochets, comme vous le voyez ici, ce qui marque que ſi le dividende eût été plus petit de 3, il auroit contenu le diviſeur 71 fois juſte.

| 358 | 5 | |
|---|---|---|
| 35 | 71 | (3) |
| 08 | | |
| 5 | | |
| 3 | | |

EXEMPLE III. *Soit propoſé maintenant de diviſer*

*1534 par 23.* Ayant disposé le diviseur & le dividende comme à l'ordinaire, je remarque que les deux premiers chiffres du dividende ne contiennent pas le diviseur 23, c'est pourquoi je prends pour premier membre de division les trois premiers chiffres du dividende, & je conçois que le premier chiffre 2 du diviseur répond aux deux premiers du dividende, en cette maniere $\frac{153}{23}$ (ce qui a lieu de même toutes les fois qu'un membre de division contient un chiffre de plus que le diviseur). Je dis ensuite, en 15 combien de fois 2, je trouve qu'il y est 7 fois: je multiplie le diviseur entier par 7, le produit 161 ne peut être soustrait du dividende partiel 153: ainsi je diminue le quotient d'une unité; & comme le produit 138 du diviseur 23 par 6 peut-être ôté du premier membre de division 153, je fais cette soustraction, & je mets 6 au quotient. Je descends 4 à côté du reste 15, & je trouve de même que le second chiffre du quotient est 6: je multiplie encore le diviseur par 6, & je soustrais le produit 138 de 154, pour avoir le reste 16, que j'écris à côté du quotient, comme on le voit ici.

| 1534 | 23 |
|---|---|
| 1380 | 66(16) |
| 154 | |
| 138 | |
| 16 | |

REMARQUES. 1°. On se sert d'abord seulement du premier chiffre du diviseur pour trouver le quotient; mais, parce qu'il s'agit de trouver combien de fois le diviseur entier est contenu dans le dividende, il faut, avant de mettre un chiffre au quotient, multiplier le diviseur entier par ce chiffre. Si le produit peut être soustrait du dividende partiel, on l'écrira au quotient: si le contraire arrive, on diminuera le quotient d'une, de deux, de trois, &c. unités, jusqu'à ce que le produit

ſoit contenu dans ce dividende ; & ſi le diviſeur ſe trouvoit plus grand que le membre de diviſion ſur lequel on opere, on écriroit 0 au quotient. 2°. Il eſt bon de paſſer un trait ſur chaque chiffre qu'on abaiſſe, afin de ſe ſouvenir qu'on l'a abaiſſé. 3°. Si un reſte étoit égal, ou plus grand que le diviſeur, ce ſeroit une marque que le diviſeur ſeroit contenu dans ce dividende au moins 1 fois de plus qu'il n'eſt marqué par le quotient, il faudroit donc augmenter ce quotient. 4°. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient; car ſuppoſons d'abord que le membre de diviſion ſur lequel on opere, contient autant de chiffres que le diviſeur : que ce membre ſoit 99, *par exemple*, qui eſt le plus grand nombre de deux chiffres, & que le diviſeur ſoit 10, qui eſt le plus petit nombre de deux chiffres ; or 99 ne contient pas 10 dix fois, puiſque 10 fois 10 font 100, plus grand que 99. Suppoſons en ſecond lieu que le dividende partiel contienne un chiffre de plus que le diviſeur, de maniere que l'on ait 25 pour diviſeur, & 249 pour dividende partiel, il eſt viſible qu'en augmentant d'une unité ce dividende, on aura 250 : mais alors on ne pourra plus prendre 250 pour dividende partiel, mais ſeulement 25 égal au diviſeur, de ſorte que 249 eſt le plus grand dividende de 3 chiffres par rapport au diviſeur 25 ; or 249 ne contient pas 25 dix fois, puiſque 10 fois 25 valent 250 : donc ſi le premier membre de diviſion contient un chiffre de plus que le diviſeur, on ne peut pas mettre plus de 9 au quotient. Mais parce que chaque reſte eſt toujours plus petit que le diviſeur, au moins d'une unité, ſi à côté de ce reſte on deſcend 0, ce qui le rendra 10 fois plus grand, il s'en faudra encore

au moins de 10 unités que le diviſeur n'y ſoit contenu 10 fois : donc, ſi à la place de 0 on met 9 ( qui eſt le plus grand chiffre qu'on puiſſe y mettre ) il s'en faudra encore au moins d'une unité que le diviſeur ne ſoit contenu dix fois dans le dividende partiel ; ainſi on ne peut pas mettre plus de 9 au quotient pour quelque membre de diviſion que ce ſoit.

*Soit propoſé de diviſer 79 par 4.* Ayant diviſé 7 par 4, & ſouſtrait le produit 4 ( du quotient 1 par le diviſeur 4 ), il reſte 3 plus petit d'une unité que le diviſeur 4 ; donc ſi à côté de 3 on mettoit 0, on auroit 30, & l'on voit qu'il s'en faut de 10 unités que 30 ne contienne 4 dix fois ; par conſéquent ſi à la place de 0 on met 9, il s'en faudra d'une unité que le dividende partiel 39 ne contienne 10 fois le diviſeur 4.

Pour faire la preuve de la diviſion, on multipliera le diviſeur entier par le quotient entier ; à ce produit l'on ajoutera le reſte, s'il y en a, & l'on retrouvera le dividende, ſi l'opération eſt exacte.

DÉMONSTRATION de la Diviſion. En opérant, ainſi que nous l'avons dit, on trouve combien de fois le diviſeur eſt contenu dans les centaines, dixaines, &c. du dividende ; on trouve donc le vrai quotient cherché.

Pour réduire les petites eſpeces aux grandes, *par exemple*, les ſols en livres, on ſe ſervira de la diviſion ; & l'on diviſera le nombre des petites eſpeces, par celui qui déſigne combien de fois la grande contient la petite : ainſi, pour ſavoir combien de toiſes valent 45 pieds, je diviſe 45 par 6 ; le quotient 7 & le reſte 3 me font voir que 45 pieds valent 7 toiſes 3 pieds.

S'il y a à la fin du dividende un certain nombre de 0, & que le diviſeur ſoit 1 ſuivi de zeros, on effacera autant de 0 à la fin du dividende, qu'il y en a au diviſeur. Ainſi, pour diviſer 22000 par 100, on écrira 220; car, en opérant ainſi, on prendra la centiéme partie du dividende, c'eſt-à-dire, qu'on rendra le dividende 100 fois plus petit. Si l'on avoit à diviſer 3230 par 1000, parce que le diviſeur contient plus de 0 que le dividende, on feroit la diviſion à l'ordinaire.

9. Avant de paſſer plus loin, nous allons donner l'explication de quelques ſignes qu'on trouve fréquemment dans les ouvrages de Mathématiques. Le ſigne + marque l'Addition : ainſi 2 + 3 marque la ſomme de 2 & de 3, ce ſigne eſt appellé *plus*; de ſorte que 3 + 5, ou 3 plus 5 font 8. Le ſigne — marque la Souſtraction, ou l'appelle *moins* : ainſi 5 — 2, ou 5 moins 2, vaut 3. Le ſigne = s'appelle ſigne d'*égalité* : ainſi 5 — 2 = 3 veut dire que 5 — 2 eſt égal à 3. Le ſigne × indique la Multiplication; de ſorte que 3 × 5 = 15, cela ſignifie que 3 multiplié par 5 eſt égal à 15. Le ſigne < ou > ſignifie plus petit & plus grand : ainſi 3 < 5, 7 > 2 ſignifient que 3 eſt plus petit que 5, & 7 plus grand que 2; en un mot la quantité la plus grande ſe trouve toujours du côté de l'ouverture, & la plus petite du côté de la pointe du ſigne.

## *DES FRACTIONS.*

10. Une *fraction* n'eſt autre choſe qu'une ou pluſieurs parties de l'unité. On ſe ſert de deux nombres pour exprimer une fraction; l'un s'ap-

pelle le *Dénominateur*, parce qu'il désigne la qualité des parties de l'unité, si ce sont des tiers, *par exemple*, ou des quarts, &c. l'autre est appellé *Numérateur*; il marque le nombre des parties que l'on prend; on écrit le dénominateur au-dessous du numérateur, en séparant l'un de l'autre par une ligne. Si donc je veux exprimer en nombres les deux tiers d'une unité, j'écrirai $\frac{2}{3}$. Il n'est pas difficile de comprendre qu'on peut regarder le numérateur comme un *Dividende*, & le dénominateur comme un *Diviseur*. en effet, supposons que l'unité dont il s'agit, soit un pied, les $\frac{2}{3}$ d'un pied seront la même chose que le tiers de deux pieds, puisque les $\frac{2}{3}$ d'un pied valent 8 pouces, aussi bien que le $\frac{1}{3}$ de deux pieds. De-là il suit que tout reste de division est une fraction: *par exemple*, si l'on divise 23 par 5, on a 4 au quotient, & 3 de reste; or il est visible qu'il faut prendre la cinquiéme partie de ce reste, de sorte que le quotient entier sera $4 + \frac{3}{5}$.

Si deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a un plus grand numérateur. En premier lieu il est évident, *par ex.* que $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$; en second lieu, il n'est pas moins évident qu'une fraction sera d'autant plus grande que son numérateur sera plus grand, & son dénominateur plus petit, puisque dans ce cas le numérateur contiendra plus le dénominateur, soit quil le contienne entiérement, ou en partie: mais une fraction est d'autant plus petite, que son dénominateur est plus grand; ainsi $\frac{3}{8} < \frac{3}{7}$: en troisiéme lieu, il est facile de comprendre qu'une fraction restera de même valeur, en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre; car la fraction $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;

en effet, dans le premier cas on prend deux parties de l'unité, & dans le second on n'en prend qu'une ; mais auſſi les parties de la ſeconde fraction ſont deux fois plus grandes que celles de la premiere, ce qui donne la même valeur pour les deux fractions. De même la fraction $\frac{6}{9}$ ſe réduit, en diviſant ſes deux termes par 3, à la fraction $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, & la fraction $\frac{2}{3}$ devient $\frac{6}{9}$, en multipliant ſes deux termes par 3.

Une fraction eſt plus petite que l'unité, lorſque ſon numérateur eſt plus petit que ſon dénominateur, elle eſt plus grande que l'unité, ſi ſon numérateur eſt plus grand que ſon dénominateur : enfin, elle eſt égale à l'unité, lorſque le numérateur eſt égal au dénominateur : ainſi $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{3}{4} < 1$, & $\frac{4}{3} > 1$. Ce qui eſt évident.

Pour réduire un entier 5 en fraction, il ſuffit de regarder l'entier comme le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur ſeroit 1 ; de ſorte que $5 = \frac{5}{1}$ ; car 1 ne diviſe ni ne multiplie : mais, ſi on vouloit une fraction qui eût un dénominateur donné 3, *par exemple*, on multiplieroit l'entier 5 par 3, pour avoir 15, numérateur de la fraction cherchée, qui ſeroit $\frac{15}{3} = 5$.

11. PROBLEME. *Réduire deux fractions au même dénominateur.* Soient les deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ ; multipliant les deux termes de la premiere par le dénominateur 5 de la ſeconde, j'ai $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ (10) ; multipliant de même les deux termes de la ſeconde par le dénominateur 3 de la premiere, j'ai $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$. Il eſt viſible que les fractions réduites ſont de même valeur qu'avant la réduction, & de plus, qu'elles ſont réduites au même dénominateur, puiſque le

dénominateur commun eſt le produit des deux dénominateurs.

COROLLAIRE. Si on vouloit réduire trois, ou un plus grand nombre de fractions au même dénominateur, il ſuffiroit de multiplier les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres.

12. PROBLEME. *Réduire une fraction à un dénominateur donné : par exemple*, réduire la faction $\frac{1}{5}$ d'une livre, en vingtiémes de la livre, ou en ſols, multipliez les deux termes de la fraction propoſée par le dénominateur donné 20, pour avoir $\frac{1}{5} = \frac{60}{100}$; diviſez enſuite les deux termes de cette derniere fraction par le dénominateur 5 de la fraction donnée, & vous aurez la fraction cherchée $\frac{12}{20} = 12^{s}$.

COROLLAIRE. Donc, en ſuppoſant la fraction donnée, réduite à ſa plus ſimple expreſſion, ou à ſes moindres termes, la réduction, dont nous parlons, n'aura lieu que dans le cas que le dénominateur donné ſera diviſible par le dénominateur de la propoſée : ainſi la fraction $\frac{2}{3}$ ne peut pas ſe réduire à une fraction, dont le dénominateur ſeroit 5, parce que 5 n'eſt pas diviſible par 3 ; en effet, en ſuivant la méthode du problême, on aura d'abord $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$; diviſant les deux termes de cette derniere fraction par 3, on aura 15 diviſé par $3 = 5$ ; mais 10 n'étant pas diviſible par 3, on ne pourra pas parvenir au réſultat cherché.

13. PROBLEME. *Réduire une fraction à ſa plus ſimple expreſſion.* Diviſez les deux termes de la fraction par leur plus grand commun diviſeur ; la fraction qui en réſultera, ſera réduite à ſa plus ſimple expreſſion ; ainſi la fraction $\frac{10}{15}$ ſera réduite

à ſes plus petits termes, en diviſant ſes deux termes par 5, ce qui donnera $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.

14. PROBLEME. *Trouver le plus grand commun diviſeur de deux nombres.* Diviſez le plus grand par le plus petit; ſi la diviſion eſt ſans reſte, le plus petit ſera le plus grand commun diviſeur cherché; s'il y a un reſte, diviſez le plus petit nombre par le reſte; ſi la diviſion eſt exacte, ce reſte ſera le plus grand diviſeur cherché; s'il y a un ſecond reſte, diviſez le premier reſte par le ſecond, & ainſi ſucceſſivement, le dernier reſte, qui diviſera exactement le reſte précédent ſera le plus grand diviſeur cherché. Si le dernier reſte eſt 1, c'eſt une marque que les deux nombres n'ont d'autre diviſeur commun que l'unité, dans ce cas on les appelle *premiers entr'eux*: ainſi 2 & 3 ſont premiers entr'eux.

EXEMPLE. *Pour avoir le plus grand diviſeur de 10 & de 15.* Je diviſe 15 par 10, le quotient eſt 1 avec un reſte 5; je diviſe 10 par le reſte 5, le quotient eſt exact: donc 5 eſt le plus grand diviſeur de 10 & de 15. En effet, puiſque 5 diviſe 10, il diviſera auſſi $10 + 5 = 15$: or 5 eſt le plus grand nombre qui puiſſe diviſer 10 & 15, ou 10 & $10 + 5$: donc, &c.

15. PROBLEME. *Ajouter enſemble les fractions* $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$; les ayant réduites au même dénominateur (11), nous aurons à ajouter enſemble les fractions $\frac{6}{15}$ & $\frac{10}{15}$; or $\frac{6}{15} + \frac{10}{15} = \frac{16}{15} = 1 + \frac{1}{15}$; c'eſt-à-dire, que, pour avoir la ſomme d'un nombre quelconque de fractions, on doit les réduire au même dénominateur, ſi elles en ont de différens, prendre la ſomme des numérateurs, & lui donner pour dénominateur le dénominateur commun.

COROLLAIRE. Pour ajouter un entier à une fraction, on réduira l'entier à une fraction de même dénominateur (10) que la fraction donnée, pour opérer enſuite comme nous venons de le dire. Si on vouloit ajouter un entier plus une fraction à un autre entier plus une autre fraction, on réduiroit le premier entier & ſa fraction à une ſeule fraction de même dénominateur; on feroit la même réduction pour le ſecond entier & ſa fraction, l'on auroit enſuite à ajouter deux fractions, ce que nous ſavons déja faire : ainſi, pour ajouter $2 + \frac{2}{3}$ à $3 + \frac{1}{2}$, je réduis la premiere quantité à $\frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, & la ſeconde à $\frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$; & j'ai enſuite à ajouter $\frac{8}{3}$ avec $\frac{7}{2}$, ce qui, en réduiſant au même dénominateur, donne $\frac{16}{6} + \frac{21}{6} = \frac{37}{6}$.

16. PROBLEME. *Souſtraire une fraction d'une autre fraction.* Soit $\frac{2}{3}$ à ſouſtraire de $\frac{4}{3}$, on aura $\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$; c'eſt-à-dire, que, pour ſouſtraire une fraction d'une autre fraction de même dénominateur, on prendra la différence des numérateurs, qu'on diviſera par le dénominateur commun. Si les fractions ne ſont pas de même dénominateur, on les y réduira, & l'on opérera enſuite comme nous venons de le dire. Pour ſouſtraire une fraction d'un entier, on réduira l'entier en une fraction de même dénominateur que la fraction à ſouſtraire, pour opérer enſuite comme nous venons de le dire : ainſi $5 - \frac{2}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2}{3} = \frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3}$.

Si on vouloit ſouſtraire un entier joint à une fraction d'un autre entier joint à une autre fraction, on réduiroit d'abord le premier entier & ſa fraction en une ſeule fraction de même dénominateur; on feroit la même choſe pour le ſecond entier & ſa fraction; l'on auroit enſuite une fraction

à ſouſtraire d'une autre fraction : opération qui n'a maintenant aucune difficulté.

17. PROBLEME. *Multiplier une fraction par une fraction.* Multipliez le numérateur du multiplicande par celui du multiplicateur, vous aurez le numérateur du produit ; multipliez enſuite le dénominateur du multiplicande par celui du multiplicateur, vous aurez le dénominateur du produit : *par exemple*, $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ : en effet, ſi j'avois à multiplier $\frac{2}{3}$ par 4, je prendrois $\frac{2}{3}$ quatre fois, ce qui donneroit $\frac{8}{3}$ ; or je ne dois pas multiplier $\frac{2}{3}$ par 4, mais par $\frac{4}{5}$, c'eſt-à-dire, par la cinquiéme partie de quatre ; j'ai donc multiplié par un nombre 5 fois trop grand, & le produit $\frac{8}{3}$ eſt 5 fois trop grand ; pour le rendre 5 fois plus petit, je rends le dénominateur 5 fois plus grand, ou, ce qui revient au même, je multiplie le dénominateur par 5, & le vrai produit cherché eſt $= \frac{8}{15}$.

Il eſt aiſé de voir ; 1°. que, pour multiplier une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, il ſuffit de multiplier le numérateur de la fraction par l'entier : ainſi $3 \times \frac{2}{5}$, ou $\frac{3}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = \frac{2}{5} \times 3$ : 2°. que, pour multiplier un entier joint à une fraction, il ſuffit de réduire le multiplicande à une ſeule fraction ; on fait la même choſe pour le multiplicateur, lorſque celui-ci eſt un entier joint à une fraction, pour opérer enſuite, comme nous venons de le dire ; 3°. que, pour réduire une fraction de fraction à une fraction, il faut ſe ſervir de la multiplication : pour ſavoir combien valent, *par exemple*, les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{9}$ d'un écu, il faut multiplier $\frac{4}{9}$ par $\frac{3}{7}$, le produit $\frac{12}{63}$ donnera les $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{9}$ d'un écu, & ce produit étant multiplié par $\frac{2}{3}$ donnera $\frac{24}{189}$ d'un écu ; 4°. que le produit d'une fraction

par une autre fraction plus petite que l'unité, doit être plus petit que le multiplicande ; puiſque, ſi l'on doit multiplier par $\frac{2}{3}$, *par exemple*, on doit ſeulement prendre les $\frac{2}{3}$ du multiplicande.

18. PROBLEME. *Diviſer la fraction* $\frac{2}{3}$ *par la fraction* $\frac{4}{5}$. Multipliez le numérateur du dividende par le dénominateur du diviſeur, pour avoir le numérateur du quotient ; multipliez enſuite le dénominateur du dividende par le numérateur du diviſeur, vous aurez le dénominateur du quotient, qui ſera $= \frac{10}{12}$ : en effet, pour diviſer $\frac{2}{3}$ par 4, ou, pour prendre le $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$, il faudroit trouver une fraction 4 fois plus petite que $\frac{2}{3}$ ; mais on rendroit la fraction $\frac{2}{3}$ quatre fois plus petite, en multipliant ſon dénominateur par 4, ce qui donneroit $\frac{2}{12}$ ; or ce n'eſt pas par 4 qu'on doit diviſer, mais par $\frac{4}{5}$, c'eſt-à-dire, par la cinquiéme partie de 4 ; donc le diviſeur, dont on s'eſt ſervi, étant 5 fois trop grand, le quotient eſt 5 fois trop petit ; on doit donc le rendre 5 fois plus grand, ce qu'on fera en multipliant le numérateur 2 par 5, pour avoir $\frac{10}{12}$, vrai quotient cherché.

19. REMARQUE. Pour diviſer une fraction $\frac{2}{3}$, *par exemple*, par un entier 3, on ſuppoſera $3 = \frac{3}{1}$, & l'on aura une fraction à diviſer par une autre fraction. Dans l'exemple propoſé le quotient eſt $\frac{2}{11}$ ; & l'on trouveroit la même choſe, en ſe contentant de multiplier le dénominateur du dividende par l'entier. Si l'on avoit un entier joint à une fraction à diviſer par un entier, ou par un entier joint à une fraction, on réduiroit le dividende & le diviſeur chacun à une ſeule fraction, & l'on opéreroit enſuite comme nous venons de le dire.

## DES FRACTIONS DÉCIMALES.

20. *Les Fractions décimales ſont des fractions qui ont pour dénominateur l'unité ſuivie d'un ou de pluſieurs zeros.* Ainſi $\frac{3}{10}$, $\frac{35}{100}$ ſont des fractions décimales. Pour ſimplifier, on n'exprime pas le dénominateur ; & quand il y a des entiers joints aux fractions, on les en ſépare par un point, ou par une virgule. *Par exemple*, $25+\frac{3}{10}$ s'écrit ainſi, 25 · 3, ou 25, 3 ; de même $25+\frac{32}{100}=25\cdot 32$, de même $7+\frac{3002}{10000}=7\cdot 3002$. La fraction $\frac{3}{10}$ s'exprime ainſi, 0 · 3 ; la fraction $\frac{35}{100}$ s'exprime ainſi, 0 · 35, en mettant 0 à la place des entiers. Il eſt facile de voir que le premier chiffre après le point repréſente des dixiémes, le ſecond des centiémes, &c. car, *par exemple*, la fraction $0\cdot 352=\frac{352}{1000}=\frac{300}{1000}+\frac{50}{1000}+\frac{2}{1000}=\frac{3}{10}+\frac{5}{100}+\frac{2}{1000}$ ; puiſque, en effaçant le même nombre de 0 au numérateur & au dénominateur d'une fraction, on diviſe ſes deux termes par un même nombre, ce qui laiſſe la fraction de même valeur (10). Il ſuit de-là ; 1°. que la fraction $\frac{3}{10}=\frac{300}{1000}$, ou que $0\cdot 3=0\cdot 300$, ou qu'en général, une fraction décimale reſte de même valeur, quelque nombre de 0 qu'on ajoute au numérateur de cette fraction ; 2°. que ſi les dixiémes, ou les centiémes, &c. manquent, on doit mettre des 0 à la place des chiffres qui manquent : ainſi $\frac{23}{10000}=0\cdot 0023$, parce que les dixiémes & les centiémes manquent *.

* Avec un peu d'attention, il eſt aiſé de s'appercevoir que la valeur des chiffres qui ſont à la droite du point, va en diminuant, en proportion décuple, en allant de gauche à droite, & que les fractions décimales ſont des fractions, dont le dénominateur (ſous-entendu) eſt l'unité ſuivie d'autant de zeros,

PROBLEME. *Réduire une fraction ordinaire en une fraction décimale.* Soit, *par exemple*, la fraction $\frac{3}{5}$ à réduire en une fraction décimale. Ajoutez un 0 au numérateur *, & diviſez enſuite le numérateur par le dénominateur, vous aurez la premiere décimale du quotient; continuez de même s'il y a un reſte, en ajoutant un 0 à ce reſte, & ainſi de ſuite, & vous aurez de nouvelles décimales. Ajoutant donc un 0 à 3, j'ai 30 que je diviſe par 5, le quotient eſt 6; donc $0 \cdot 6$ eſt le vrai quotient cherché. En effet le dividende 3 ayant été multiplié par 10, le quotient de 30 diviſé par 5 eſt 10 fois trop grand: donc on doit le diviſer par 10 pour avoir $\frac{6}{10} = 0 \cdot 6$. Soit la fraction $\frac{2}{3}$ qu'on veut réduire en fraction décimale; j'ajoute 0 à 2, pour avoir 20 que je diviſe par 3, le quotient 6 eſt une premiere décimale. Je multiplie le diviſeur par le quotient, ôtant le produit 18 du dividende, il reſte 2, auquel ajoutant 0, & diviſant de même par 3, j'ai encore 6 pour quotient; & continuant de même, je trouve toujours 6 pour quotient, de ſorte qu'il eſt impoſſible d'avoir une fraction décimale terminée, qui exprime la valeur de $\frac{2}{3}$. $0 \cdot 666$, &c.

On connoît qu'il eſt impoſſible de trouver une fraction décimale exacte, lorſqu'on voit reparoître les mêmes chiffres du quotient, & dans le même ordre; or les mêmes chiffres reparoiſſent dans ce cas, pour le plus tard, au rang déſigné par le dénominateur de la fraction: *par exemple*, ſi on vouloit réduire en fraction décimale la fraction $\frac{4}{7}$,

qu'il y a de chiffres après le point; leſquels chiffres forment le numérateur.

* C'eſt comme ſi on multiplioit le numérateur par 10.

on auroit 0 · 571428, & enſuite 571 &c. l'infini.

On peut voir maintenant que, quand après une diviſion il y a un reſte, pour avoir un quotient plus exact, il faut ajouter au quotient ce reſte réduit en décimales : *par exemple*, ſi j'ai à diviſer 32 par 7, le quotient ſera 4 avec un reſte $\frac{4}{7}$, ou 4·571 &c.

Quand on n'a pas beſoin d'une ſi grande préciſion, on peut négliger les milliémes, & quelquefois même les centiémes : ainſi, dans l'exemple précédent, ſi on n'a pas beſoin d'une grande préciſion, on peut ſuppoſer $\frac{32}{7} = 4 \cdot 57$, ou $4 \cdot 6$, en augmentant d'une unité le dernier chiffre qu'on ne néglige pas, ce que l'on fait toutes les fois que les deux chiffres ſuivans ſurpaſſent 50 *; en effet 0 · 071 valent plus de la moitié d'un dixiéme : ainſi, en augmentant le chiffre 5 d'une unité, l'erreur eſt moins conſidérable que ſi on ne faiſoit pas cette augmentation. Au reſte, en négligeant un nombre de chiffres quelconque, l'erreur n'eſt jamais égale à l'unité du dernier chiffre qu'on ne néglige pas ; *par exemple*, ſi j'ai la fraction décimale 5 · 3999 &c. à l'infini, en négligeant tous les chiffres qui ſuivent 3, j'aurai 5 · 3 ; or $5 \cdot 3 = \frac{3}{10}$, & $0 \cdot 0999 = \frac{999}{10000} < \frac{1}{10}$, puiſqu'en ajoutant 1 à 999, j'aurai $\frac{1000}{10000} = \frac{1}{10}$ ; le même raiſonnement a lieu, quelque nombre de chiffres qu'on néglige.

PROBLEME. *Ajouter & ſouſtraire les fractions décimales.* Soient les fractions décimales 35 · 702, 303 · 7, 2 · 25, dont on demande la ſomme, écrivez ces fractions, enſorte que les unités ſoient ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, &c. les dixiémes ſous les dixiémes, &c. opérez enſuite, en allant de

* La même choſe a lieu, ſi on négligeoit un ſeul chiffre > 5,

droite à gauche, comme pour les nombres entiers. Ce qui eſt évident, puiſque la valeur des chiffres dans les fractions décimales va en augmentant de droite à gauche en proportion décuple.

35 · 702
303 · 7
2 · 25
341 · 652

Pour ſouſtraire la fraction décimale 25·032 de 32·04, je les diſpoſe de la même maniere, ayant ſoin de mettre la premiere ſous la ſeconde, comme on le voit ici; mais, parce qu'il n'y a aucun chiffre qui ſoit correſpondant à 2, je ſuppoſe o à côté de 4, ce qui, comme nous l'avons dit il n'y a pas long-tems, ne change rien à la valeur de la fraction, faiſant enſuite la ſouſtraction à l'ordinaire, j'ai pour reſte 7 · 008.

32 · 040
25 · 032
7 · 008

PROBLEME. *Multiplier une fraction décimale par une autre.* Multipliez les deux fractions comme ſi c'étoient des nombres entiers, en vous ſouvenant de ſéparer dans le produit autant de décimales qu'il y en a, tant au multiplicande qu'au multiplicateur: ainſi, pour multiplier 7 · 12 par 2 · 3, je multiplie 712 par 23; le produit eſt 16376, dans lequel je ſépare 3 décimales, parce qu'il y en a deux au multiplicande, & une au multiplicateur; de ſorte que le produit cherché eſt 16 · 376. La raiſon de ce procédé eſt facile à appercevoir; car $7 \cdot 12 = \frac{712}{100}$, & $2 \cdot 3 = \frac{23}{10}$; or $\frac{712}{100} \times \frac{23}{10} = \frac{16376}{1000} = 16 \cdot 376$. Si le produit ne renfermoit pas un nombre ſuffiſant de chiffres, il faudroit ajouter vers la gauche autant de o qu'il ſeroit néceſſaire, pour qu'on eût autant de décimales au produit, qu'il y en a tant au multiplicande qu'au multiplicateur: *par exemple*, pour multiplier o · 25 par o · 03, après avoir trouvé le produit 75 de 25 par 3, je m'apperçois que ce produit

duit ne contient que deux chiffres, tandis que je dois avoir 4 décimales : ainſi j'ajoute deux o en cette ſorte, o · 0075, & j'ai le vrai produit cherché : en effet o · 25 × o · 03 = $\frac{25}{100} \times \frac{3}{100} = \frac{75}{10000}$ = o · 0075.

PROBLEME. *Diviſer une fraction décimale :* par exemple, *4 · 444 par une autre fraction décimale 2 · 2.* Diviſez le dividende par le diviſeur, comme ſi c'étoient des nombres entiers ; mais ſéparez dans le quotient autant de décimales qu'il y en a plus au dividende qu'au diviſeur : ainſi, en diviſant 4444 par 22, je trouve pour quotient 202 ; je ſépare 2 décimales, parce qu'il y en a deux de plus au dividende qu'au diviſeur ; de ſorte que le quotient cherché eſt 2 · 02. Pour comptendre la raiſon de cette méthode, on fera attention que 4 · 444 = $\frac{4444}{1000}$, & que 2 · 2 = $\frac{22}{10}$ ; la premiere fraction diviſée par la ſeconde, donne $\frac{4444 \times 10}{22 \times 1000}$ (18) = $\frac{4444}{2200}$ : or $\frac{4444}{22}$ = 202 ; mais, parce que le véritable diviſeur 2200 eſt cent fois plus grand que 22, le quotient 202 eſt cent fois trop grand, il faut donc le diviſer par 100 pour avoir le vrai quotient $\frac{202}{100}$ = 2 · 02.

$$\begin{array}{r|l} 4444 & \cdot\ 22 \\ \hline & 2 \cdot 02 \end{array}$$

Remarquez 1°. S'il y a autant de décimales au dividende qu'au diviſeur, le quotient ſera ſans décimales ; 2°. S'il y a moins de décimales au dividende qu'au diviſeur, on doit ajouter au dividende quelques o, pour avoir au moins autant de caracteres au dividende qu'au diviſeur ; & même, ſi l'on veut avoir quelques décimales au quotient, il eſt néceſſaire d'ajouter à la fin du dividende aſſez de o, pour qu'il y ait plus de caracteres au dividende qu'au diviſeur ; 3°. Si, en diviſant une fraction décimale par une autre, ou

par un entier on trouve un reſte, on pourra continuer d'opérer ſur ce reſte comme ſur un reſte de diviſion ordinaire, en ajoutant 0 à chaque nouveau reſte.

## *DE L'ÉVALUATION DES FRACTIONS.*

21. Si l'on vouloit évaluer la fraction décimale de toiſe 0 · 72, on multiplieroit cette fraction par 6, pour avoir des pieds, parce que la toiſe vaut 6 pieds, ce qui donneroit 4 · 32 ; c'eſt-à-dire, 4 pieds, plus la fraction 0 · 32 de pied. Multipliant celle-ci par 12 pour avoir des pouces, je trouve 3 · 84, c'eſt-à-dire, trois pouces plus 0 · 84 de pouce ; ainſi la fraction propoſée vaut 4 pieds 3 pouces plus 0 · 84 de pouce. Pour évaluer la fraction 0 · 02 de toiſe, je la multiplie par 6, & j'ai 0 · 12 de pied ; multipliant celle-ci par 12, j'ai 1 · 44 de pouce, c'eſt-à-dire, 1 pouce & 0 · 44 de pouce ; en multipliant cette derniere par 12, j'aurois des lignes. Mais pour évaluer la fraction $\frac{3}{5}$ d'un ſol, comme le ſol vaut 12 deniers ; on multiplieroit le numérateur 3 par 12, pour avoir $\frac{36}{5}$ de denier, ou $7^{d} + \frac{1}{5}$ de denier. La fraction $\frac{5}{13}$ de livre deviendra, en multipliant 5 par 20, $\frac{100}{13}$ de ſol $= 7^{s} + \frac{9}{13}$. Multipliant celle-ci par 12, l'on auroit $\frac{108}{13}$ de denier $= 8^{d} + \frac{4}{13}$ de denier, de ſorte que la fraction $\frac{5}{13}$ de livre vaut $7^{s}\ 8^{d} + \frac{4}{13}$ de denier.

## *DE LA MULTIPLICATION ET DIVISION des Nombres Complexes.*

22. PROBLEME. *On demande combien coûteront 3 toiſes 2 pieds d'une muraille, à* 2 liv. 3 ſ. *la toiſe.* Je réduis les toiſes en pieds, en multipliant 3 par

6, à cauſe que la toiſe vaut 6 pieds; au produit 18 j'ajoute 2 pour avoir le nombre total 20 pieds; je réduis les livres en ſols, en multipliant 2 par 20; au produit 40 j'ajoute 3, & j'ai 43. En multipliant 43 ſols par 20, le produit 860 ſols marque combien coûteroient 20 pieds, ſi chaque pied coûtoit 43 ſols; mais ce n'eſt pas le pied qui coûte 43 ſols, c'eſt la toiſe qui vaut 6 pieds : ainſi le pied ne coûte que la ſixiéme partie de 43 ſols, & 20 pieds, ou 3 toiſes 2 pieds ne coûteront auſſi que la ſixiéme partie de 860 ſols : on doit donc diviſer 860 par 6, le quotient ſera 143 ſols avec un reſte 2 ſols; ce reſte vaut 24 deniers, dont la ſixiéme partie eſt 4 deniers; en les ajoutant au quotient, nous aurons 143 ſols 4 deniers, ou en réduiſant en livres, ce qui ſe fait en diviſant 143 par 20, 7 liv. 3 ſ. 4 d.

Remarquez 1°. qu'en multipliant 43 ſols par 20, on a conſidéré le multiplicateur comme un nombre pur & abſtrait, c'eſt-à-dire, comme un nombre qui ne contient que des unités ſimples, & non comme un nombre concret, c'eſt-à-dire, qui renferme des unités d'une eſpece déterminée, comme, *par exemple*, des pieds. Car il ſeroit ridicule de multiplier des ſols par des pieds.

2°. Que ſi on avoit demandé le prix de 20 toiſes, à 2 liv. 3 ſols la toiſe, on auroit trouvé pour réſultat 860 ſols, ou 43 liv., & l'on auroit pas eu beſoin de faire la diviſion par 6.

3°. Qu'il faut dans ces ſortes de queſtions réduire le multiplicande & le multiplicateur chacun à ſa plus petite eſpece, faire enſuite la multiplication à l'ordinaire, & diviſer le produit par le nombre qui exprime combien de fois la grande eſpece du multiplicateur contient la petite : ainſi ſi

le multiplicateur avoit contenu des pouces, on auroit réduit le multiplicateur en pouces : de même ſi le multiplicande avoit contenu des deniers, on l'auroit réduit en deniers ; après l'opération on auroit diviſé le produit par 72, parce que la toiſe vaut 72 pouces, on auroit enſuite réduit les deniers en ſols, & les ſols en livres. Quant au multiplicande, c'eſt la nature ſeule de la queſtion qui peut le faire connoître. Dans l'exemple propoſé il eſt aiſé de voir que le multiplicande eſt l'argent qu'on cherche au produit.

Seconde Méthode. On réduira chaque nombre à ſa plus baſſe eſpece ; on multipliera enſuite les fractions qui en réſulteront l'une par l'autre, & l'on réduira le produit aux unités, & aux eſpeces établies par l'uſage.

EXEMPLE & DÉMONSTRATION. *L'on demande combien coûteront 25 toiſes 5 pieds 10 pouces, à* 3 liv. 10 ſ. 6 d. *la toiſe.* Je réduis le multiplicande, ou l'argent en deniers, ce qui me donne 846 deniers; mais un denier eſt la $\frac{1}{240}$ partie de la livre qui vaut 20 ſols, & par conſéquent 240 deniers : ainſi le multiplicande vaut $\frac{846}{240}$ d'une livre. Je réduis le multiplicateur en pouces, & je trouve 1870 pouces; or le pouce eſt la 72^e^ partie de la toiſe ; donc le multiplicateur vaut $\frac{1870}{72}$ d'une toiſe. Multipliant maintenant les numérateurs du multiplicande & du multiplicateur l'un par l'autre, auſſi bien que les dénominateurs, le produit cherché eſt $\frac{1581020}{17280}$, fraction de livre.

Pour réduire donc cette fraction aux eſpeces uſitées, ou pour évaluer cette fraction, je diviſe le numérateur par le dénominateur, & je trouve 91 avec le reſte 9540, ou $\frac{9540}{17280}$. Les 91 ſont des

unités ou des livres. Pour évaluer le reſte qu'on vient de trouver, je multiplie le numérateur 9540 par 20, ce qui réduit ce reſte en ſols ; & diviſant le produit 190800 par 17280, je trouve 11 ſols avec le reſte 720, ou $\frac{720}{17280}$ d'un ſol, qu'on réduira en deniers, en multipliant 720 par 12, & diviſant le produit 8640 par 17280, ce qui donnera $\frac{8640}{17280}$ qui ne vaut pas un denier (il vaut la moitié d'un denier) : ainſi on pourra le négliger, & le produit cherché ſera 91 liv. 11 ſols.

23. PROBLEME qui contient la diviſion des nombres complexes. *Deux toiſes 5 pieds ayant coûté* 18 liv. 14 ſ. *quel eſt le prix de la toiſe ?* Je réduis 18 liv. 14 ſ. en ſols, pour avoir 374 ſols ; je réduis de même 2 toiſes 5 pieds en pieds, pour avoir 17 pieds, & diviſant 374 par 17, j'ai 22 pour quotient, c'eſt-à-dire, que chaque pied vaut 22 ſols, ou 1 liv. 2 ſ. mais la toiſe vaut 6 pieds ; donc la toiſe vaut 6 fois 1 liv. 2 ſ. ou 6 liv. 12 ſ.

Il eſt aiſe de remarquer 1°. qu'en diviſant par 17, ou en prenant la 17e. partie du dividende, l'on a conſidéré le diviſeur comme un nombre pur, parce qu'il ſeroit ridicule de diviſer des ſols par des pieds ; en ſecond lieu, qu'après la diviſion on doit multiplier le quotient par le nombre qui exprime combien de fois la grande eſpece du diviſeur contient la petite.

AUTRE EXEMPLE. *Deux toiſes 5 pieds ayant coûté* 18 liv. 15 ſ. *quel ſera le prix de la toiſe ?* Dix-huit livres quinze ſols valent 375, qu'il faudra diviſer par 17 pieds = 2 toiſes 5 pieds, le quotient ſera 22 avec 1 de reſte, qui donnera la fraction $\frac{1}{17}$, de ſorte que le quotient entier ſera 22 ſ. + $\frac{1}{17}$ de ſols, qui, étant multiplié par 6, donnera 132 ſ. plus

$\frac{6}{17}$ de sol $=$ 6 liv. 12 s. 4 d. $+\frac{4}{17}$ deniers, en évaluant en deniers la fraction $\frac{6}{17}$ de sol.

On pourra trouver le même résultat par la méthode suivante; pour cela on n'a qu'à multiplier le dividende par le nombre qui désigne combien de fois la grande espece du diviseur contient la petite, & diviser le produit par le diviseur. Ayant donc multiplié 375 par 6, je divise le produit 2250 par 17, & j'ai pour quotient 132 sols $+\frac{6}{17} =$ 6 liv. 12 s. 4. d. en négligeant la fraction $\frac{4}{17}$ qui ne vaut pas le quart d'un denier.

Troisiéme méthode. Cette méthode consiste à réduire le dividende & le diviseur en fraction, pour faire ensuite la division à l'ordinaire : l'exemple suivant suffira pour la faire comprendre.

PROBLEME. *Vingt-cinq toises 5 pieds 10 pouces ayant coûté* 91 liv. 11 s. *quel sera le prix de la toise?* Il est visible qu'il faut diviser 91 liv. 11 s. par 25 toises 5 pieds 10 pouces, & que le quotient donnera le résultat cherché. Réduisant le dividende en une fraction de livre, & le diviseur en une fraction de toise, & faisant attention qu'un sol est un $\frac{1}{20}$ de livre, qu'une livre est $=\frac{20}{20}$ de livre, & qu'un pouce vaut $\frac{1}{72}$ de toise. on aura à diviser $\frac{1831}{20}$ par $\frac{1870}{72}$, le quotient donnera $\frac{131832}{37400}$, fraction de livre, qui, étant évaluée, donne 3 liv. 10 s. 5 d. $+\frac{36680}{37400}$ d'un denier.

A l'égard du dividende & du diviseur, c'est la nature de la question qui doit le faire connoître dans les exemples ci-dessus; il étoit évident que l'argent devoit être le dividende, & que l'on cherchoit de l'argent au quotient.

## DE L'ALGEBRE.

24. L'*Algebre* n'eſt autre choſe que la ſcience de la grandeur exprimée par des caracteres, dont la ſignification eſt indéterminée : telles ſont les lettres de l'alphabet, qui n'ayant aucune ſignification par elles-mêmes, peuvent repréſenter toutes ſortes de quantités, nombres, mouvemens, &c. Les quantités précédées du ſigne + ſont appellés *poſitives*; celles qui ſont précédées du ſigne — ſont dites *négatives*; elles ne ſont pas moins réelles que les *poſitives*, mais elles ſont priſes dans un ſens oppoſé : *par exemple*, le bien que l'on poſſede étant poſitif, les dettes que l'on a ſeront des quantités négatives. De ſorte que ſi l'on poſſede 10000 liv. & qu'on doive 2000 liv. c'eſt comme ſi l'on avoit + 10000 liv. — 2000 liv. = + 8000 liv.

Sur quoi l'on peut remarquer que les quantités négatives détruiſent les poſitives ; ici, *par exemple*, la dette — 2000 liv. a détruit + 2000 liv. or, ſi on ajoutoit 0 à + 10000 liv. on auroit 0 + 10000 liv. = 10000 liv. donc une quantité négative, quant à ſon effet ſeulement, & non abſolument en elle-même, eſt plus petite que 0, puiſque 0 ajouté à une quantité poſitive, ne la diminue pas comme fait la quantité négative.

Les quantités qui n'ont aucun ſigne, ſont cenſées précédées du ſigne +, & ſont par conſéquent *poſitives* : ainſi $+b = b$, $a = +a$ : mais le ſigne — n'eſt jamais ſous-entendu. Pour marquer qu'une quantité $a$ eſt multipliée par une quantité $b$, on écrit l'une à côté de l'autre, ou bien on met un point entre deux, ou, encore, on indique le produit par le ſigne × ; de ſorte que le produit de $a$

par $b = a \times b = a \cdot b = ab$ ; donc si $a = 3$ & $b = 5$, on aura $ab = 3 \times 5 = 15$ : si $a = 7$ & $b = 10$, on aura $ab = 70$. Pour multiplier $a$ par $a$, on écrit $aa$, ou $a^2$ ; pour multiplier $a$ par $aa$, ou par $a^2$, on écrit $a^3$. Le chiffre 2 marque dans le premier cas que $a$ doit être écrit 2 fois, le chiffre 3, dans le ſecond cas, exprime le nombre de fois qu'on doit écrire $a$ ; de ſorte que ſi $a = 3$, on aura $aaa = a^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ ; car $3 \times 3 = 9$, & $9 \times 3 = 27$ ; de même, $a^7 = aaaaaaa$. Lorſqu'on veut prendre une lettre $a$ un certain nombre de fois, *par exemple*, 5 fois, on écrit 5 devant $a$, en cette maniere, $5a$ ; pour prendre $a$ deux fois, j'écris $2a$. Les chiffres qui ſont à la gauche des lettres, ſont appellés *coefficiens* ; *par exemple*, dans l'expreſſion $5a$, 5 eſt le coefficient de $a$. Les chiffres qui ſont à la droite, ſont appellés *expoſans*. Si une lettre n'a point de coefficient, l'unité eſt cenſée ſon coefficient ; de ſorte que $a = 1a$. Comme auſſi quand une lettre n'a pas d'expoſant exprimé, l'unité eſt cenſée ſon expoſant : ainſi $a = a^1 = 1a^1$. Il y a une grande différence entre l'*expoſant* & le *coefficient*, *par exemple*, $2a$ eſt une quantité bien différente de $a^2$ ; car ſuppoſons $a = 5$, on aura $2a = 2$ fois $5 = 10$ ; mais $a^2 = aa = a \times a = 5 \times 5 = 25$ : de ſorte que $2a$ marque la ſomme de $a$ & de $a$, & $a^2$ indique le produit de $a$ par $a$ ( l'expoſant doit être un peu au-deſſus de la lettre qu'il affecte ).

Les quantités qui ne ſont pas jointes à d'autres quantités par le ſigne + ou — ſont appellées *monomes* : telles ſont les quantités $+ 5a$, $+ ab$, $7ad$ ; mais, ſi deux quantités ſont jointes enſemble par les ſignes + ou —, on a ce qu'on appelle un *bi-*

*nome* : $a + d$, $2a - 3ed$ ſont des binomes. Si trois quantités ſont jointes enſemble par le ſigne + ou —, l'on a un *trinome*; un *quatrinome*, s'il y en a 4, &c. En général on appelle *polinome* l'aſſemblage de pluſieurs quantités jointes enſemble par les ſignes + ou —; chacune de ces quantités qui compoſent le polinome, eſt appellée *terme*: ainſi dans le trinome $a + 3d - 2cd$, $a$, $3d$, $2cd$ ſont des termes.

Les quantités algébriques ſont dites *ſemblables*, lorſque ces quantités contiennent les mêmes lettres, ni plus ni moins écrites le même nombre de fois: ainſi $3a$ & $2a$ ſont des quantités ſemblables auſſi bien que $3ad$ & $-5ad$; mais $3a$ & $2a^2$ ne ſont pas ſemblables, parce que $2a^2 = 2aa$, ou parce que $a$ eſt écrit 2 fois dans l'une, & 1 fois ſeulement dans l'autre.

25. PROBLEME. *Etant donné un polinome qui contienne des termes ſemblables, faire la réduction.* Si les quantités ſemblables ont le même ſigne, ajoutez leurs coefficiens; ſi elles ont des ſignes différens, ôtez le plus petit coefficient du plus grand, écrivez enſuite la ſomme ou la différence de ces quantités, & la réduction ſera faite. *Par exemple*, dans le trinome $2a + 2d + 5a$, les termes $2a$ & $5a$ étant ſemblables, j'ajoute 2 avec 5, & j'ai la ſomme $7a$; de ſorte que le trinome propoſé ſe réduit à la quantité $7a + 2d$. Si j'avois $a + d + 2a$, j'ajouterois 2 avec 1 (coefficient ſous-entendu de $a$), pour avoir $3a + d$. Si j'avois le trinome $2a + d - 7a$, je retrancherois 2 de 7, pour avoir $d - 5a$. Il eſt viſible que quand les quantités ſemblables ont différens ſignes, & des coefficiens égaux, elles ſe détruiſent: ainſi $2a + d - 2a = d$; s'il y avoit pluſieurs quantités ſemblables, les unes *po-*

*ſitives*, les autres *négatives*, on prendroit la ſomme des coefficiens des poſitives, on feroit la même choſe pour les négatives, l'on retrancheroit la plus plus petite ſomme de la plus grande, pour écrire le reſte avec le ſigne de la plus grande ſomme. Ainſi, pour faire la réduction des termes ſemblables du quintinome $3a + d - 2a - 3d + 7a$, je prends la ſomme 10 des coefficiens des $a$ poſitifs, de laquelle je rettanche 2, coefficient de la quantité négative $-2a$, j'ôte enſuite le coefficient 1 de $d$ du coefficient 3 de $-3d$, & j'ai, toute réduction faite, la quantité $8a - 2d$.

26. PROBLEME. *Ajouter & ſouſtraire les quantiés algébriques.* Pour ajouter la quantité $b$ à la quantité $c$, on écrira $b + c$; pour ajouter enſemble $b$ & $-d$, on écrit $b - d$, c'eſt-à-dire, que l'on ajoute les quantités algébriques, en les écrivant les unes à côté des autres avec leurs ſignes. On voit facilement que $b + c$ eſt la ſomme de $b$ & de $c$ : on ne voit pas avec la même facilité que $b - d$ ſoit la ſomme de $b$ & de $-d$, mais il ne faut pas confondre augmenter avec ajouter; quand un homme ajoute une dette de 1000 liv. à ſon bien que je ſuppoſe de 10000 liv. il diminue réellement ſon bien de 1000 liv. ainſi l'on ne doit pas être ſurpris ſi $b - d < b$.

Pour ſouſtraire une quantité algébrique d'une autre, il faut ſeulement changer le ſigne de la quantité qu'on ſouſtrait : *par exemple*, ſi de $+5a$, je veux ſouſtraire $+2a$, j'écrirai $5a - 2a = 3a$; de même pour ſouſtraire 5 de 12, j'écris $12 - 5 = 7$. Mais pour ſouſtraire $7 - 2$ de 12, j'écris $12 - 7 + 2 = 7$ : car, ſi j'écrivois ſeulement $12 - 7$, j'ôterois 2 de trop, puiſque je ne veux pas ſouſ-

traire 7, mais seulement 7 — 2, ou 5; donc, après avoir écrit 12 — 7, je dois ajouter + 2 pour avoir la différence cherchée = 7, comme cela doit être. La raison pour laquelle on change le signe — en +, est facile à saisir, c'est qu'on ne peut soustraire une quantité négative, qu'en ajoutant une quantité positive, comme on ne peut soûstraire une quantité positive qu'en introduisant une quantité négative : ainsi, pour soustraire la quantité — $d$ de la quantité $a - d$, il faut écrire $a - d + d = a$, autrement on ne soustrairoit pas $-d$.

27. PROBLEME. *Multiplier les quantités algébriques les unes par les autres.* Pour multiplier $a$ par $b$, on écrit, ainsi que nous l'avons déjà dit, $a$ à côté de $b$ pour avoir le produit $ab$. Si on avoit $2a$ à multiplier par $d$, on écriroit $2ad$ : en effet le produit de $a$ par $d$, étant $ad$, il est évident que, si le multiplicande devient double de ce qu'il étoit, le produit sera aussi double : donc $2a \times d = 2ad$, mais, si le multiplicateur devenoit triple de ce qu'il étoit, le produit devroit être triple : donc $2a \times 3d = 6ad$ : donc il faut dans la multiplication algébrique multiplier les coefficiens l'un par l'autre, en se souvenant qu'un terme qui n'a point de coefficient exprimé a l'unité pour coefficient : c'est d'ailleurs ce qui est évident; car les coefficiens sont des nombres, & par conséquent on doit dans leur multiplication suivre les regles de la multiplication des nombres. Si on avoit à multiplier $b^1$ par $b^2 = bb$, on écriroit $b^3$, en ajoutant l'exposant 1 du multiplicande, avec l'exposant 2 du multiplicateur : ainsi $d \times d^3 = d^4$, en se souvenant que l'exposant de $d$ est 1 : en effet $d^3 = ddd$; or $d \times ddd = dddd = d^4$. Donc, pour multiplier une lettre par la même

lettre, il suffit d'ajouter à l'exposant du multicande celui du multiplicateur, & de donner à cette lettre un exposant égal à la somme des deux exposans : ainsi $a^7 \times a^5 = a^{12}$.

Pour trouver les regles des signes, soit proposé de multiplier $5 - 2$ par $4 - 2$, je multiplie d'abord 5 par 4 (en algébre on commence la multiplication par la gauche), le produit est 20, que j'écris comme on le voit ; mais, parce que je ne dois pas multiplier 5 par 4, mais seulement 5 diminué de 2, ou $5 - 2$, j'ai pris 2 quatre fois de trop, de sorte que le produit 20 est trop grand de 8 ; donc je dois le diminuer de cette quantité, en écrivant — 8 à côté : de sorte que $20 - 8 = 12$ est le produit de $5 - 2$ ou de 3 par 4. Je remarque maintenant que je ne devois pas multiplier $5 - 2$ par 4, mais seulement par 4 diminué de 2 ou par 2 ; j'ai donc pris $5 - 2$ deux fois de trop. Pour détruire cette erreur, je multiplie $5 - 2$ par 2 le produit est $10 - 4$, que je retranche de $20 - 8$, pour avoir $20 - 8 - 10 + 4 = 6$, vrai produit.

$$\begin{array}{r} 5 - 2 \\ \hline 4 - 2 \\ \hline 20 - 8 - 10 + 4 = 6 \end{array}$$

COROLLAIRE. De-là il suit que $+ \times + $, ou $- \times - = +$, & que $+ \times -$, ou $- \times + = -$, car 20 résulte de la multiplication de $+5 \times +4$, $-8$ résulte de $-2 \times +4$, $-10$ résulte de $+5 \times -2$, & $+4$ résulte de $-2 \times -2$. Donc, lorsque le signe du multiplicande est le même que celui du multiplicateur, le produit doit avoir le signe $+$ ; mais il aura le signe $-$, si le signe du multiplicande est différent de celui du multiplicateur : d'ailleurs, lorsque le multiplicateur a le signe $+$, on prend le multiplicande autant de fois qu'il

y a d'unités dans le multiplicateur : ainſi le produit eſt égal au multiplicande pris un certain nombre de fois ; donc $-2a \times +3d = -6ad$ : mais pour multiplier par —, il faut faire le contraire, c'eſt-à-dire, qu'il faut retrancher le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur ; par conſéquent ſi le multiplicande eſt poſitif, le produit ſera compoſé d'une quantité poſitive retranchée un certain nombre de fois ; & le produit ſera négatif : mais ſi le multiplicande a le ſigne —, le produit ſera compoſé d'une quantité négative, ſouſtraite un certain nombre de fois : ainſi le produit ſera poſitif. D'autre côté $3 - 3$ étant multiplié par 2, donnera évidemment $6 - 6 = 0$ ; or $-3 \times 2 = -2 \times 3$, viſiblement : donc $3 - 3 = 0$ étant multiplié par $-2$. dennera $-6+6=0$ : donc, &c.

EXEMPLE. *Soit propoſé de multiplier* $3a^2x + 2p$ *par* $a - 2x$. Ayant écrit le multiplicateur au-deſſous du multiplicande, je multiplie le premier terme $3a^2x$ du multiplicande par le premier terme $a$ du multiplicateur, & j'écris le produit $3a^3x$ ; je multiplie de même le ſecond terme du multiplicande par le premier du multiplicateur, ce qui me donne $+2ap$, en multipliant d'abord 2 par le coefficient 1 de $a$, & enſuite $p$ par $a$ ; je multiplie de nouveau le multiplicande entier par $-2x$, ſecond terme du multiplicateur, & j'écris de ſuite les produits $-6a^2x^2$, $-4px$ & j'ai le produit total demandé.

$$\begin{array}{r} 3a^2x + 2p \\ a - 2x \\ \hline 3a^3x + 2ap - 6a^2x^2 - 4px \end{array}$$

REMARQUES. 1°. Pour multiplier une quantité algébrique par une autre, il faut multiplier tout le

multiplicande par chaque terme du multiplicateur, & ajouter tous les produits pour avoir le produit total. 2°. Il eſt indifférent de multiplier $a$ par $p$, ou $p$ par $a$; car le produit $ap = pa$, par la même raiſon que $5 \times 4 = 4 \times 5 = 20$. De même $apd = pad$; car $ap = pa$, donc $ap \times d = pa \times d$. Soit $a = 2$, $p = 3$, $d = 4$, on aura $apd = 2 \cdot 3 \cdot 4$ (le point indique la multiplication) $= 3 \cdot 2 \cdot 4$; car $2 \cdot 3 = 6$, & $6 \times 4 = 24 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 4 \cdot 2$. de même $apd = adp = pad = pda = dap = dpa$, de ſorte qu'il eſt indifférent quelle lettre on mette la premiere dans le produit, néanmoins, pour plus de clarté, il eſt à propos de ſuivre l'ordre alphabétique; ainſi en multiplicnt $2p$ par $a$, on écrira $2ap$, & non pas $2pa$. 3°. Quelquefois on ſe contente d'indiquer la multiplication, ſans la faire: ainſi $(a+b) \times (a+d)$ ou $(a+b)(a-d)$ indique qu'il faut multiplier $a + b$ par $a - d$; mais, ſi on écrivoit $a+b \times (a-d)$ ou $a+b\ (a-d)$, cela ſignifieroit qu'il faut ajouter à la quantité $a$ le produit de $b$ par $a-d$.

## DE LA DIVISION.

28. *Diviſer une quantité par une autre, c'eſt chercher combien de fois la premiere qu'on appelle le* Dividende *contient la ſeconde, ou le diviſeur.* La quantité qui réſulte de cette opération eſt appellée *quotient.* En faiſant attention à la nature de la diviſion, on verra aiſément qu'en *algébre*, comme en *arithmétique*, le produit du diviſeur par le quotient, doit être égal au dividende : donc, ſi j'ai à diviſer $ab$ par $a$, ce qu'on peut indiquer : ainſi

$\frac{ab}{a}$, en metant le diviſeur ſous le dividende, en forme de fraction, je dis que le quotient ſera $b$ : en effet, s'il étoit différent, en multipliant le diviſeur $a$ par le quotient, le produit ne pourroit pas être égal au dividende $ab$. De-là il réſulte que pour diviſer un *monome* par un autre *monome*, on doit écrire au quotient les lettres qui ne ſont pas communes au dividende & au diviſeur : ainſi $\frac{ap}{a}$, ou $\frac{pa}{a} = p$, de même $\frac{apd}{a} = pd$, $\frac{apd}{d} = ap$, $\frac{apd}{ad} = p$ ; en effet en multipliant le diviſeur $ad$ par le quotient $p$, on retrouve le dividende $apd$. De même $\frac{a^2}{a} = \frac{aa}{a} = a$, $\frac{a^3}{a^2} = \frac{aaa}{aa} = a$, $\frac{a^5}{a^2} = a^3 = a^{5-2}$, c'eſt-à-dire, que, pour diviſer une lettre par la même lettre, il faut ſouſtraire l'expoſant du diviſeur de celui du dividende ; donc $\frac{a^6}{a^2} = a^4$, $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0 = 1$ ; car, en multipliant le diviſeur $a^5$ par $a^0$, on aura par les regles de la multiplication (27.) $a^{5+0} = a^5$ ; de même en multipliant $a^5$ par 1, on a $1 \times a^5 = a^5$, de ſorte que $a^0 = 1$ ; d'où l'on conclut que toute quantité élevée à l'expoſant 0, eſt $= 1$ : de plus, parce que toute quantité ſe contient elle-même une fois, il eſt évident que $\frac{a^5}{a^5} = 1$ ; $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ ; car la fraction $\frac{a^3}{a^5}$ devient (en diviſant ſes deux termes par $a^3$, ce qui ne change pas ſa valeur) $\frac{1}{a^2}$ ; mais par les regles de la

diviſion il faut ſouſtraire l'expoſant 5 du diviſeur de l'expoſant 3 du dividende ; donc $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ : d'où l'on peut conclure qu'une quantité élevée à un expoſant négatif, eſt égale à l'unité diviſée par cette même quantité élevée au même expoſant rendu poſitif : ainſi $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ( $m$ eſt ici l'expoſant de $a$ ) *. A l'égard des coefficiens, comme ce ſont des nombres, on les diviſera à l'ordinaire : ainſi $\frac{6ap}{2a} = \frac{3ap}{a} = 3p$. En effet, en diviſant par 2 le coefficient 6 de $ap$, on a 3 au quotient ; & en diviſant $ap$ par $a$, on a le quotient $p$ : d'ailleurs $2a \times 3p = 6ap$ qui eſt le dividende. La regle des ſignes eſt celle-ci : le *quotient doit avoir* +, *lorſque les ſignes du dividende & du diviſeur ſont les mêmes ; mais le quotient aura le ſigne* —, *ſi les ſignes du dividende & du diviſeur ſont différens* : ainſi $\frac{+ab}{+a} =$

* On peut toujours faire paſſer une quantité du numérateur au dénominateur & réciproquement en changeant le ſigne de ſon expoſant : ainſi $\frac{1}{a^2} = 1a^{-2} = a^{-2}$, de même $\frac{b}{a^{-2}} = ba^2$ : en effet, en diviſant $b = \frac{b}{1}$ par $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, on trouve ( par la regle de la diviſion des fractions, ſelon laquelle on a le quotient, en multipliant le numérateur du dividende par le dénominateur du diviſeur, & le dénominateur du dividende par le numérateur du diviſeur ; regle qui a lieu également pour les nombres & pour les quantités algébriques ) $\frac{b \cdot a^2}{1 \cdot 1} = \frac{ba^2}{1} = ba^2$. En général, $\frac{b}{a^m} = \frac{ba^{-m}}{1} = ba^{-m}$, & $\frac{b}{a^{-m}} = \frac{ba^m}{1} = ba^m$.

$+b$,

$+b$, $\frac{+ab}{-a} = -b$, $\frac{-ab}{+a} = -b$ & $\frac{-ab}{-a} = +b$, sans quoi le produit du diviseur par le quotient ne seroit pas égal au dividende.

PROBLEME. *Diviser une quantité complexe, c'est-à-dire, une quantité composée de plusieurs termes par une quantité incomplexe, ou monome.* Divisez chaque terme du dividende par le diviseur; écrivez les quotiens les uns à côté des autres avec leurs signes, & vous aurez le quotient entier cherché; ainsi pour diviser $5a^2 - 10ad$ par $5a$; je divise d'abord $5a^2$ par $5a$, le quotient est $a$, je l'écris sous le diviseur; je divise ensuite $-10ad$ par $5a$, le quotient est $-2d$ que j'écris à côté de $a$, & j'ai le quotient entier $= a - 2d$: en effet, si on multiplie ce quotient par le diviseur, on aura le dividende.

$$\begin{array}{l|l} 5a^2 - 10ad & 5a \\ \hline & a - 2d \end{array}$$

PROBLEME. *Diviser un polinome par un polinome.* Ordonnez le dividende & le diviseur par rapport à une même lettre, c'est-à-dire, disposez le dividende & le diviseur, de telle maniere que la lettre par rapport à laquelle vous voulez ordonner, se trouve au premier terme avec son plus grand exposant, que le plus haut exposant qui reste se trouve au second terme, & ainsi de suite. Ayant ensuite écrit le diviseur à côté du dividende, comme dans la division des nombres, divisez le premier terme du dividende par le premier du diviseur, écrivez le résultat au quotient, multipliez ensuite le quotient que vous venez d'écrire par le diviseur entier; écrivez le produit sous le dividende, retranchez ce produit du dividende (ce qui se fait en changeant les signes); divisez de même le reste du dividende

s'il y en a ( en diviſant toujours par le premier terme du diviſeur le terme du dividende qui contient le plus haut expoſant de la lettre par rapport à laquelle vous avez ordonné ), & ainſi de ſuite. Soit, *par exemple*, propoſé de diviſer $a^2 - d^2$ par $d + a$, j'ordonne le diviſeur par rapport à la lettre $a$, car le dividende eſt tout ordonné ; diviſant enſuite $a^2$ par $a$, j'écris le quotient $a$ que je multiplie par le diviſeur entier $a + d$, j'écris ſous le dividende le produit $a^2 + ad$,

$$\begin{array}{r|l} a^2 - d^2 & a + d \\ 0 & \\ \hline -a^2 \pm ad & a - d \\ -ad - d^2 & \\ 0 \quad 0 & \\ -ad - d^2 & \\ + \quad + & \end{array}$$

je ſouſtrais ce produit en changeant ſes ſignes, j'écris o ſous $a^2$, qui ſe trouve détruit par $-a^2$, il me reſte $-ad$ que j'écris comme on le voit ici : à côté de ce reſte je deſcends $-d^2$ ; & diviſant $-ad$ par $a$, je trouve $-d$ que j'écris au quotient ; je multiplie enſuite le diviſeur par le quotient $-d$ que je viens d'écrire, le produit eſt $-ad - d^2$ que j'écris ſous le dividende ; je ſouſtrais ce produit en changeant les ſignes, & j'écris o ſous $-ad$, qui eſt détruit par $+ad$ : j'écris de même o ſous $-d^2$, qui eſt détruit par $+d^2$. Si l'on multiplie le diviſeur par le quotient $a - d$, on aura $a^2 + ad - ad - d^2 = a^2 - d^2$, en faiſant la réduction.

Si la lettre par rapport à laquelle on veut ordonner, ſe trouvoit avoir le même expoſant dans pluſieurs termes, on ordonneroit par rapport à une autre lettre.

Lorſqu'il y a des lettres au diviſeur qui ne ſe trouvent pas dans le dividende, l'on ne peut faire la diviſion exactement, dans ce cas on peut ſe contenter de l'indiquer : ainſi, pour marquer le quo-

tient de $a^2$ diviſé par $d$, on écrira $\frac{a^2}{d}$; pour diviſer $ab$ par $cb$, on écrira $\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$, en faiſant la diviſion autant qu'on le peut, ce qui eſt évident, puiſque $cb \times \frac{a}{c} = \frac{cab}{c} = ab$ : c'eſt-à-dire, que le produit du diviſeur, par le quotient, eſt égal au dividende : de même $\frac{a+b}{x}$, indique la diviſion de $a + b$ par $x$.

Voici quelques diviſions pour exercer les Commençans, qui, pour ſe familiariſer avec cette opération,

| Dividende. | Diviſeur. |
|---|---|
| $x^2 - 2px + p^2$ | $x - p$ |
| | $x - p$ |
| | Quotient. |

| Dividende. | Diviſeur. |
|---|---|
| $x^4 + 4x^2p + 4p^2$ | $-x^2 - 2p$ |
| | $-x^2 - 2p$ |
| | Quotient. |

peuvent multiplier deux quantités algébriques quelconques l'une par l'autre, en diviſant le produit par l'une des deux, ils doivent trouver l'autre au quotient.

29. Avant de paſſer plus loin, nous allons donner la méthode de trouver tous les diviſeurs d'une quantité quelconque. Soit la quantité $x^3p + x^2p$, dont on demande tous les diviſeurs. Je diviſe d'abord cette quantité par un de ſes diviſeurs ſimples

$p$, le quotient eſt $x^3 + x^2$, que je diviſe par un de ſes diviſeurs ſimples $x$, pour avoir le quotient $xx + x$, que je puis encore diviſer par $x$, le quotient eſt $x+1$, que je ne puis plus diviſer que par $x+1$, le quotient eſt 1 ; de ſorte que les diviſeurs ſimples ſont $p, x, x, x+1$. Les multipliant 2 à 2, & n'écrivant qu'une fois le même produit, j'ai les diviſeurs doubles $px$, $px+p$, $x^2$, $x^2+x$. Les multipliant enſuite, 3 à 3, j'ai les diviſeurs de trois dimenſions $px^2$, $px^2 + px$, $x^3 + x^2$ ; enfin les multipliant 4 à 4, j'ai $px^3 + px^2$ : de ſorte que les diviſeurs cherchés ſont $p$, $x$, $x+1$, $px$, $px+p$, $x^2$, $x^2+x$, $px^2$, $px^2+px$, $x^3+x^2$, $px^3+px^2$, auxquels on peut joindre l'unité qui eſt un diviſeur de toutes les quantités. La raiſon de ce procédé eſt évidente ; car, ſi la quantité propoſée eſt diviſible par $p$ & par $x$, elle ſera évidemment diviſible par le produit $px$.

*Soit le nombre 30 dont on demande tous les diviſeurs.* On eſſayera de diviſer par 2 autant de fois qu'on le pourra, enſuite par 3, enſuite par 5, & ainſi de ſuite par tous les *nombres premiers* (ce ſont ceux qui n'ont d'autre diviſeur que l'unité & eux-mêmes), on multipliera enſuite les différens diviſeurs, deux à deux, enſuite trois à trois, &c. Diviſant donc 30 par 2, le quotient eſt 15, que je ne puis plus diviſer par 2 ; mais, comme je puis diviſer par 3, je fais la diviſion, & le quotient eſt 5, que je ne puis diviſer que par 5, le quotient eſt 1 ; de ſorte que les diviſeurs ſimples de 30 ſont 2, 3, 5 : les multipliant deux à deux, j'ai les nouveaux diviſeurs 6, 10, 15 ; enfin les prenant trois à trois, j'ai 30 : donc les diviſeurs cherchés ſont 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, j'omets 1 qui eſt diviſeur de tout nombre.

## DES FRACTIONS ALGEBRIQUES.

30 *Soit la fraction* $\frac{b}{d}$ *qui indique qu'on a diviſé l'unité en un certain nombre de parties déſigné par* d, *& que l'on prend un nombre* b *de ces parties.* En ſe rappellant ce que nous avons dit ſur les fractions numériques, on verra aiſément qu'en multipliant ſes deux termes par $x$, la fraction reſtera de même valeur, c'eſt-à-dire, que $\frac{b}{d} = \frac{bx}{dx}$; de même la fraction $\frac{ab}{ad}$ devient $\frac{b}{d}$, en diviſant ſes deux termes par une même quantité $a$. Pour réduire deux fractions $\frac{b}{d}, \frac{x}{p}$ au même dénominateur, on multipliera les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre, & l'on aura les nouvelles fractions $\frac{bp}{dp}, \frac{dx}{dp}$ qui ont un même dénominateur, & qui d'ailleurs ſont de même valeur (voyez les fractions numériques). De même pour réduire les fractions $\frac{b}{d}, \frac{c}{g}, \frac{x}{p}$ au même dénominateur, on multipliera les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs des autres, & l'on aura les nouvelles fractions $\frac{bgp}{dgp}, \frac{cpd}{dgp}, \frac{dgx}{dgq}$. Pour réduire une fraction $\frac{ba}{ad}$ à ſa plus ſimple expreſſion, on diviſera ſes deux termes par leur plus grand commun diviſeur $a$, & l'on aura $\frac{b}{d}$ pour la fraction $\frac{ba}{ad}$ réduite à ſa plus ſimple expreſſion.

31. Mais comme il n'eſt pas toujours facile de trouver le plus grand commun diviſeur de deux quantités, nous allons en donner la méthode, après avoir établi le *lemme* ſuivant.

LEMME. *Si deux quantités* A *plus grande &* B *plus petite ſont exactement diviſibles par une même quantité* p, *je dis que ſi, après avoir diviſé* A *par* B, *il y a un reſte* c, *ce reſte ſera diviſible par* p. Soit le quotient de A diviſé par B $= m$ ; donc $A = m B + c$ ; donc, puiſque A eſt exactement diviſible par $p$, $m B + c$ ſera auſſi exactement diviſible par $p$ ; mais B eſt exactement diviſible par $p$ ; donc ſon multiple $m B$ (le produit d'une quantité $a$ par une quantité $d$ eſt dit *multiple* de $a$, lorſque le multiplicateur eſt un nombre entier $> 1$, & *ſous-multiple*, ſi le multiplicateur eſt plus petit que l'unité. Ainſi $ad$ eſt multiple de $a$, ſi $d = 3$, *par exemple*, & ſous-multiple, ſi $d = \frac{1}{2}$) ſera diviſible par $p$ ; donc $c$ le ſera auſſi.

COROLLAIRE. Parce que B & $c$ ſont exactement diviſibles par $p$, ſi on diviſe B par $c$, enſorte qu'il y ait un reſte $d$, il ſuit du lemme précédent que $d$ ſera exactement diviſible par $p$. De même on pourra diviſer par $p$ le reſte $e$ qu'on trouvera en diviſant $c$ par $d$, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'il ne reſte rien.

COROLLAIRE II. Il peut arriver deux cas, ou le dernier reſte eſt égal à $p$, ou plus grand ; car il ne peut être plus petit, puiſque tous les reſtes ſont exactement diviſibles par $p$, dans le premier cas $p$ ſera le plus commun diviſeur de A & de B, puiſqu'une plus grande quantité ne ſauroit diviſer exactement tous les reſtes, à cauſe qu'elle ne pourroit diviſer exactement le dernier reſte qu'on ſuppoſe $= p$ ; dans le ſecond cas $p$ ſera viſiblement un diviſeur commun, puiſqu'il diviſe exactement le der-

nier reſte ; mais il ne ſera pas le plus grand diviſeur, puiſque A & B pourront être diviſés par le dernier reſte.

REMARQUES. Nous avons diviſé B par $c$, & $d$ par $c$, parce que nous avons ſuppoſé que les reſtes vont en décroiſſant ( ce qui arrive toujours en arithmétique ) ; mais, ſi un reſte $d$ étoit plus grand que le reſte précédent $c$, on diviſeroit $d$ par $c$, & le reſte ſeroit également diviſible par $p$, comme il ſuit du lemme.

*Soit maintenant propoſé de trouver le plus grand commun diviſeur des quantités* A *&* B, *ordonnées par rapport à la lettre* x. Diviſez le premier terme de la formule A

A . . . . . $-x^3 + ax^2 - c^2x + ac^2$

$m$ . . . . . $-x^3 + ax^2 - yx^2 + ayx$

C . . . . . $yx^2 + (c^2 + ay) \cdot -x + ac^2$

$n$ . . . . . $yx^2 - ayx + y^2x - ay^2$

$d$ . . . . . $(c^2 + y^2) \cdot -x + ac^2 + ay^2$

| | Quotiens. |
|---|---|
| B . . . $-x^2 + (a - y)x + ay$ | $x$ |
| $q$ . . . $-x^2 + ax$ | $-y$ |
| E . . . $-yx + ay$ | $x$ |
| $p$ . . . $-x + a$ | $c^2 + y^2$ |
| K . . . $-x + a$ | 1 |
| 0 | $c^2 + y^2$ |

par le premier de la formule B, & ayant multiplié le quotient $x$ par le diviſeur, ôtez le produit $m$ de A, pour avoir le reſte C, que vous diviſerez de la même maniere par B ; retranchez-en le produit $n$

du diviseur B, par le quotient $-y$, vous aurez le reste $d$. Maintenant comme $x$ a un exposant moindre dans ce reste que dans B; renversez l'ordre, & divisez B par le reste $d$, & retranchez-en $q$, produit de $d$ par le quotient $\frac{x}{c^2+x^2}$. Le troisiéme reste sera E, qui, étant divisé par $y$, qui se trouve dans tous ses termes, donnera $p$; divisez $p$ par $d$, & ôtez-en le produit K de $d$ par $\frac{1}{c^2+y^2}$, le reste sera o, de sorte que $p$ sera le plus grand commun diviseur cherché, comme cela suit du lemme; mais pour le faire encore mieux concevoir, voici comme je raisonne. Si $p$ étant divisé par $d$, le reste est o: donc $p$ divise exactement $d$ (ici le quotient peut être fractionnaire), donc $p$ divise aussi exactement $d$ multiplié par $\frac{x}{c^2+y^2}$, c'est-à-dire $q$, & parce qu'il divise E de la même maniere, il divisera encore exactement $q+$ E ou B, donc il divisera aussi le produit de B par $-y$ ou $n$, aussi bien que $n+d=$ C; mais le produit de B par $x$, ou $m$ est exactement divisible par $p$: donc $m+$ C $=$ A l'est aussi; donc A & B sont exactement divisés par $p$; donc $p$ est commun diviseur de A & de B: d'ailleurs il est leur plus grand commun diviseur; car aucune autre quantité ne peut diviser le dernier reste, ce que doit cependant faire le commun diviseur, ainsi que nous l'avons déjà vu.

Si en s'y prenant, comme nous venons de le dire, on ne trouvoit point de commun diviseur, mais une suite infinie de termes, on ordonneroit par rapport à une autre lettre; & si, en ordonnant successivement par rapport à toutes les lettres du dividende, la même

chose arriveit, ce seroit une marque que les quantités A & B n'auroient point de commun diviseur.

REMARQUE. Si l'on s'apperçoit que de deux quantités A, B, l'une contient une quantité qui ne puisse pas diviser l'autre, ou qui n'ait aucun diviseur commun avec l'autre, on peut l'effacer sans craindre que le commun diviseur en soit altéré; on fera la même chose, lorsqu'on divisera C par $d$, &c. On peut de même multiplier l'une des quantités sur lesquelles on opere par une quantité qui n'ait aucun diviseur commun avec l'autre; car le plus grand commun diviseur de $ab$ & de $a$, étant $a$, le plus grand diviseur commun de $yab$ & de $a$, de $\frac{ab}{a}$ & de $a$ sera encore $a$. Or il arrive souvent que pour diviser une quantité par une autre, on a besoin de multiplier tous les termes de la premiere par une quantité qui ne peut pas exactement diviser la seconde. On pourra donc faire cette multiplication sans altérer le plus grand commun diviseur cherché.

32. Pour ajouter ensemble plusieurs fractions qui ont le même dénominateur, on ajoute leurs numérateurs en conservant le dénominateur; ainsi $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, ce qui est évident, en faisant attention à ce que nous avons dit en parlant des fractions numériques; mais si les fractions qu'on veut ajouter, avoient différens dénominateurs, après les avoir réduites au même dénominateur, on prendroit pour numérateur de la somme, la somme de tous les numérateurs: ainsi $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$.

33. Pour ſouſtraire une fraction d'une autre fraction, on les réduira au même dénominateur, ſi elles en ont de différens, & l'on prendra pour numérateur de la différence, la différence des numérateurs : ainſi $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad-cb}{bd}$.

Si on avoit à ſouſtraire une fraction d'un entier, ou d'un entier joint à une fraction, ou ſi l'on avoit à ſouſtraire un entier & une fraction d'une fraction jointe à un entier, l'on réduiroit (ſi la réduction n'étoit pas déja faite) la quantité qu'on veut ſouſtraire, & la quantité dont on veut ſouſtraire chacune à une ſeule fraction, pour opérer enſuite comme nous venons de le dire.

34. Pour multiplier une fraction par une autre fraction, on multipliera les numérateurs l'un par l'autre, le produit ſera le numérateur du produit des fractions ; pour avoir le dénominateur du produit, l'on prendra le produit des deux dénominateurs, & il en ſera de même pour un plus grand nombre de fractions ; mais ſi l'on veut multiplier un entier $a$, *par exemple*, par une fraction, on ſuppoſera $a = \frac{a}{1}$, ce qui ne change pas ſa valeur, & l'on n'aura plus qu'à multiplier une fraction par une autre fraction : ainſi $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $a \times \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{d}$, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{p}{q} = \frac{acp}{bdq}$.

35. Pour diviſer une fraction par une fraction, il faut multiplier le numérateur du dividende par le dénominateur du diviſeur, le produit ſera le numérateur du quotient ; & multipliant enſuite le dénominateur du dividende par le numérateur du di-

viſeur, le produit donnera le dénominateur du quotient : ainſi le quotient de $\frac{c}{d}$ par le diviſeur $\frac{a}{b}$ ſera $\frac{cb}{da}$. Si on propoſoit de diviſer un entier $a$ par une fraction, on ſuppoſeroit $a = \frac{a}{1}$, & pour diviſer un entier joint à une fraction par un entier, ou par un entier joint à une autre fraction, on réduiroit le dividende & le diviſeur chacun en une ſeule fraction : ainſi ces deux derniers cas rentrent dans le premier. Toutes ces regles ſe démontrent comme celles des fractions numériques.

REMARQUE. Après une opération quelconque, Addition, Souſtraction, Multiplication, ou Diviſion, on ne doit pas oublier de faire la réduction des termes ſemblables, s'il y en a.

*DE la formation des puiſſances des Monomes & Polinomes, de l'extraction des Racines, du Calcul des radicaux, & des Expoſans.*

36. Nous appellons *premiere puiſſance* de $a$ la quantité $a$ elle-même : ainſi la premiere puiſſance de $a = a$; la ſeconde puiſſance de $a$, ou le produit de $a$ par $a$, eſt $= a \times a = a^1 \times a^1 = a^2 = aa$; la troiſiéme puiſſance de $a = a^3 = a^{1\times 3}$; de même la ſeconde puiſſance de $a^3 = a^3 \times a^3 = a^6 = a^{3\times 2}$ : d'où l'on peut conclure 1°. que la puiſſance d'une quantité $a$ n'eſt autre choſe que cette quantité multipliée par elle-même un certain nombre de fois. 2°. qu'il faut faire autant de multiplications, moins une, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de la puiſſance. 3°. que pour élever une quantité à une puiſſance donnée, il ſuffit de multiplier l'expoſant

de cette quantité par l'exposant de la puissance : ainsi la troisiéme puissance de $a^2 = a^{2\times3} = a^6 = a^2 \times a^2 \times a^2$ : donc, pour élever $a = a^1$ à la puissance $m$, on multipliera l'exposant 1 de $a$ par l'exposant $m$ de la puissance, & l'on aura $a^m$ ; & si l'on veut avoir la puissance $p$ de $a^n$, on multipliera $n$ par $p$, pour avoir $a^{np}$. La seconde puissance s'appelle *quarré*, & la troisiéme s'appelle *cube* : ainsi $a^2$ est le quarré de $a$, $a^3$ en est le cube. S'il s'agit d'avoir le quarré d'un nombre, on multipliera ce nombre par lui-même ; *par exemple*, le quarré de 5 est $= 5 \times 5 = 25$, son cube est le produit du quarré 25 par le nombre 5 : voici les quarrés & les cubes de tous les nombres, depuis 1 jusqu'à 10.

| Nombres | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quarrés. | 1. | 4. | 9. | 16. | 25. | 36. | 49. | 64. | 81. | 100. |
| Cubes. | 1. | 8. | 27. | 64. | 125. | 216. | 343. | 512. | 729. | 1000. |

Si les quantités qu'on veut élever à une puissance entiere & positive étoient complexes, il n'y auroit rien à changer à la méthode : ainsi, pour élever $a+b$ à la seconde puissance ou au quarré, on multipliera $a+b$ par $a+b$, & l'on aura la seconde puissance de $a+b$ qu'on peut indiquer : ainsi $\overline{a+b}^2 = a+b \times a+b = a^2 + 2ab + b^2$. Le cube de $a+b = \overline{a+b}^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ : la puissance quatriéme de $a+b = \overline{a+b}^4$, & enfin la puissance $m$ quelconque de $a+b$ est $= \overline{a+b}^m$. La quantité $a$, qui, multipliée par elle-même une fois, a donné le quarré $a^2$, s'appelle la *racine quarrée* de $a^2$ ; de même $bc$ est la *racine quarrée* de $b^2c^2$. La racine cubique de $a^6$ est la quantité $a^2$, qui, multipliée deux fois par elle-même, a donné le cube

$a^6$. En général la racine $n$ de $a^n$ eſt $a$, parce qu'en multipliant $a$ par lui-même un nombre $n-1$ de fois, on trouve $a^n$ *. Le quarré d'une fraction $\frac{a}{b}$ ſe trouve en prenant le quarré du numérateur & celui du dénominateur : pour avoir le cube, on prendra le cube du numérateur & celui du dénominateur : ainſi le quarré de $\frac{a}{b}$ eſt $\frac{a^2}{b^2}$ ſon cube ſera $\frac{a^3}{a^3}$. On voit auſſi bien aiſément que la racine quarrée de $\frac{a^2}{b^2}$ eſt $\frac{a}{b}$ ; que la racine cube de $\frac{a^3}{b^3}$ eſt $\frac{a}{b}$ ; de ſorte que pour avoir la racine d'une fraction, il faut prendre celle de ſon numérateur auſſi-bien que celle de ſon dénominateur.

De ce que nous venons de dire, il ſuit que, pour avoir la racine troiſiéme ou cubique de $a^6$, il ſuffit de diviſer l'expoſant 6 de la quantité donnée par l'expoſant 3 de la racine ; que pour avoir la racine quarrée de $a^4$, il ſuffit de diviſer l'expoſant 4 par l'expoſant 2 de la racine : de ſorte que la racine cube de $a^6 = a^{\frac{6}{3}} = a^2$, la racine quarrée de $a^4$ eſt $= a^{\frac{4}{2}} = a^2$, ce qui eſt évident ; & en général, puiſque pour élever $a^m$ à la puiſſance $p$, il faut multiplier l'expoſant $m$ par l'expoſant $p$ de la puiſſance pour trouver $a^{mp}$, il faudra, pour avoir la racine $p$ de $a^{mp}$, diviſer l'expoſant $mp$ par l'expoſant de la racine, & on aura $a^{\frac{pm}{p}} = a^m$ : donc en général la racine $n$ de $a^m = a^{\frac{m}{n}}$. On marque auſſi la racine $n$ de $a^m$, de cette maniere, $\sqrt[n]{a^m}$ ; de ſorte

* On ſuppoſe que $n$ eſt un nombre entier poſitif.

que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ; de même $\sqrt[2]{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$, $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$. Le ſigne $\sqrt{}$ s'appelle *ſigne radical*, & les quantités affectées de ce ſigne, ſont dites *quantités radicales* : ainſi $p\sqrt[3]{bc}$ eſt une quantité radicale. La quantité $p$ qui eſt hors du ſigne, s'appelle *coefficient* du ſigne, & la quantité $bc$ eſt dite être ſous le ſigne. Lorſqu'un radical n'a point de coefficient exprimé, il eſt cenſé avoir l'unité pour coefficient. On appelle *expoſant* du ſigne la quantité qui ſe trouve entre les branches du ſigne ; mais, quand un radical n'a point d'expoſant, il eſt cenſé avoir 2 pour expoſant, de ſorte que $\sqrt[2]{b^4} = \sqrt{b^4} = b^{\frac{4}{2}} = b^2$.

En examinant avec attention ce que nous venons de dire, on verra facilement que l'expoſant du ſigne eſt toujours le diviſeur de l'expoſant de la quantité qui eſt ſous le ſigne.

Il eſt facile d'appercevoir que la racine quarrée de $a^2$ eſt $= \pm\sqrt{aa} = \pm a$; car $a^2 = +a \times +a$, de même $a^2 = -a \times -a$. ainſi la racine quarrée d'une quantité poſitive eſt toujours double. De même la racine quatriéme de $p^4 = \pm\sqrt[4]{p^4} = \pm p$ ; car $p^4 = +p \cdot +p \cdot +p \cdot +p \cdot +p$ (le point indique la multiplication) $= -p \cdot -p \cdot -p \cdot -p$. En général une racine d'un degré pair eſt toujours double ; mais $\sqrt{-a^2}$ eſt une quantité impoſſible ; car elle ne peut être ni $+a$, ni $-a$, puiſque $+a \times +a = a^2$, de même $-a \times -a = +a^2$ : donc la racine de $-a^2$ qu'on marque ainſi $\pm\sqrt{-a^2}$ eſt une quantité abſurde ; de même toutes les racines paires d'une quantité

négative ſont impoſſibles : ainſi $\pm \sqrt[4]{-p^4}$ eſt une quantité impoſſible ; ces ſortes de quantités ſont appellées *imaginaires*.

Si l'on veut changer l'expoſant d'un radical, en conſervant ſa valeur, il faut multiplier par la même quantité l'expoſant du radical, & l'expoſant de la quantité qui eſt ſous le ſigne. Ainſi $\sqrt[3]{a^n} = \sqrt[3\times 2]{a^{2\times n}}$ ; car $\sqrt[3]{a^n} = a^{\frac{n}{3}}$, & $\sqrt[3\times 2]{a^{2\times n}} = \sqrt[6]{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{6}} = a^{\frac{n}{3}}$ ; ſi $n = 1$ on aura $\sqrt[3]{a^1} = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

Pour réduire deux radicaux au même expoſant, ſans changer leur valeur, il faut multiplier l'expoſant du radical du premier, & l'expoſant de la quantité qui eſt ſous le ſigne par l'expoſant du ſecond, & réciproquement ; mais, s'il y a plus de deux radicaux, on multipliera l'expoſant du ſigne auſſi-bien que l'expoſant de la quantité qui eſt ſous le ſigne d'un chacun par le produit des expoſans de tous les autres radicaux, ce qui, comme nous venons de le voir, ne peut changer leur valeur. Ainſi, pour réduire au même expoſant les radicaux $a\sqrt[3]{b^1}$, $c\sqrt[2]{d}$, je multiplie l'expoſant 3 par 2 ; de même je multiplie l'expoſant 1 de $b$ par 2 ; je multiplie enſuite l'expoſant du ſecond radical par 3, auſſi-bien que l'expoſant 1 de $d$, & j'ai les deux radicaux $a\sqrt[6]{b^2}$, $c\sqrt[6]{d^3}$ réduits au même expoſant. Les trois radicaux $a\sqrt[m]{b^m}$, $c\sqrt[p]{d^p}$, $\sqrt[x]{g^q}$, réduits au même expoſant, ſe changeront en ceux-ci, $a\sqrt[xpn]{b^{mpx}}$, $\sqrt[npx]{d^{pnx}}$, $\sqrt[npx]{g^{qnp}}$, ce qui eſt évident.

Pour ajouter deux ou pluſieurs radicaux enſemble, réduiſez-les au même expoſant, s'ils en ont de différens ; prenez enſuite leur ſomme comme ſi c'étoient des quantités algébriques : ainſi la ſomme de $a\sqrt[3]{d}$ & de $c\sqrt[3]{d}$ eſt $= a\sqrt[3]{d} + c\sqrt[3]{d} =$

$(a+c)\cdot\sqrt[3]{d}$, la somme de $a\sqrt[3]{b}+c\sqrt[2]{d}$ est $=a\sqrt[6]{b^2}+c\sqrt[6]{d^3}$, en réduisant au même exposant.

La soustraction des radicaux qui ont un même exposant, se fait comme la soustraction algébrique, en changeant le signe de celui ou de ceux qu'on veut soustraire; mais s'ils ont différens exposans, on les réduit au même exposant, avant de faire la soustraction. Ainsi pour soustraire $a\sqrt{b}$ de $c\sqrt{p}$, on écrira $c\sqrt{p}-a\sqrt{b}$, ce qui est évident; mais $a\sqrt[3]{b}-c\sqrt[5]{d^2}$ est $=a\sqrt[15]{b^5}-c\sqrt[15]{d^6}$.

Pour faire passer un coefficient sous le signe, sans changer la valeur du radical, on élévera le coefficient à l'exposant du signe : ainsi $b\sqrt[3]{d^3}=\sqrt[3]{d^3b^3}$ ; car $b\sqrt[3]{d^3}=bd^{\frac{3}{3}}=bd$, de même $\sqrt[3]{d^3b^3}=d^{\frac{3}{3}}b^{\frac{3}{3}}=db$. On voit aussi que, pour faire passer hors du signe une quantité qui se trouve sous le signe, il suffit de diviser l'exposant de cette quantité par l'exposant du signe : ainsi $\sqrt[3]{ad^6}=d^2\sqrt[3]{a}$ ; car $\sqrt[3]{ad^6}=d^2\times a^{\frac{1}{3}}=d^2\sqrt[3]{a}$. Pour faire entrer dans l'expression d'un radical une quantité $d$ quelconque, il suffit de multiplier la quantité sous le signe par $d$ élevé à l'exposant du signe, en divisant en même tems le coefficient du signe par la même quantité $d$; car, par cette opération, on ne fait que multiplier & diviser un radical par une même quantité : ainsi $a\sqrt[3]{b}=\frac{a}{d}\sqrt[3]{bd^3}$, $\sqrt[3]{b}=1\sqrt[3]{b}=\frac{1}{d}\sqrt[3]{bd^3}$ : car il est visible; *par exemple*, que $\frac{a}{d}\sqrt[3]{bd^3}=\frac{a}{d}\times b^{\frac{1}{3}}d^{\frac{3}{3}}=\frac{ad}{d}\times b^{\frac{1}{3}}=a\sqrt[3]{b}$.

Pour multiplier les radicaux les uns par les autres, après les avoir réduits au même exposant, s'ils en ont de différens, on multipliera leurs coefficiens les uns par les autres, le produit donnera le coefficient du produit cherché; on multipliera de même les unes par les autres, les quantités sous le signe & leur produit restera sous le signe : ainsi $a\sqrt[3]{b}\times c\sqrt[3]{d}=c\sqrt[3]{bd}$, $a\sqrt[5]{d}\times\sqrt[5]{c}=a\sqrt[5]{d}\times 1\sqrt[5]{c}=a\sqrt[5]{dc}$, $a\sqrt[n]{p^m}$

×

$\times c \sqrt[n]{q^n} \times d \sqrt[n]{g^n} = acd \sqrt[n]{p^m q^n g^n}$. De même $2\sqrt{4} \times 3\sqrt{9} = 6\sqrt{36} = 6 \times 6 = 36$; ce qui eſt évident. Si on veut avoir le produit de $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, on écrira $-\sqrt{aa} = -a$; puiſqu'il eſt évident que $-a$ eſt le quarré de $\sqrt{-a}$. Pour ne pas ſe tromper en multipliant, *par exemple*, les quantités imaginaires $\sqrt{-b}$, $\sqrt{-c}$ l'une par l'autre, on remarquera que $\sqrt{-b} = \sqrt{-1.b} = \sqrt{-1} \times \sqrt{b}$, de même $\sqrt{-c} = \sqrt{-1} \times \sqrt{c}$: donc $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} = -1 \times \sqrt{bc} = -\sqrt{bc}$, à cauſe de $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$. En multipliant à l'ordinaire, l'on auroit $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = \sqrt{bc}$, ce qui eſt faux.

Pour diviſer deux radicaux l'un par l'autre, on les réduira au même expoſant, s'ils en ont de différens; on diviſera enſuite le coefficient du dividende par celui du diviſeur, & la quantité qui eſt ſous le ſigne dans le dividende par la quantité qui ſe trouve ſous le ſigne du diviſeur: ainſi le quotient de $a\sqrt[3]{b}$ par $c\sqrt[3]{d}$ eſt $= \frac{a}{c}\sqrt[3]{\frac{b}{d}}$; de même $4\sqrt{16}$ diviſé par $2\sqrt{4}$ eſt $= \frac{4}{2}\sqrt{\frac{16}{4}} = 2\sqrt{4} = 4$; mais pour diviſer $a\sqrt[n]{b}$ par $c\sqrt[m]{p}$, on réduira les radicaux au même expoſant pour avoir $a\sqrt[nm]{b^m}$, $c\sqrt[nm]{p^n}$; diviſant enſuite le premier par le ſecond, on trouvera le quotient $= \frac{a}{c}\sqrt[nm]{\frac{b^m}{p^n}}$.

Pour élever un radical à une puiſſance quelconque, il faut multiplier l'expoſant de chacun de ſes facteurs (dans un produit $adc$, les quantités $a$, $d$, $c$ ſont appelées les *facteurs* de ce produit) par l'expoſant de la puiſſance propoſée: ainſi la puiſſance cinquiéme de $\sqrt[5]{a^1}$, ou $(\sqrt[5]{a^1})^5$ eſt $= \sqrt[5]{a^5} = a^{\frac{5}{5}} = a^1 = a$; donc, lorſque l'expoſant de la puiſſance eſt égal à l'expoſant du ſigne, il ſuffit d'ôter le ſigne radical. La puiſſance $m$ de $\sqrt[n]{a^p}$ ſera $\sqrt[n]{a^{pm}}$; car $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$; mais, pour avoir la puiſſance $m$ de cette derniere quantité, on doit, ſelon ce que nous avons dit ci-deſſus, multiplier l'expoſant $\frac{p}{n}$ par $m$, pour avoir $a^{\frac{pm}{n}} = \sqrt[n]{a^{pm}}$. Si le radical avoit un coefficient différent de l'unité, on éleveroit ce coefficient à la puiſſance propoſée, ou bien,

avant de faire l'opération, on feroit paſſer le coefficient ſous le ſigne : ainſi $(a \sqrt[3]{c^2})^2 = a^2 \sqrt[3]{c^4} = \sqrt[3]{a^6 c^4}$, en faiſant paſſer $a$ ſous le ſigne avant l'opération, ou après; de même $(2\sqrt{4})^2 = 4\sqrt{16} = 4 \times 4 = 16$, parce que la puiſſance ſeconde de 4 eſt $= 16$.

Pour extraire une racine quelconque d'une quantité radicale dont le coefficient eſt l'unité, il faut multiplier l'expoſant du radical par celui de la racine; ainſi la racine cinquiéme de $\sqrt[3]{a^{15}} = \sqrt[15]{a^{15}} = a^{\frac{15}{15}} = a^1 = a$, ce eſt évident; car $\sqrt[3]{a^{15}} = a^{\frac{15}{3}} = a^5$; or la racine cinquiéme de $a^5$ eſt $= a^{\frac{5}{5}} = a$; donc, &c. De même la racine $n$ de $\sqrt[mn]{a^p}$ eſt $= \sqrt[m]{a^p}$. Si le radical avoit un coefficient, dont on peut prendre la racine demandée, on la prendroit ſéparément; mais ſi on ne pouvoit en prendre une racine exacte, on le feroit paſſer ſous le ſigne : ainſi la racine quarrée de $9\sqrt[3]{64}$ eſt $= 3\sqrt[6]{64} = 3 \times 2 = 6$: car $\sqrt[3]{64} = 4$, dont la racine quarrée $= 2$, de même $\sqrt[6]{64} = 2$: car $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$. Mais pour avoir la racine quarrée de $3\sqrt[3]{2}$, je fais paſſer 3 ſous le ſigne & j'ai $\sqrt[3]{27 \times 2} = \sqrt[3]{54}$, dont la racine quarrée eſt $= \sqrt[6]{54}$.

Pour avoir une puiſſance ou une racine d'une quantité radicale fractionnaire, on feroit ſur le numérateur & le dénominateur du coefficient & de la quantité, ſous le ſigne, les mêmes opérations que nous venons de faire ſur les entiers; il en ſeroit de même, ſi l'on vouloit avoir la ſomme ou le produit, la différence ou le quotient de ces ſortes de quantités, ce qui n'a pas beſoin d'une plus longue explication.

37. Paſſons maintenant à la formation des puiſſances & à l'extraction des racines des polinomes. Le quarré de $a+b$, ou $\overline{a+b}^2$, ou $(a+b)^2$ eſt $= a^2 + 2ab + b^2$. En multipliant cette quantité par $a+b$ & réduiſant, on aura le cube de $a+b$, ou $\overline{a+b}^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$ : donc le quarré d'un binome $a+b$ contient 1°. le quarré $a^2$

du premier terme $a$ de la racine ; en ſecond lieu le double produit du premier terme par le ſecond, ou $2ab$ ; enfin le quarré $b^2$ du ſecond terme $b$ de la racine. Donc pour revenir du quarré à la racine, après avoir extrait la racine du quarré $a^2$, 1°. j'écrirai $a$, racine quarrée de $a^2$, au quotient, c'eſt-à-dire, à la racine : 2°. j'élevrai $a$ au quarré pour avoir $a^2$, que je retrancherai du quarré $a^2 + 2ab + b^2$, ce qui ſe fait en écrivant $- a^2$ ; qui détruira $a^2$ & il ne reſtera que $2ab + b^2$. Pour trouver le ſecond terme $b$ de la racine, je prends le double du terme trouvé, c'eſt-à-dire, $2a$ pour diviſeur ; & diviſant le terme $2ab$ par $2a$, le quotient ſera $+ b$ & la racine cherchée ſera $a + b$. Pour en faire la preuve, j'éleve $a + b$ au quarré, en multipliant $a + b$ par $a + b$, le produit eſt égal au quarré $a^2 + 2ab + b^2$ : donc, &c. Appliquons ceci à l'exemple ſuivant.

*Soit propoſé d'extraire la racine quarrée de la quantité* $9x^4 - 6x^2d + d^2$. Ayant écrit cette quantité, comme on le voit : je cherche d'abord la racine quarrée du premier terme, (quand on parle d'une racine, ſans la ſpécifier, on entend parler de la racine quarrée) ; pour cela, je dis la racine de 9 eſt 3, que j'écris à la racine ; je dis enſuite la racine de $x^4$ eſt $x^2$, que j'écris à côté de 3 ; élevant $3x^2$ au quarré, j'ai $9x^4$, que j'écris ſous $9x^4$, je fais la ſouſtraction, en changeant le ſigne (de $9x^4$) de $+$ en $-$, & je mets o ſous $9x^4$, qui ſe trouve détruit par $- 9x^4$. Je prends pour diviſeur $6x^2$, double de la racine écrite $3x^2$ ; je diviſe le ſecond terme $- 6x^2d$

| | |
|---|---|
| $9x^4 - 6x^2d + d^2$ | $3x^2 - d$ |
| o | |
| $- 6x^2d + d^2$ | $6x^2$ |

par ce diviseur, pour avoir le quotient $-d$, que j'écris à côté du premier terme de la racine, élevant maintenant $3x^2 - d$ au quarré, je retrouve la quantité proposée, ainsi l'opération est juste. Cette méthode est fondée sur ce que si $a+b$ représente la racine $3x^2-d$, $a$ pourra représenter $3x^2$ & $b$ la quantité $-d$. S'il y avoit plus de trois termes au quarré, on les réduiroit à 3 (si cela étoit possible), en prenant pour un seul terme les quantités dans lesquelles une même lettre auroit le même exposant & pour un seul terme tous ceux dans lesquels cette lettre ne se trouveroit pas : ainsi, pour avoir la racine de $a^2+2ab+b^2-2ad-2bd+d^2$, on disposera cette quantité, comme on le voit ici : prenant ensuite la racine du premier terme $a^2$, on écrira $a$ au quotient ; élevant au quarré, on retranchera $a^2$ de $a^2$ ; on prendra pour diviseur $2a$ double de la racine, & divisant d'abord $2ab$ par $2a$, on mettra au quotient $+b$, divisant tout de suite $-2ad$ par $2a$, on écrira encore le quotient $-d$ à la racine, qui sera $a+b-d$ ; en effet en multipliant cette racine par elle-même, on trouvera la quantité proposée. Si la quantité proposée ne peut pas se réduire à trois termes par la méthode dont nous venons de parler, on ordonnera cette quantité par rapport à une lettre quelconque, on prendra la racine du premier terme comme nous venons de le faire ; on retranchera de même le quarré du premier terme de la racine de la quantité proposée ; prenant ensuite pour diviseur le double de la racine, on divisera le terme suivant (on doit

| | |
|---|---|
| $a^2+2ab+b^2$ | |
| $0-2ad-2bd$ | $a+b-d$ |
| $+d^2$ | |
| $--a^2$ | $2a$ |

toujours diviſer le terme qui contient le plus grand expoſant de la lettre, par rapport à laquelle on a ordonné) par ce diviſeur; on écrira le quotient à la racine : multipliant enſuite le diviſeur par le quotient, on ajoutera au produit le quarré de ce quotient pour ſouſtraire le tout de la quantité propoſée ; l'on continuera de même en prenant toujours pour diviſeur le double de la racine trouvée.

*Soit la quantité* $x^4 + 4x^3p + 6x^2p^2 + 4xp^3 + p^4$. Cette quantité ne pouvant pas évidemment ſe réduire à 3 termes & étant ordonnée par rapport à $x$ ;

| | |
|---|---|
| $x^4 + 4x^3p + 6x^2p^2 + 4xp^3 + p^4$ | $x^2 + 2xp + p^2$ |
| $- x^4 \pm 4x^3p \pm 4x^2p^2$ | $2x^2$ |
| $+ 2x^2p^2 + 4xp^3 + p^4$ | $2x^2 + 4xp$ |

je prends la racine $x^2$ du premier terme & après avoir écrit $x^2$ à la racine, je prends ſon quarré $x^4$ que je ſouſtrais de la quantité propoſée. Prenant enſuite $2x^2$ pour diviſeur, je diviſe le terme ſuivant $4x^3p$ par $2x^2$, & j'écris à la racine le quotient $2xp$. Je multiplie enſuite ce quotient par le diviſeur & j'ai la quantité $4x^3p$, à laquelle j'ajoute $4x^2p^2$ quarré du quotient ; retranchant cette ſomme du reſte de la quantité propoſée, il me reſte $2x^2p^2 + 4xp^3 + p^4$ que j'écris ſous la quantité propoſée, comme on le voit. Doublant enſuite la racine, j'ai pour diviſeur $2x^2 + 4xp$ ; je diviſe le terme $2x^2p^2$ par le premier terme $2x^2$ du diviſeur, pour avoir le quotient $+ p^2$, que j'écris à la racine ; multipliant enſuite le diviſeur par le quotient & ajoutant au produit le quarré du quotient, j'ai $2x^2p^2 + 4xp^3 + p^4$ ; retranchant cette

quantité du reſte de la quantité propoſée, il ne reſte rien, & la racine cherchée eſt $x^2 + 2px + p^2$. En prenant la racine de celle-ci, on aura $x + p$, racine quatriéme de la quantité propoſée ; de ſorte que pour avoir la racine quatriéme d'une quantité $d^4$, on peut d'abord prendre la racine quarrée $d^2$ de $d^4$, & prendre enſuite la racine $d$ de $d^2$ ; mais ſi l'on ne peut avoir la racine quarrée de celle-ci, c'eſt une marque que la quantité propoſée n'a pas de racine quatriéme : cette méthode eſt générale.

Pour extraire la racine cube de $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ que nous ſavons être $= a + b$ ; après avoir diſpoſé cette quantité comme on le voit ici, je prends la racine cubique du premier terme $a^3$, j'ai $a$ que j'écris à la racine ; élevant $a$ au cube, je trouve $a^3$ que je retranche de la quantité propoſée & j'écris o ſous $a^3$. Pour trouver le ſecond terme $b$ de la racine, je vois qu'il me faut diviſer le ſecond terme $3a^2b$ par $3a^2$, c'eſt-à-dire, par le triple du quarré du premier terme $a$ de la racine. Je prends donc le quarré $a^2$ de $a$, & triplant, j'ai $3a^2$ pour diviſeur : diviſant donc $+3a^2b$ par $3a^2 = +3a^2$, j'ai $+b$ pour quotient ; j'écris $+b$ à la racine, de ſorte que la racine entiere eſt $a + b$. En effet, élevant $a + b$ au cube, on trouve la quantité propoſée. S'il y avoit plus de 4 termes au cube, il y en auroit plus de deux à la racine, dans ce cas on tacheroit de réduire la quantité propoſée à 4 termes, en ſuivant la méthode, dont nous avons parlé ci-deſſus. Ainſi, pour extraire la racine cubique de $x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3 - 3x^2d + 3xd^2 - 6xbd - 3b^2d +$

| | |
|---|---|
| $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ | $a + b$ |
| o | |
| $-a^3$ | $3a^2$ |

$3bd^2 - d^3$, je disposé cette quantité comme on le voit:

je prends ensuite la racine cubique $x$ du premier terme $x^3$,

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3 & \\ o & \\ \quad -3x^2d - 6xbd - 3b^2d & x + b - d \\ \quad\quad +3xd^2 + 3bd^2 & \\ \quad\quad\quad -d^3 & \\ \hline -x^3 & 3x^2 \end{array}$$

je l'écris à la racine; j'éleve $x$ au cube & retranchant $x^3$ de $x^3$, j'écris o sous $x^3$; je prends ensuite pour diviseur le triple du quarré de la racine, & divisant tout de suite tous les termes affectés de $x^2$, j'ai $+b-d$ que j'écris au quotient; de sorte que la racine cherchée est $x+b-d$: en effet, si on prend le quarré de cette quantité, qu'on multiplie ensuite ce quarré par la racine $x+b-d$ pour avoir le cube de cette racine, l'on trouvera la quantité proposée.

Lorsque la quantité proposée ne peut pas se réduire à quatre termes, à cause que chacune de ses lettres se trouve dans plus de quatre termes, avec des exposans au-dessus de o, on peut ordonner par rapport à une lettre quelconque; prenant ensuite la racine cubique du premier terme, on l'écrira à la racine; élevant cette racine au cube, on retranchera le résultat de la quantité proposée. Prenant ensuite pour diviseur le triple du quarré de la racine, on divisera le terme suivant (on doit toujours prendre pour terme suivant celui qui contient le plus grand exposant de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné) par ce diviseur, pour écrire le quotient à la racine; on élevera au cube les deux premiers termes de la racine, pour retrancher ce cube de toute la quantité proposée. Prenant ensuite

pour diviſeur le triple du quarré des deux premiers termes de la racine, on ſe ſervira du premier terme de ce diviſeur pour diviſer le terme ſuivant du reſte de la quantité propoſée; écrivant le quotient à la racine, on élevera enſuite toute la racine trouvée au cube, pour retrancher le réſultat de toute la quantité propoſée; on continuera de même en prenant toujours pour diviſeur le triple du quarré de la racine trouvée.

Si une quantité n'eſt pas une puiſſance parfaite, on ſe contente d'indiquer ſa racine; ainſi $a^2 + b^2$ n'étant pas un quarré parfait, ſa racine peut s'exprimer de cette maniere $\sqrt{a^2 + b^2} = \overline{a^2 + b^2}^{\frac{1}{2}} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$, en diviſant l'expoſant 1 ſous-entendu de $(a^2 + b^2)$ par l'expoſant 2 de cette racine.

38. Pour extraire les racines numériques, il faut ſe rappeller la table des quarrés & des cubes des nombres que nous avons donnée ci-deſſus (36), après quoi l'on verra aiſément qu'un nombre d'un ſeul chiffre ne peut avoir trois chiffres à ſon quarré, puiſque 10 qui eſt le plus petit nombre de deux chiffres, a pour quarré 100, qui eſt le plus petit nombre de 3 chiffres; 99 qui eſt le plus grand nombre de deux chiffres, a pour quarré 9801, qui ne contient que quatre chiffres; de ſorte qu'un nombre quelconque ne peut avoir à ſon quarré tout au plus que le double de ſes chiffres. De même le cube d'un nombre ne peut contenir plus du triple des chiffres de ce nombre; en effet 10, premier nombre de deux chiffres, a pour cube 1000, premier nombre de quatre chiffres & le cube de 99 ne contient que 6 chiffres, ainſi qu'on peut le voir en multipliant le quarré de 99 par 99 pour avoir ſon cube.

Pour elever un nombre 25 au quarré, il faut multiplier 25 par 25 ; & pour avoir ſon cube, il faut multiplier ſon quarré par 25. On trouvera pour le quarré 625 & multipliant ce dernier nombre par 25, on aura ſon cube 15625. Au lieu de multiplier 25 par 25 pour avoir ſon quarré, on peut s'y prendre de cette maniere : je prends le quarré de ſon premier chiffre 2 & j'écris 4 comme on le voit ici ; je prends enſuite le double du premier chiffre, c'eſt 4 ; je multiplie ce double par le ſecond chiffre 5, j'écris le produit 20 ſous 4, en avançant d'un rang vers la droite ( s'il n'y avoit qu'un chiffre au produit, on l'avanceroit de même auſſi d'un rang vers la droite ) ; je prends enſuite le quarré du ſecond, ſavoir 25, que j'avance encore d'un rang ; prenant enſuite la ſomme, je trouve 625 comme ci-deſſus. De-là je conclus qu'en partageant en tranches le quarré 625 en cette maniere 6, 25 ; de ſorte que la premiere tranche à droite contienne deux chiffres, le quarré du premier chiffre de la racine doit ſe trouver dans la premiere tranche 6 de la gauche, & le double produit du premier chiffre par le ſecond dans le premier chiffre 2 de la ſeconde tranche ; enfin le quarré du dernier chiffre 5 doit ſe trouver au dernier chiffre 5 de la ſeconde tranche. Quand on dit que le double produit du premier chiffre par le ſecond doit ſe trouver au premier chiffre de la ſeconde tranche & que le quarré du ſecond chiffre doit ſe trouver au dernier chiffre de la même ſeconde tranche, cela doit s'entendre du dernier chiffre à droite de ce produit, & du quarré de 5.

```
  4
 20
 25
---
625
```

Si le nombre qu'on veut élever au quarré avoit plus

de deux chiffres, on prendroit de plus le double produit des deux premiers par le troiſiéme avec le quarré du troiſiéme; enſuite le double du produit des trois premiers par le quatriéme avec le quarré du quatriéme & ainſi de ſuite, en avançant toujours d'un rang vers la droite chaque produit & chaque quarré. De-là nous tirons la regle ſuivante: pour avoir la racine d'un nombre, partagez ce nombre en tranches, en commençant par la droite, de ſorte que chaque tranche ſoit de deux chiffres, excepté la premiere à gauche qui ne ſera que d'un ſeul chiffre, lorſque le nombre des chiffres ſera impair. Prenez le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche de la gauche, tirez-en la racine que vous écrirez à part; élevez cette racine au quarré, retranchez ce quarré de la premiere tranche; à côté du reſte s'il y en a, ou à côté de o s'il n'y en a point, deſcendez la ſeconde tranche & prenez pour dividende le reſte s'il y en a, joint au premier chiffre de la tranche abaiſſée, ou le premier chiffre ſeul de la tranche abaiſſée s'il n'y a aucun reſte; prenez pour diviſeur le double de la racine trouvée; écrivez le quotient à la racine; multipliez le diviſeur par le quotient; ajoutez à ce produit, en avançant d'un rang vers la droite, le quarré du quotient; ſi la ſomme peut être ſouſtraite de la tranche abaiſſée, jointe au reſte s'il y en a, le chiffre trouvé eſt bon, ſi le contraire arrive, on diminuera le quotient ſucceſſivement d'une unité & même on écrira o ſi en mettant 1 à la racine on ne peut faire la ſouſtraction dont nous venons de parler. On s'y prendra de même pour les tranches ſuivantes, en prenant pour diviſeur le double de la racine trouvée, & pour dividende le

le premier chiffre de la tranche abaiſſée, joint au reſte s'il y en a, ou ce premier chiffre ſeul, s'il n'y a aucun reſte.

*Soit propoſé d'extraire la racine quarrée du nombre 628.* Ayant partagé ce nombre en tranches, comme nous venons de le dire; je vois par la table des quarrés que 4 eſt le plus grand quarré contenu dans 6, j'en prends ſa racine 2 que j'écris comme on le voit; élevant 2 au quarré, j'écris 4 ſous 6; retranchant 4 de 6, il reſte 2; à côté de ce reſte j'abaiſſe la tranche ſuivante, je mets un point ſous le premier chiffre de cette tranche, pour me rappeller que 22 eſt mon dividende, je prends pour diviſeur le double 4 de la racine; diviſant 22 par 4, j'écris 5 au quotient; je multiplie le diviſeur par le quotient, le produit eſt 20, auquel je joins le quarré du quotient, en cette maniere $^{20}_{25}$, la ſomme 225 étant ſouſtraite de 228, il reſte 3, que j'écris comme on le voit; de ſorte que la racine cherchée eſt 25, avec un reſte 3, qui indique que le nombre propoſé ſeroit un quarré exact, ſi on en ôtoit 3. Pour faire la preuve de cette opération, j'éleve 25 au quarré, j'ai 625, à ce nombre j'ajoute 3 & j'ai le nombre propoſé 628.

| | |
|---|---|
| 6, 2 8 | 2 5 (3) |
| 4 | 4 Diviſeur. |
| 2 2 8 | |

On voit par là qu'on ne peut pas toujours extraire exactement les racines quarrées des nombres. *Par exemple*, on ne peut pas extraire exactement les racines quarrées des nombres 2, 3, 5. De ſorte que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ſont des quantités qu'on appelle *irrationnelles* ou *ſourdes*. On peut cependant en approcher tant que l'on veut par le moyen des décimales, pour cela il faut ajouter au nombre propoſé autant de fois deux zéro qu'on veut

avoir de décimales : ainſi, pour avoir la racine de 5, à un centiéme près, j'ajoute 4 zeros à 5, de la maniere qu'on le voit ici : partageant enſuite le réſultat en tranches, je prends la plus grande racine contenue dans la premiere tranche, je trouve que c'eſt 2, que j'écris à la racine ; je retranche le quarré 4 de 5, il reſte 1, à côté duquel je deſcends deux 0, & prenant 10 pour dividende, & 4 pour diviſeur, j'écris le quotient 2 à la racine ; retranchant enſuite le produit du diviſeur par le quotient joint au quarré du quorient (de la maniere que nous l'avons déjà expliqué) du nombre 100, il reſte 16 ; à côté de ce nombre je deſcends 00 & j'ai 160 pour dividende & 44 pour diviſeur. C'eſt pourquoi je diviſe 160 par 44, en diſant en 16 combien de fois 4, je trouve qu'il y eſt quatre fois ; mais, parce que le produit du diviſeur par le quotient joint au quarré du quotient (de la maniere qu'on l'a indiqué) ne peut ſe ſouſttraire de 1600, je diminue le quotient d'une unité ; la ſouſtraction pouvant alors ſe faire, j'écris 3 au quotient ; mais parce qu'en ajoutant 0000 à la droite de 5, j'ai multiplié 5 par 10000, dont la racine eſt 100, je dois avoir une racine cent fois plus petite que 223 ; je dois donc ſéparer 23 par un point pour avoir la véritable racine 2 . 23, à un centiéme près.

| 5,00,00 | 2 . 23 |
|---|---|
| 4 | 4 |
| 1 00 | 44 |
| 84 | |
| 16 00 | |

Un nombre ſourd, tel que $\sqrt{5}$ ne peut jamais avoir pour racine exacte une fraction quelconque. Car ſoit $\frac{a}{d}$ la fraction cherchée, on aura $\sqrt{5} = \frac{a}{d}$, & en prenant les quarrés on aura $5 = \frac{aa}{dd}$ ;

or cela eſt impoſſible, car la fraction $\frac{a}{d}$ étant réduite à ſes moindres termes, ainſi que nous le ſuppoſons ici, les quantités $a$ & $d$ n'ont aucun diviſeur commun; mais il eſt viſible que ſi $a$ & $d$ n'ont aucun diviſeur commun, leurs quarrés $a^2$ & $d^2$ n'en auront pas non plus : donc ſi $d$ ne peut pas diviſer exactement $a$, $d^2$ ne diviſera pas non plus exactement $a^2$ : donc $\frac{a^2}{d^2}$ ne peut être un nombre entier 5 : donc, &c. On prouveroit de même que $\frac{a}{b}$ étant une fraction irréductible $= \sqrt[3]{5}$, $\frac{a^3}{b^3}$ devroit être une fraction égale à 5, ce qui ne peut être; donc un nombre qui n'eſt pas une puiſſance parfaite d'un dégré quelconque ne peut avoir aucune racine exacte du même dégré exprimable en nombres.

Si on vouloit avoir le cube de 25, on prendroit d'abord le quarré 625 de ce nombre & multipliant 625 par 25, le réſultat 15625 ſeroit le cube cherché. L'on trouveroit la même choſe en prenant d'abord le cube du premier chiffre 2 qui eſt 8. En ſecond lieu le triple produit du quarré du premier chiffre par le ſecond 5. En troiſiéme lieu le triple produit du premier chiffre par le quarré du ſecond; & enfin le cube du ſecond,

| | |
|---|---|
| 8 | Cube du premier chiffre 2 |
| 60 | Triple produit de 4 par 5 |
| 150 | Triple produit de 2 par 25. |
| 125 | Cube de 5 |
| 15625 | |

Ayant ſoin d'avancer à chaque fois d'un rang vers

la droite ; faiſant enſuite l'addition, on trouvera le même réſultat que ci-deſſus. S'il y avoit 3 chiffres au nombre propoſé, on continueroit de même en regardant les deux premiers chiffres, comme n'en faiſant qu'un ; de ſorte qu'on prendroit de plus le triple produit du quarré des deux premiers par le troiſiéme, le triple produit des deux premiers par le quarré du troiſiéme, enfin le cube du troiſiéme, & ainſi de ſuite pour un plus grand nombre de chiffres. Cela poſé, ſi on partage ce nombre en tranches, enſorte que celle de la droite contienne trois chiffres, il eſt viſible en premier lieu que le cube 8 du premier chiffre 2 eſt contenu dans la premiere tranche de la gauche ; en ſecond lieu, que le triple produit du quarré du premier par le ſecond eſt contenu dans le premier chiffre 6 de la ſeconde tranche. Quand nous diſons que le triple produit du quarré du premier chiffre par le ſecond eſt contenu dans le premier chiffre 6 de la ſeconde tranche, nous entendons parler du dernier chiffre de la droite de ce produit.

15,625 | 25
8 | 12
7625

*Soit propoſé maintenant de prendre la racine cubique de 15625.* Ayant partagé ce nombre en tranches, comme nous venons de le dire, je vois par la table des cubes que 8 eſt le plus grand cube contenu dans la premiere tranche 15, je prends donc la racine cubique de 8 qui eſt 2, j'écris 2 à la racine ; élevant 2 au cube, j'ai 8 que je ſouſtrais de 15, pour avoir le reſte 7, à côté duquel je deſcends la tranche ſuivante ; & mettant un point ſous le premier chiffre 6 de cette tranche, je prends pour dividende le premier chiffre 6 de la tranche abaiſſée, joint au reſte 7 de la précédente (s'il n'y avoit point

de reſte, le ſeul chiffre 6 ſeroit le dividende); je prends 12 pour diviſeur, c'eſt-à-dire, le triple du quarré du premier terme de la racine, diviſant 76 par 12, le quotient eſt 6; mais le cube de 26 étant $17576 > 15625$, je ne puis le ſouſtraire de ce dernier; je diminue donc le quotient d'une unité & comme le cube de 25 eſt $= 15625$, quantité qui peut être ſouſtraite du nombre propoſé, j'écris 5 à la racine qui eſt 25. S'il y avoit une autre tranche, pour trouver le troiſiéme chiffre, je prendrois pour diviſeur le triple du quarré de 25 & pour dividende le premier chiffre de la troiſiéme tranche, joint au reſte s'il y en avoit, élevant enſuite au cube les trois premiers chiffres de la racine, ſi le réſultat pouvoit être ſouſtrait des trois premieres tranches, le chiffre trouvé ſeroit bon, ſinon il faudroit diminuer ſucceſſivement le quotient d'une unité, juſqu'à ce que la ſouſtraction fût poſſible.

EXEMPLE SECOND. *Soit le nombre 8,489,667, dont on demande la racine cubique.* On trouvera, en ſuivant la méthode indiquée, 204 pour racine, avec

| 8,489,667 | 204 | |
|---|---|---|
| | 12 | Premier diviſeur. |
| | 1200 | Second diviſeur. |

un reſte 3. Pour avoir une racine plus exacte, on ajoutera autant de fois trois zeros qu'on veut avoir de décimales, parce que le cube de 10 étant 1000 pour avoir des dixiémes, il faudra ajouter trois 0, ou, ce qui revient au même, multiplier par 1000.

La racine cube d'une fraction ſe trouve en prenant la racine cubique du numérateur & celle de ſon dénominateur; de même la racine quarrée d'une

fraction se trouvera en prenant la racine quarrée de son numérateur aussi-bien que celle de son dénominateur; de sorte que la racine cubique de $\frac{8}{27}$ est $\frac{2}{3}$, la racine quarrée de $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$, la racine cube de $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ est $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$; la racine quarrée de $\frac{3}{5}$ est $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. Mais, si l'on veut avoir un nombre au numérateur, on le pourra, en multipliant pour la racine quarrée, les deux termes de la fraction par le numérateur; mais on multipliera par le quarré du numérateur, s'il s'agit de la racine cube : ainsi la racine quarrée de $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ est $\frac{2}{\sqrt{3}}$; la racine cube de $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ est $\frac{2}{\sqrt[3]{12}}$. Si on vouloit avoir un nombre au dénominateur, on feroit du dénominateur le même usage que nous venons de faire du numérateur : ainsi $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}}$ est $= \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$ est $= \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Si on vouloit faire disparoître le radical $\sqrt{6}$, dans la fraction $\frac{\sqrt{6}}{3}$, on le pourroit, en se contentant de prendre par approximation la racine de 6, ce qui seroit aisé à faire par le moyen des décimales, en suivant la méthode ci-dessus.

La racine cube de $\frac{a}{b}$ est $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}$, ou parce

que

que $\frac{a}{b} = \frac{a^3}{aab}$, on aura $\frac{a}{\sqrt[3]{aab}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; la racine quarrée de $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}$, ſera $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{ab}}$.

39. Avant de paſſer plus loin, nous allons donner une méthode générale pour trouver une puiſſance quelconque d'une quantité algébrique.

LEMME I. *Tous les produits qui réſultent d'un même nombre de lettres ſont égaux entr'eux dans quelque ordre qu'on multiplie ces lettres.* Pour le démontrer, nous ferons uſage de ce principe évident, que deux quantités donneront des produits égaux, laquelle des deux l'on prenne pour multiplicande : cela poſé, je dis d'abord que $ab = ba$, par la même raiſon que $4 \times 3 = 3 \times 4 = 12$; donc les produits qui réſultent de deux lettres $a$ & $b$ ſont égaux dans quelque ordre qu'on multiplie ces lettres. En ſecond lieu $cab = abc$; car $ab = ab$ : donc en multipliant $c$ par $ab$, & $ab$ par $c$, les produits $cab$ & $abc$ ſeront évidemment égaux; donc le produit $abc = bac$; car, puiſque $ab = ba$, $ab \times c$ eſt $= ba \times c$. De même $cab = abc = cba$, puiſqu'en multipliant $c$ par $ab$, on doit avoir le même réſultat qu'en multipliant $ab$ par $c$, ou $c$ par $ba$, à cauſe de $ba = ab$ : donc les produits $abc$, $bac$, $cab$, $cba$, ſont égaux. Par la même raiſon $bca = acb$, puiſque $ca = ac$ & qu'en multipliant $ac$ par $b$, on doit avoir le même produit qu'en multipliant $b$ par $ca$ : donc les ſix produits $abc$, $bac$, $cab$, $cba$, $bca$, $acb$ ſont égaux entr'eux; car les deux derniers ſont égaux entr'eux auſſi-bien que les quatre premiers; mais il eſt viſible que le cinquiéme eſt égal au quatriéme : donc

les produits de trois lettres ſont égaux dans quelque ordre qu'on multiplie ces lettres. On prouvera facilement par la même méthode que les produits de 4 lettres ſont tous égaux, & ainſi de ſuite : donc, &c.

LEMME II. *Deux lettres* a *&* b *peuvent recevoir deux arrangemens différens* ab *&* ba *; trois lettres* a, b, c *peuvent recevoir 2 fois 3 ou 6 arrangemens différens, ce qui donnera les 6 arrangemens ſuivans* acb, abc, bac, bca, cab, cba. *On voit auſſi que quatre lettres recevront 6 fois 4, ou 24 arrangemens différens ; car chacune d'elles étant miſe la premiere, les trois autres recevront 6 arrangemens différens, ce qui donnera 24 arrangemens différens. De même 5 lettres recevront 24 fois 5 ou 120 arrangemens différens ; &c. Mais tous ces prodaits ſeront égaux & non différens par le lemme précédent.*

LEMME III. *Un nombre* m *de lettres priſes deux à deux, donnera un nombre* $\frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2}$ *de produits réellement différens ; priſes trois à trois un nombre* $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ *; priſes quatre à quatre un nombre* $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ *; & ainſi de ſuite.*

Puiſque le nombre des lettres eſt $m$, chacune ne pourra être multipliée que par les autres, dont le nombre ſera $m-1$ ; ainſi le nombre total des produits, en prenant les lettres deux à deux, ſera $m \cdot (m-1)$ ; mais le nombre des produits réellement différens ſera $\frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2}$ ; car, *par exemple*, le nombre total des produits de trois lettres $a$, $b$, $c$ priſes deux à deux, ſera $3 \times (3-1) = 3 \times 2 = 6$, puiſqu'on peut avoir $ab$, $ac$, $ba$, $ca$, $bc$, $cb$;

mais, à cause de $ab = ba$, de $ac = ca$, de $bc = cb$, le nombre des produits réellement différens, n'est que la moitié du nombre total des produits : donc, &c. Pour avoir le nombre des produits, réellement différens, que peut donner un nombre $m$ de lettres prises trois à trois, il faut remarquer que chacune ne peut être multipliée que par les produits des autres prises deux à deux, & que le nombre total des produits d'un nombre $m$ de lettres prises deux à deux étant $m \cdot (m-1)$, celui d'un nombre $m-1$ de lettres sera $(m-1) \cdot (m-2)$ : donc le nombre total des produits de ces lettres prises trois à trois sera $m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$; mais, parce que trois lettres $a$, $b$, $c$ fournissent six produits égaux (lemme précédent) le nombre trouvé est six fois trop grand : donc le nombre des produits réellement différens sera $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Par un raisonnement semblable on verra que le nombre total des produits de quatre lettres est $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$; mais, parce que quatre lettres (lemme précédent) donnent 24 produits égaux, le nombre des produits réellement différens sera 24 fois plus petit que le nombre total des produits; donc il sera $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. On verra de même qu'en prenant les lettres cinq à cinq, le nombre des produits réellement différens sera $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot (m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ & ainsi de suite.

LEMME IV. *Si on multiplie un nombre quelconque* m *de binomes, tels que* $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, &c. *dont le premier terme soit le même, le premier terme du produit sera* $x$ *élevé à l'exposant* m,

*ſans autre coefficient que l'unité ; le ſecond terme contiendra* x *élevé à un expoſant moindre d'une unité, avec un coefficient égal à la ſomme des ſeconds termes* ( par coefficient on entend ici tout ce qui multiplie une puiſſance de *x* ); *le troiſiéme terme renfermera* x *élevé à un expoſant moindre d'une unité que le précédent, avec un coefficient égal à la ſomme des produits réellement différens que peuvent donner les lettres* a, b, c, *&c. combinées deux à deux. En général l'expoſant de* x *ira toujours en diminuant d'une unité juſqu'au dernier tèrme dans lequel* x *ne ſe trouvera pas à cauſe de* $x^0 = 1$ (28). *A l'égard des coefficiens, celui du premier terme ſera* $= 1$, *celui du ſecond ſera la ſomme de toutes les lettres* a, b, c, *&c. celui du troiſiéme la ſomme des produits réellement différens des mêmes lettres combinées deux à deux ; celui du quatriéme la ſomme des produits réellement différens des lettres* a, b, c, *&c. priſes trois à trois & ainſi de ſuite juſqu'à dernier terme qui contiendra ſeulement le produit de toutes les lettres* a, b, c, *&c.* En effet $(x+a)\cdot(x+b)$ eſt $= x^2 + ax + ba$ ; $(x+a)\cdot(a+b)\cdot(x+d)$ eſt

$$= x^3 + ax^2 + abx + abd ; \text{ \& ainſi des autres :}$$
$$+ bx^2 + adx$$
$$+ dx^2 + bdx$$

donc en ſuppoſant $a = b = d$, ce dernier produit deviendra $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3$, ce qui fait voir encore que les expoſans de *x* vont en diminuant d'une unité d'un terme à l'autre : donc ſi la puiſſance eſt *m*, c'eſt-à-dire, ſi l'on a $(x+a)^m$, les expoſans de *x* ſeront *m*, $m-1$, $m-2$, &c. A l'égard des coefficiens, ils ſeront 1 pour le pre-

mier terme, $\frac{ma}{1}$ pour le ſecond, $\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot a^2$ pour le troiſiéme, $\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^3$ pour le quatriéme, & ainſi de ſuite. Cela ſuit de ce que nous venons de dire; puiſque pour avoir le coefficient du troiſiéme terme, *par exemple*, il faut prendre le nombre des produits réellement differens d'un nombre $m$ de lettres priſes deux à deux; mais en ſuppoſant chacune des lettres égale à $a$, chacun de ces produits ſera $= a^2$; d'un autre côté le nombre de ces produits eſt $\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}$. Donc le coefficient du troiſiéme terme ſera $\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}a^2$; celui du quatriéme ſera $\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^3$: puiſque chaque produit de trois lettres eſt dans ce cas $= a^3$, & ainſi des autres. Donc la formule générale du Binome $(x+a)^m$ ſera $x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}a + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}a^2$ &c. Lorſque $m = 2$, la ſuite finit au troiſiéme terme, parce que $m-2=0$ doit multiplier tous les termes ſuivans; en un mot la ſuite finit, lorſque le nombre négatif qui eſt joint à $m$ eſt devenu $= m$.

Parce que $x^{m-1}$ eſt $= \frac{x^m}{x}$, $x^{m-2} = \frac{x^m}{x^2}$, $x^{m-3} = \frac{x^m}{x^3}$, &c. On peut transformer notre formule en cette autre, $(x+a)^m = x^m + \frac{max^m}{x} + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\times\frac{x^m a^2}{x^2}$ + &c. $= x^m\left(1 + m\frac{a}{x} + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{a^2}{x^2}\right.$

$+$ &c.). De-là on tire la regle ſuivante, pour avoir la puiſſance $m$ du Binome $x+a$. Ecrivez ſur une premiere ligne les quantités

$$\frac{m}{1}, \quad \frac{m-1}{2}, \quad \frac{m-2}{3}, \quad \frac{m-3}{4}, \text{ \&c.}$$

$$1+\frac{m}{1}\cdot\frac{a}{x}+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{a^2}{x^2}+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{a^3}{x^3}, \text{ \&c.}$$

Et ayant écrit l'unité au-deſſous, & à une place plus avancée vers la gauche, formez la ſuite inférieure par cette loi; multipliez cette unité par le premier terme de la ſuite ſupérieure & par $\frac{a}{x}$ pour avoir le ſecond terme de la ſuite inférieure; multipliez ce ſecond terme par le ſecond de la ſuite ſupérieure & encore par $\frac{a}{x}$, vous aurez le troiſiéme terme de la ſuite inférieure, & ainſi de ſuite; multipliez enfin la ſuite inférieure par $x^m$, & vous aurez la puiſſance $m$ de $x+a$, c'eſt-à-dire, que vous aurez $(x+a)^m$. Si on vouloit avoir $(x^3+a^2)^m$, au lieu de multiplier par $\frac{a}{x}$ on multiplieroit par $\frac{a^2}{x^3}$, & enſuite par $x^{3m}$. Suppoſons qu'on demande la troiſiéme puiſſance de $x+a$, on aura $3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ & $(x+a)^3 = x^3\left(1+\frac{3a}{x}+3\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)$; & pour avoir la puiſſance $m$ d'un trinome $c+b+d$, on fera $c=x$, & $b+d=a$; ſubſtituant dans la formule les valeurs de $x, x^2$, &c. de $a, a^2$, &c. on aura la puiſſance cherchée. La formule peut s'appliquer à un polinome quelconque, en ſuppoſant le premier terme du polinome $=x$ & la ſomme de tous les autres $=a$.

De-là il ſuit que, pour avoir la racine $m$ de la

quantité $a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \cdot (m-1)}{2} a^{m-2}b^2$ &c.

Il faut d'abord prendre la racine $m$ du premier terme $a^m$, cette racine eſt $a$; l'ayant écrite à la racine,

| | |
|---|---|
| $a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \cdot (m-1)}{2} a^{m-2}b^2 +$ &c. | $a + b$ |
| 0 | |
| $-a^m$ | $ma^{m-1}$ |

j'éleve $a$ à la puiſſance $m$, pour ſouſtraire $a^m$ de la quantité propoſée; prenant enſuite pour diviſeur le produit de l'expoſant $m$ de la racine, par la puiſſance $m-1$ du premier terme $a$ de la racine, je diviſe le terme affecté de $a^{m-1}$ par $ma^{m-1}$, le quotient eſt $+b$ que j'écris à la racine; de ſorte que la racine cherchée eſt $a+b$.

Lorſque la quantité propoſée peut ſe réduire à un nombre $m+1$ de termes, en prenant pour un ſeul terme tous ceux qui contiennent la même puiſſance de $a$, & qu'elle n'en a qu'un affecté de $a^m$, tandis qu'elle en a pluſieurs affectés de $a^{m-1}$, l'on peut trouver tous les termes de la racine qui ſuivent le premier, en diviſant de ſuite tous les termes affectés de $a^{m-1}$. Mais ſi l'on ne peut pas réduire la quantité propoſée (que je ſuppoſe toujours contenir un ſeul terme affecté de $a^m$) à un nombre $m+1$ de termes, on ordonnera par rapport à la lettre $a$, & après avoir trouvé le premier terme $a$, on ſouſtraira $a^m$ de la quantité propoſée, & diviſant le terme ſuivant par $ma^{m-1}$, l'on écrira le quotient à la racine. Elevant les deux premiers termes de cette racine à la puiſſance $m$, on ſouſtraira le réſultat de la quantité propoſée; on continuera d'opérer en di-

viſant toujours le terme ſuivant (c'eſt-à-dire celui qui contiendra le plus haut expoſant de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné) par le produit de l'expoſant $m$ multiplié par la puiſſance $m - 1$ de toute la racine trouvée, juſqu'à ce qu'il ne reſte rien. S'il y avoit un reſte qu'on ne pût plus diviſer, de la maniere que nous venons de le dire, ce ſeroit une marque que la quantité propoſée n'eſt pas une puiſſance parfaite, dont on puiſſe extraire la racine exacte demandée.

Si l'on vouloit avoir la racine $m$ d'un nombre, on le partageroit en tranches d'un nombre $m$ de chiffres chacune, excepté la premiere tranche de la gauche, qui ſouvent en contiendra moins*. Prenant enſuite la racine $m$ de cette premiere tranche, on l'écrira à la racine; on élevera cette racine à la puiſſance $m$, pour ſouſtraire le réſultat de la premiere tranche. Abaiſſant enſuite la ſeconde tranche à côté du reſte, on prendra pour diviſeur le produit de l'expoſant $m$ par la puiſſance $m - 1$ de la racine trouvée, on diviſera par cette quantité le premier chiffre de la tranche abaiſſée joint au reſte s'il y en a: on écrira le quotient à la racine; élevant enſuite à la puiſſance $m$ toute la racine trouvée, on verra s'il eſt poſſible de retrancher le réſultat des deux premieres tranches; dans ce cas, le quotient trouvé eſt bon, ſinon il faut le diminuer juſqu'à ce que la ſouſtraction ſoit poſſible. On continuera de même en prenant pour diviſeur le produit de $m$ par la puiſſance $m - 1$ de toute la racine déjà trouvée & pour dividende le premier chiffre de la nouvelle tranche abaiſſée, joint au reſte s'il y

* On ſuppoſe que le nombre eſt aſſez grand pour permettre ce partage.

en a. Si, après avoir opéré sur toutes les tranches, il y a un dernier reste, on pourra continuer l'opération par le moyen des décimales, en ajoutant autant de fois un nombre $m$ de o, qu'on veut avoir de décimales. Ce que nous venons de dire n'a aucune difficulté, après ce que nous avons déjà dit sur les racines quarrées & cubiques des nombres.

La formule du binome sert encore lorsque $m$ est un nombre fractionnaire *positif* ou *négatif*, ou bien encore un nombre *entier négatif*. Pour le prouver, mettons d'abord $\frac{m}{n}$ à la place de $m$ & notre formule $(x+a)^m$ deviendra $(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}\left[1+\frac{m}{n}\cdot\frac{a}{x}+\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{m}{n}-1\right)\cdot\frac{a^2}{x^2}\text{ &c.}\right]$. Supposons que la somme de tous les termes de la série, excepté le premier, soit égale à $p$ pour avoir $p = \frac{m}{n}\cdot\frac{a}{x}+\frac{m}{n}\times\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{a^2}{x^2}$ &c. Ainsi l'on aura $(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} \times (1+p)$. Elevant les deux quantités à la puissance $n$ ce qui se fait en multipliant leur exposant par $n$ (36), & faisant attention que l'exposant de $1+p$ est 1 (car $1+p = (1+p)^1$), on aura $(x+a)^{\frac{mn}{n}} = (x+a)^m = x^{\frac{mn}{n}}(1+p)^n = x^m(1+p)^n$; or $(x+a)^m = x^m\left(1+m\frac{a}{x}+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{a^2}{x^2}\text{ &c.}\right)$

De même $x^m(1+p)^n$ est $= x^m\left(1+np+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\times p^2+\text{&c.}\right)$; parce que les puissances $n$, $n-1$, &c. de 1 sont $= 1$. Si dans cette derniere quantité on

ſubſtitue les valeurs de $p$ & de $p^2$, en ſe bornant (pour ſimplifier) aux termes qui ne paſſent pas le quarré, on aura

$$p = \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m}{n}\left(\frac{\frac{m}{n} - 1}{2}\right) \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.$$

$$p^2 = \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.$$

donc $1 + np + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} p^2 + \&c.$

deviendra $1 + m \cdot \frac{a}{x} + \frac{m \cdot (m-n)}{2\,n} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.$

$$+ \frac{m^2}{n} \cdot \frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.$$

Or le multiplicateur de $\frac{a^2}{x^2}$ ſe réduit à $m\left(\frac{m-n}{2\,n} + \frac{m \cdot n - m}{2\,n}\right) = m\left(\frac{m \cdot n - n}{2\,n}\right) = \frac{m \cdot (m-1)}{2}$. En continuant, on trouveroit que le multiplicateur de $\frac{a^3}{x^3}$ ſe réduit à $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, & ainſi de ſuite; donc $(1+p)^m$ eſt $= 1 + m\frac{a}{x} + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^2}{x^2}$ + &c. donc $x^m (1 + p)^m = x^m \left(1 + m\frac{a}{x} + \right.$ $\left. + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.\right)$ eſt $= (x + a)^m$ : donc, prenant la racine $n$ de ces deux quantités égales, on aura $(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} \left(1 + m\frac{a}{x} + \&c.\right)^{\frac{1}{n}}$ $= x^{\frac{m}{n}} (1 + p)$, & $(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} \left[1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x}\right.$ $\left. + \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{\frac{m}{n} - 1}{2}\right) \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.\right]$. Donc la formule aura

lieu, lorsque l'exposant sera un nombre fractionnaire positif. Il en sera de même si l'exposant est un nombre fractionnaire négatif $-\frac{m}{n}$, c'est-à-dire, qu'on aura $(x+a)^{-\frac{m}{n}} = x^{-\frac{m}{n}}(1 - \frac{m}{n} \times \frac{a}{x} + \text{\&c.})$, quantité que nous supposons $= S$, ce qui donnera $S = \frac{(x+a)^{-\frac{m}{n}}}{1} = \frac{1}{(x+a)^{\frac{m}{n}}}$ * ; or $S = (x+a)^{-\frac{m}{n}}$ étant multipliée par $(x+a)^{\frac{m}{n}}$ doit évidemment donner 1 ; multiplions donc $S$, ou sa valeur supposée $x^{-\frac{m}{n}}[1 - \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m}{n} \times (\frac{m}{n} + 1) \cdot \frac{a^2}{x^2} - \text{\&c.}]$ par $(x+a)^{\frac{m}{n}}$, c'est-à-dire, par $x^{\frac{m}{n}}[1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m}{n} \cdot \frac{(\frac{m}{n} - 1)}{2} \frac{a^2}{x^2} + \text{\&c.}]$ ; & nous bornant, pour simplifier, aux termes qui ne passent pas le quarré, nous aurons

$$x^{\frac{m}{n}-\frac{m}{n}}\Big[1 - \frac{m}{n}\cdot\frac{a}{x} + \frac{m}{n}\cdot\frac{(\frac{m}{n}+1)}{2}\frac{a^2}{x^2} \text{ \&c.}$$
$$+\frac{m}{n}\cdot\frac{a}{x} \qquad -\frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{x^2}$$
$$+\frac{m}{n}\cdot\frac{(\frac{m}{n}-1)}{2}\cdot\frac{a^2}{x^2}$$

* Voyez la note du N°. 28.

Si nous considérons attentivement ce résultat, nous trouverons que le multiplicateur de $\frac{a}{x}$ est $= 0$; il en est de même de celui de $\frac{a^2}{x^2}$; & en poussant plus loin le calcul, on verra facilement que tous les coefficiens des puissances ultérieures de $\frac{a}{x}$ se réduisent à 0 : donc le produit que nous venons de trouver, est $= x^0 \times 1 = 1$ : donc la formule réussit encore, lorsque l'exposant est un nombre fractionnaire négatif $-\frac{m}{n}$. Si l'on suppose le dénominateur $n = 1$, l'exposant deviendra $= -m$ c'est-à-dire, que la formule a encore lieu, lorsque l'exposant est un nombre entier négatif.

De ce que nous venons de dire, il suit que la puissance $m$ du binome $a + b$ est $(a+b)^m = (a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b +$ &c. $= a^m (1 + m \cdot \frac{b}{a} +$ &c.), $m$ étant un nombre quelconque positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

PROBLEME. *Extraire la racine cubique du nombre 1001.* Je partage ce nombre en deux parties telles, que la premiere soit le plus grand cube contenu dans 1001, c'est ici 1000, cube de 10, l'autre partie sera $= 1$; faisant ensuite $1000 = x$ & $a = 1$, $m = \frac{1}{3}$, j'aurai $(x+a)^{\frac{1}{3}} = (1000+1)^{\frac{1}{3}} = (1000)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}(1000)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{9}(1000)^{-\frac{5}{3}} + \frac{5}{81} \times$

$(1000)^{-\frac{2}{3}}$ — &c. * $= 10\left[1 + \frac{1}{3}(0 \cdot 001)\right.$ — &c. ] Mais quoique ce ne ſoit qu'en prenant une infinité de termes qu'on peut avoir dans cet exemple la racine exacte cherchée; cependant il eſt aiſé de voir que les termes de la ſérie décroiſſent ſi rapidement qu'on peut ſans erreur ſenſible ſe contenter des quatre premiers, & dans les cas ſemblables l'approximation ſera d'autant plus prompte, que la premiere partie du nombre ou de la quantité algébrique, dont on veut avoir la racine, ſera plus grande par rapport à l'autre. En effet $(a+b)^{\frac{1}{3}}$ eſt $= a^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{b}{a} - \frac{1}{9}\frac{b^2}{a^2} + \text{&c.}\right)$; or les termes de cette ſuite diminuent d'autant plus rapidement que $a$ eſt plus grand que $b$. Les ſuites, dont les termes vont en diminuant, s'appellent *convergentes* : celles au contraire, dont les termes vont en en augmentant, ſont nommées *divergentes*, telle ſeroit (en ſuppoſant $a < b$) la ſérie $1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$ &c.

Si on vouloit prendre la racine quarrée de 2, on en chercheroit une racine approchée, en ſuppoſant, *par exemple*, cette racine $= 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$, dont le quarré $\frac{49}{25}$ eſt plus petit que 2 d'un $\frac{1}{25}$. C'eſt pourquoi on feroit $a = \frac{49}{25}$, $b = \frac{1}{25}$, $m = \frac{1}{2}$, & ſubſtituant ces valeurs dans $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2$ &c. l'on auroit facilement la racine cherchée très-approchée de 2.

* $x^{m-1}a$ eſt ici $= x^{m-1} \times 1 = x^{m-1} = (1000)^{\frac{2}{3}}$
$= (1000)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(1000)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1000)^2}} = \frac{1}{100} = 0 \cdot 01$

## DES RAISONS ET PROPORTIONS.

40. Un *rapport*, ou une *raiſon*, eſt la maniere d'être d'une grandeur par rapport à une autre grandeur de même eſpece (car on ne peut pas comparer des quantités hétérogènes, ou d'eſpece différente, comme 2 heures & 3 toiſes). Si l'on compare deux grandeurs 6 & 2 pour en connoître la différence, la raiſon eſt appellée *raiſon arithmétique*; mais ſi on cherche combien de fois la premiere grandeur 6 contient la ſeconde 2, le rapport eſt appellé *géométrique*. La premiere de deux grandeurs que l'on compare, s'appelle l'*antécédent*, & la ſeconde le *conſéquent* de la raiſon. Il eſt aiſé de voir que la valeur de la raiſon géométrique ſe trouve en diviſant l'antécédent par le conſéquent; puiſque c'eſt par la diviſion que l'on trouve combien de fois une grandeur contient l'autre. On pourroit prendre pour valeur de la raiſon géométrique le quotient du conſéquent diviſé par l'antécédent: ainſi que le font quelques Géometres; mais il nous paroît bien plus commode de prendre pour la valeur de cette raiſon, le quotient de l'antécédent diviſé par le conſéquent. La valeur de la raiſon arithmétique doit ſe trouver par la ſouſtraction, opération par laquelle on trouve la différence de deux quantités. Quand on parle d'une raiſon, ſans la ſpécifier, on entend toujours parler de la géométrique.

De ce que nous venons de dire, il ſuit que la raiſon de 6 à 2 eſt $= \frac{6}{2} = 3$, c'eſt-à-dire, que le quotient 3, qu'on appelle encore l'*expoſant* de la raiſon, indique la maniere dont l'antécédent contient le conſéquent. On peut donc exprimer une raiſon géométrique par une fraction, dont le numérateur ſoit

l'antécédent, & le dénominateur le conſéquent : de ſorte que la raiſon de $a$ à $b$ s'exprime ainſi $\frac{a}{b}$, ou bien encore de cette maniere $a : b$ ; mais la raiſon arithmétique de $a$ à $b$ s'exprime ainſi $a \cdot b$.

On appelle *proportion* l'égalité de 2 raiſons ; la proportion eſt géométrique, ſi ces raiſons ſont géométriques : elle eſt arithmétique, ſi les 2 raiſons égales ſont arithmétiques. Les raiſons $12 : 6$, $4 : 2$, étant égales, formeront une proportion géométrique ( en parlant d'une proportion, ſans ſpécifier laquelle, on entend toujours parler de la géométrique ) qu'on exprime ainſi $12 : 6 :: 4 : 2$, ou bien de cette autre maniere $\frac{12}{6} = \frac{4}{2}$. Les deux raiſons arithmétiques égales $7 \cdot 2$, $6 \cdot 1$ donnent une proportion arithmétique, qu'on écrit ainſi $7 \cdot 2 : 6 \cdot 1$. Pour exprimer dans le diſcours la proportion $a : b :: c : d$, on dit $a$ eſt à $b$, comme $c$ eſt à $d$ ; mais, pour exprimer la proportion arithmétique $g \cdot f : p \cdot m$, on dit $g$ eſt à $f$ arithmétiquement, comme $p$ eſt à $m$. Le premier & le dernier terme d'une proportion s'appellent les *extrêmes*, le ſecond & le troiſiéme s'appellent les *moyens*. Si les deux moyens ſont les mêmes, comme dans la proportion $12 : 6 :: 6 : 3$, la proportion eſt dite *continue*, on l'exprime ainſi $\div\div 12 : 6 : 3$. Si la proportion continue a plus de trois termes, elle prend le nom de *progreſſion* : telle eſt la ſuite $\div\div 16 : 8 : 4 : 2 : 1$, qui donne une progreſſion géométrique ; ou bien la ſuite $\div 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0$, qui forme une progreſſion arithmétique. La raiſon s'appelle *double*, lorſque l'antécédent contient deux fois le conſéquent ; *triple*, s'il le contient trois fois ; &c. *ſous-double*, *ſous-triple*, &c. Si l'antécédent ne con-

tient que la moitié, ou le tiers, &c. du conſéquent; *ſeſquialtere*, lorſque l'antécédent contient une fois & demi le conſéquent, telle eſt la raiſon de 6 : 4; raiſon d'*égalité* ſi l'antécédent eſt égal, raiſon d'*inégalité* ſi l'antécédent n'eſt pas égal au conſéquent. *On dit que trois nombres 6, 4, 3 ſont en proportion harmonique*, lorſque le premier eſt au troiſiéme, comme la différence du premier au ſecond à la différence du ſecond au troiſiéme; de maniere que l'on ait 6 : 3 :: 6 — 4 : 4 — 3, ou 6 : 3 :: 2 : 1.

LEMME. *Le produit du conſéquent d'une raiſon par l'expoſant de la raiſon, eſt égal à l'antécédent.* Car l'antécédent eſt le *dividende*, le conſéquent le *diviſeur* & l'expoſant le *quotient*; or le produit du diviſeur par le quotient eſt toujours égal au dividende : donc, &c.

COROLLAIRE. Si la raiſon $\frac{a}{b}$ eſt $= q$, on aura $a = bq$; de même ſi $\frac{c}{d} = q$, l'on aura $c = dq$.

41. THÉOREME I. FONDAMENTAL. *Dans toute proportion géométrique* a : b :: c : d, *le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.* Soit la raiſon $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$: donc par le corollaire précédent $a = bq$, & $c = dq$: donc en mettant dans la proportion précédente $bq$ à la place de $a$ & $dq$ à la place de $c$ on aura la proportion $bq : b :: dq : d$, dans laquelle le produit des extrêmes $bqd = bdq$, produit des moyens; de même dans la proportion 6 : 3 :: 8 : 4 on a $6 \times 4 = 3 \times 8 = 24$.

42. THÉOREME II. *Si quatre grandeurs* ap, a, bp, b, *ſont telles que le produit des extrêmes* ap. b *ſoit égal*

*égal au produit des deux moyennes* a · bp, *ces quatre grandeurs seront proportionnelles.* Car si $ap \times b$ est $= a \times bp$, on aura $\frac{ap}{a} = \frac{bp}{b}$, ou $ap : a :: bp : b$; puisque l'exposant de la premiere raison est $= p$, aussi-bien que celui de la seconde.

COROLLAIRE. Donc, si on a deux produits égaux, tels que $adb = abd$, les *racines* de l'un des produits (on entend ici, par racines, les quantités de la multiplication desquelles résulte le produit) seront les extrêmes d'une proportion, dont les racines de l'autre produit seront les moyens, ou ce qui revient au même, les racines de l'un des produits seront *réciproques* à celle de l'autre, c'est-à-dire, que l'on aura *ad* racine du premier produit, est à *a* racine du second, comme *bd*, autre racine du second, est à *b*, seconde racine du premier produit.

On dit que deux quantités sont *réciproquement* comme deux autres quantités, ou sont en *raison inverse* des deux autres, lorsque, pour trouver la proportion, il faut renverser l'ordre des deux dernieres, ou celui des deux premieres. Ainsi 6 & 3 sont en raison inverse de 1 & 2 : car, pour faire la proportion, en laissant les premieres quantités dans l'état qu'elles sont, il faut, au lieu de la raison de 1 : 2, prendre celle de 2 : 1, en disant 6 : 3 :: 2 : 1.

COROLLAIRE. Il suit du premier théorême que, dans une proportion continue $\dot{\dot{\cdot}}\ a : b : c$, le produit des extrêmes est égal au quarré du moyen terme, c'est-à-dire, que $ac = b^2$. En effet la proportion précédente est la même que celle-ci $a : b :: b : c$; or (41) $ac$ est $= bb$; donc &c. De même dans la proportion continue $\dot{\dot{\cdot}}\ 18 : 6 : 2$, on a $18 \times 2 = 36 = 6^2 = 6 \times 6 = 36$.

COROLLAIRE. Si l'on a la proportion $a : b :: c : d$, on pourra multiplier ou diviſer par une même quantité, les conſéquens ou les antécédens, ou même les 2 termes de la premiere ou de la ſeconde raiſon, ſans détruire la proportion, je veux dire, ſans qu'on ceſſe d'avoir une proportion; car les raiſons de la proportion qui réſultera de ces opérations, ne ſeront pas toujours égales à celle de la premiere proportion. Si donc on a la proportion $a : b :: c : d$, on aura

I. $am : b :: cm : d$ $\quad \frac{a}{m} : b :: \frac{c}{m} : d$ · IV

II. $am : bm :: c : d$ $\quad a : bm :: c : dm$ · V

III. $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: c : d$ $\quad a : \frac{b}{m} :: c : \frac{d}{m}$ · VI

car dans toutes ces proportions le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. En effet, pour la premiere, ſeconde & cinquiéme on a $adm = bcm$, & pour les autres $\frac{ad}{m} = \frac{cb}{m}$; or cela eſt évident, car, puiſque $a : b :: c : d$, on a $ad = bc$: donc $ab \times m = bc \times m$, & $\frac{ad}{m} = \frac{cb}{m}$.

COROLLAIRE. Donc ſi l'on a la proportion $a : b :: c : d$, on pourra faire les changemens ſuivans, ſans qu'il ceſſe d'y avoir proportion; c'eſt-à-dire, que ſi l'on a la proportion $a : b :: c : d$, on aura

*Alternando.* $a : c :: b : d$

*Invertendo.* $b : a :: d : c$

*Componendo.* $a + b : b :: c + d : d$

$a + a : b :: c + c : d$

$a : a + b :: c : c + d$

$a : b + b :: c : d + d$

*Dividendo*, ou *Subtrahendo*.

$a - b : b :: c - d : d$

$a : a - b :: c : c - d$

En effet dans ces proportions le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, ainsi que nous le verrons bientôt. Il est bon de retenir le nom de ces changemens.

Il est facile de voir que le changement appellé *alternando* consiste à faire changer de place aux moyens; mais dans le changement *invertendo* on met les antécédens à la place des conséquens. Dans le changement *componendo* on compare la somme de l'antécédent & du conséquent de chaque raison à son conséquent, ou l'antécédent à cette même somme, ou bien on double les antécédens ou les conséquens. J'appelle *dividendo* ou *subtrahendo* le changement dans lequel on compare la différence de l'antécédent & du conséquent au conséquent, ou bien dans lequel on compare l'antécédent à la différence dont on vient de parler.

Ces changemens ne détruisent pas la proportion, parce que le produit des extrêmes reste toujours égal à celui des moyens: en effet la proportion $a : b :: c : d$ donne $ad = bc$, & la proportion du changement *alternando* donne $ad = cb$; or il est visible que $bc = cb$; mais la proportion du changement *invertendo* donne $bc = ad$. La premiere proportion du changement *componendo* donne $ad + bd = bc + bd$, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens; mais $bd = bd$ & $ad = bc$: donc ces deux produits sont aussi égaux. La troisiéme proportion du même changement doit donner $ac + ad = ac + bc$; or cela est évident, parce que $ad = bc$.

La ſeconde & la quatriéme, doivent donner $2ad = 2bc$ ; ce qui eſt encore évident, puiſque $ad = bc$. La premiere proportion du changement *dividendo* doit donner, ſi elle eſt vraie, $ad - bd = bc - bd$. Mais puiſque $ad = bc$, ces produits ſont évidemment égaux. La ſeconde proportion du même changement doit donner $ac - ad = ac - bc$ : or ces produits ſont égaux, puiſqu'on ne fait que retrancher deux quantités égales $ad$ & $bc$ de la même quantité $ac$ : donc ces changemens ne détruiſent pas la proportion. Cependant, ſi l'on a la proportion $24 : 12 :: 6 : 3$, le changement *alternando* donnera $24 : 6 :: 12 : 3$ qui eſt différente de la premiere, puiſque la raiſon de $24 : 6$ eſt $= 4$, & que celle de $24 : 12$ eſt ſeulement $= 2$. Ainſi les changemens dont on vient de parler peuvent changer une proportion en une autre ; mais il reſtera toujours une proportion.

43. THÉOREME III. *Si deux fractions* $\frac{a}{b}, \frac{a}{d}$ ont *un même numérateur & différens dénominateurs, elles ſeront en raiſon inverſe de leurs dénominateurs, c'eſt-à-dire, que la premiere ſera à la ſeconde, comme le dénominateur de la ſeconde à celui de la premiere, de ſorte que l'on aura* $\frac{a}{b} : \frac{a}{d} :: d : b$. Cette proportion eſt vraie ; car le produit des extrêmes $\frac{ab}{b} = a$, eſt égal à celui des moyens $\frac{ad}{d} = a$.

Si les dénominateurs étoient les mêmes & les numérateurs différens, les fractions ſeroient entre elles comme leurs numérateurs ; car $\frac{a}{d} : \frac{c}{d} :: a : c$ ;

puiſque le produit des extrêmes $\frac{ac}{d}$ eſt $= \frac{ca}{d}$, produit des moyens.

COROLLAIRE. Donc les fractions ſont en raiſon inverſe des dénominateurs & en raiſon directe des numérateurs.

COROLLAIRE. Donc deux grandeurs *en raiſon réciproque* l'une de l'autre, c'eſt-à-dire, dont l'une croît dans le même rapport que l'autre décroît, peuvent ſe mettre en raiſon directe, en les mettant au dénominateur d'une fraction, dont l'unité ſeroit le numérateur : ainſi $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} :: b : a$.

Avant de paſſer plus loin, nous allons expliquer ce qu'on entend par une *raiſon compoſée*. Une raiſon compoſée eſt celle qui réſulte de la multiplication de pluſieurs raiſons, antécédent par antécédent & conſéquent par conſéquent : ainſi $\frac{ac}{bd}$ eſt *une raiſon compoſée* des deux raiſons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. En effet ſoit $\frac{a}{b} = q$, $\frac{c}{d} = p$ ; donc (40) $a = bq$, $c = dp$ : ainſi en ſubſtituant ces valeurs à la place de $a$ & de $c$, on aura $\frac{ac}{bd} = \frac{bdpq}{bd} = pq$, produit des deux raiſons ; de ſorte que ſi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$, l'on aura $\frac{aa}{bd} = q^2$. Lorſqu'il y a deux raiſons compoſantes égales, la raiſon compoſée eſt dite *doublée* ; *triplée* s'il y a trois raiſons compoſantes égales ; *quadruplée*, *quintuplée*, *ſextuplée*, &c. s'il y a quatre, cinq, ſix, &c. raiſons compoſantes égales.

COROLLAIRE. Donc les quarrés ſont en raiſon

doublée & les cubes en raiſon triplée des racines ; car la raiſon $\frac{a^2}{b^2}$ eſt $= \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$.

44. THÉOREME. IV. *Si l'on multiplie, ou ſi l'on diviſe les termes d'une proportion par les termes correſpondans d'une autre proportion, c'eſt-à-dire, le premier de l'une par le premier de l'autre, le ſecond par le ſecond & ainſi de ſuite, les produits & les quotiens ſeront en proportion.* Soient les proportions qu'on voit ici. Je dis que l'on aura les deux autres proportions qu'on voit au-deſſous des premieres ; en effet le produit des extrêmes dans ces deux dernieres proportions eſt égal au produit des moyens. Pour le faire voir, je dis d'abord que $adgn = bchm$, ce qui eſt évident ; car la premiere proportion donne $ad = bc$, & la ſeconde donne $gn = hm$ : donc en multipliant les quantités égales $ad$, $bc$ l'une par $gn$, l'autre par $hm$, on aura $adgn = bchm$. En ſecond lieu, je dis que $\frac{ad}{gn} = \frac{bc}{hm}$, ce qui ſaute aux yeux, puiſqu'on ne fait que diviſer des quantités égales par des quantités égales.

$a : b :: c : d$

$g : h :: m : n$

$ag : bh :: cm : dn$

$\frac{a}{g} : \frac{b}{h} :: \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$

Si on avoit plus de deux proportions & qu'on les multipliât terme à terme, les produits ſeroient encore en proportion ; car on trouveroit toujours que le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens.

45. THÉOREME V. *Dans une ſuite de raiſons égales, la ſomme des antécédens eſt à celle des conſéquens, comme un ſeul antécédent eſt à ſon conſéquent.* Soit la ſuite des raiſons égales $a : b :: e :$

$d :: g : f$, on aura la ſomme des antécédens $a + c + g$ à celle des conſéquens $b + d + f$ comme $a : b$, c'eſt-à-dire $a + c + g : b + d + f :: a : b$; car le produit des extrêmes $ab + bc + bg$ eſt $= ab + ad + af$, produit des moyens; ce qu'on verra aiſément, en faiſant attention, que la proportion $a : b :: c : d$ donne $ad = bc$, & que la proportion $a : b :: g : f$ donne $af = bg$; de ſorte que les deux produits ſont compoſés de quantités égales.

46. THÉOREME VI. *Si trois quantités* a, b, c, *ſont tellement proportionnelles à autant d'autres* d, f, g, *qu'on ait* a : b :: d : f, & b : c :: f : g, *je dis que l'on aura* a : c :: d : g. Car la premiere proportion donne $af = bd$ & la ſeconde donne $bg = cf$ : donc $af : bd :: cf : bg$; ainſi, en diviſant les antécédens par $f$, & les conſéquens par $b$, on aura $a : d :: c : g$, & *alternando* $a : c :: d : g$; c'eſt ce qu'on appelle *conclure par proportion ordonnée*. Si $a : b :: f : g$ & $b : c :: d : f$, on aura, $ag = bf$ & $bf = cd$, & par conſéquent $ag = cd$; donc $a : c :: d : g$ (42), *c'eſt ce qu'on appelle conclure par proportion troublée.*

47. THÉOREME VII. *Les puiſſances quelconques des grandeurs proportionnelles ſont elles-mêmes proportionnelles.*

Suppoſons qu'on ait $a : b :: c : d$, on aura les proportions qu'on voit ici, en ſuppoſant même que $m$ eſt une fraction; car puiſque $a : b :: c : d$, on doit avoir $ad = bc$; donc $a^m d^m = b^m c^m$; donc, &c.

$$a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$$
$$a^3 : b^3 :: c^3 : d^3$$
$$a^m : b^m :: c^m : d^m$$

48. PROBLEME. *Trouver une moyenne proportionnelle* x *entre deux grandeurs* a & b, *de ſorte que l'on*

*ait* a:x :: x:b. On aura donc $ab = xx = x^2$, & en prenant la racine quarrée, $\sqrt{ab} = x$, c'eſt-à dire, que la racine quarrée du produit de deux grandeurs eſt moyenne proportionnelle entre ces grandeurs. Si $a = 2$ & $b = 8$, on aura $x = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$.

49. PROBLEME. *Trouver un terme d'une proportion, dont on connoît les trois autres.* Soit la proportion $a : b :: c : x$, dans laquelle on connoît les trois premiers termes. Pour avoir la valeur du quatriéme $x$, je remarque que le produit des extrêmes $ax$ eſt $= bc$, produit des moyens : donc en diviſant ces deux produits égaux par la même quantité $a$, j'aurai $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$, ou $x = \frac{bc}{a}$, c'eſt-à-dire, que le quatriéme terme d'une proportion eſt égal au produit des moyens diviſé par le premier extrême. Si $b = c$, c'eſt-à-dire, ſi la proportion eſt continue, on aura $x = \frac{b^2}{a}$ ; donc pour avoir le troiſiéme terme d'une proportion continue, on diviſera le quarré du moyen terme par le premier extrême.

Si le terme $x$ cherché étoit un des moyens, ſi l'on avoit, *par exemple*, $a : b :: x : d$, on auroit $ad = bx$ ; & en diviſant de part & d'autre par $b$ l'on trouveroit $x = \frac{ad}{b}$, c'eſt-à-dire, que le moyen cherché ſeroit égal au produit des extrêmes, diviſé par le moyen connu.

REMARQUE. Lorſqu'on a une fraction $\frac{ad}{b}$, on peut toujours faire une proportion, en prenant pour premier extrême le dénominateur de la fraction, & pour moyens les facteurs du numéra-

teur : car $b : a :: d : \frac{ad}{b} = x$. De même de la fraction $\frac{6}{2} = \frac{2\times3}{2}$ l'on tire $2 : 3 :: 2 : \frac{6}{2} = 3$. La fraction $\frac{1}{2} = \frac{1\cdot1}{2}$ donne $2 : 1 :: 1 : \frac{1}{2}$.

Le problême qu'on vient de réſoudre, renferme la regle *de trois*, qu'on appelle auſſi *regle d'or*, à cauſe de ſa grande utilité: c'eſt la méthode de trouver un terme d'une proportion dont on connoît les trois autres.

EXEMPLE. Trente Grenadiers ont fait 24 toiſes de tranchée, combien en feront 50 Grenadiers dans un tems égal. Il eſt évident que, plus il y a d'hommes, plus ils doivent faire d'ouvrage dans le même tems : ainſi l'on doit dire 30 Grenadiers ſont à 50 Grenadiers, comme les 24 toiſes faites par les premiers, au nombre de toiſes que feront les derniers dans le même tems; ou $30^{s} : 50^{s} :: 24^{t} : x^{t}$ : donc il faut, pour avoir la valeur de $x$, multiplier 50 par 24, & diviſer le produit 1200 par 30, pour avoir $x = \frac{1200}{30} = 40$ ; c'eſt-à-dire, que dans le le même tems, ou dans un tems égal, 50 Grenadiers feront 40 toiſes de tranchée, en ſuppoſant que 30 en ont fait 24.

Lorſque les termes *homogènes*, c'eſt-à-dire, de même eſpece dans la premiere raiſon, ſont entr'eux comme ceux de la ſeconde & qu'il n'y a que trois termes de connus, la regle de trois s'appelle *directe ſimple*; s'il y a plus de trois termes connus, c'eſt alors la regle de trois *compoſée*. Il faut dans ce cas la réduire à trois termes connus & un inconnu.

EXEMPLE. Trois hommes en travaillant ſept heures par jour, ont fait en deux jours 84 toiſes d'un ouvrage, combien en feront 5 hommes en trois jours, en travaillant quatre heures par jour. Arran-

gez les termes comme vous le voyez; multipliez 3

$$\begin{array}{lll} 3^{b} & : & 5^{b} \\ 2^{\text{jours.}} & : & 3^{\text{jours.}} \\ 7^{\text{heures.}} & : & 4^{\text{heures.}} \end{array} :: 84 : x$$

$$42 : 60 :: 84 : x = \frac{60 \times 84}{42} = 120$$

par 2 & par 7, pour avoir 42; multipliez 5 par 3 & par 4, pour avoir 60 : faites enſuite la proportion $42 : 60 :: 84 : x = 120$ : donc le nombre cherché eſt 120. La raiſon de ce procédé eſt fort ſimple, c'eſt que trois hommes, qui travaillent pendant deux jours & ſept heures par jour, font le même ouvrage qu'un ſeul homme qui travailleroit pendant 42 heures; de même cinq hommes qui travaillent pendant 3 jours & 4 heures par jour font le même travail qu'un ſeul homme qui travailleroit pendant 60 heures; de ſorte que le travail de ces hommes eſt en raiſon compoſée du nombre des hommes, du nombre des jours & des heures que ces hommes travaillent.

Lorſque les deux derniers termes ne ſont pas entr'eux comme les deux premiers, c'eſt alors la *regle de trois inverſe.*

EXEMPLE. Quatre hommes ont fait un ouvrage en trois jours; en combien de jours cinq hommes feront-ils le même ouvrage? Il eſt évident qu'on ne peut pas dire $4^{b} : 5^{b} :: 3^{j} : x$, autrement le terme cherché $x$ ſeroit plus grand que 3, comme 5 eſt plus grand que 4; or cela ne peut être, parce que cinq hommes emploieront moins de tems au même ouvrage que quatre hommes. Et parce que le tems employé par 4 hommes, eſt au tems employé par 5 hommes, comme $x$ eſt à 3, à cauſe que

plus il y a d'hommes, moins il faudra de tems, on doit faire $4^b : 5^b :: x : 3$ ; donc l'on aura $5x = 12$, & $x = \frac{12}{5} = 2$ jours $+\frac{2}{5}$ de jour $= 2$ jours 9 heures 36 minutes.

Queſtion qui renferme ce qu'on appelle la regle de *compagnie. Trois marchands ont fait un fond de 1200 liv. ſur lequel ils ont gagné 240 liv. combien revient-il au premier, dont la miſe eſt de 200 liv. au ſecond, dont la miſe eſt de 400 liv. & au troſiéme, dont la miſe eſt de 600 livres*? Ce problême ſe réſout par autant de regles de trois, qu'il y a de miſes, en diſant le fond total eſt au gain total, comme la miſe d'un chacun eſt au gain qui lui revient : de ſorte que l'on aura ces trois proportions

| | | | | | Gain |
|---|---|---|---|---|---|
| 1200 | : | 240 | :: | 200 : $x =$ | 40 du premier. |
| 1200 | : | 240 | :: | 400 : $x =$ | 80 du ſecond. |
| 1200 | : | 240 | :: | 600 : $x =$ | 120 du troiſiéme. |

AUTRE EXEMPLE. *Trois marchands, Pierre, Jacques & Paul, ont mis en commerce, le premier 357 liv. pour quinze mois ; le ſecond 1071 liv. pour trois mois ; le troiſiéme 153 liv. pour neuf mois : le gain total eſt de 9631 liv. Quel eſt le gain d'un chacun*? Multipliez la miſe d'un chacun par le tems que cette miſe a reſté dans le commerce, parce que plus la miſe eſt grande & plus le tems qu'elle reſte dans le commerce eſt conſidérable, plus le gain à proportion doit être grand : prenez la ſomme des produits, que vous conſidérerez comme la miſe totale, faites enſuite comme cette ſomme eſt au gain total : ainſi le produit de chaque miſe, par le tems qu'elle a reſté dans le commerce, eſt au gain correſpondant.

PROBLEME qui renferme la regle *d'eſcompte. Pierre achete à Jacques, à un an de terme, pour 1000 liv. de marchandiſes; Jacques offre à Pierre de lui remettre 10 pour 100, s'il veut le payer comptant : on demande le gain de Pierre ?* Il paroît d'abord que le marchand ne doit recevoir comptant que 900 livres; mais il faut remarquer que la ſomme que recevra actuellement le marchand, doit à 10 pour 100 rendre 1000 liv. au bout de l'année (en comprenant enſemble le capital & ſes intérêts) : ainſi il faut dire $100+10:100::1000$ l. $:x=909$ l. 1 ſ. 9 d. $\frac{9}{11}$ d.; de ſorte que le profit de Pierre ſera ſeulement de 90 liv. 18 ſ. 2 d. $\frac{2}{11}$ d. Si Jacques ne recevoit comptant que 900 liv. cet argent à 10 pour 100 ne lui donneroit au bout de l'an que 990 liv: ainſi ſon ſort ſeroit plus heureux d'attendre les 1000 liv. au bout de l'année. Cette pratique eſt celle de le Gendre & de Savari. Diſons quelque choſe de la regle de *fauſſe poſition*.

La regle de *fauſſe poſition* conſiſte à mettre à la place des termes inconnus d'autres termes à volonté, mais cependant proportionnels à ces termes inconnus, afin de trouver ces termes par des regles de trois.

EXEMPLE I. On propoſe de partager 1300 liv. entre Pierre, Jean & Jacques, enſorte que Pierre ait cinq fois plus que Jean & Jean deux fois plus que Jacques. Soit ſuppoſé 1 la part de Jacques, celle de Jean ſera 2 & celle de Pierre 10, la ſomme ſeroit 13 : ainſi on dira ſi 13 donnent 10 pour Pierre, combien donneront 1300 pour le même Pierre, & ainſi des autres. On aura donc ces trois regles de trois.

| | | | | | | Part de |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | : | 1300 | :: | 10 | : $x$ = | 1000 Pierre |
| 13 | : | 1300 | :: | 2 | : $x$ = | 200 Jean |
| 13 | : | 1300 | :: | 1 | : $x$ = | 100 Jacques. |

EXEMPLE II. Soit proposé de partager 173 liv. à trois personnes, de maniere que la seconde ait le double de la premiere & 10 l. de plus, & que la troisiéme ait autant que les deux autres & 3 liv. de plus. Supposons que la part de la premiere soit 1 liv. celle de la seconde, dans cette hypothèse, seroit 2 l. + 10 l. = 12 l. & celle de la troisiéme seroit 13 liv. + 3 liv. = 16 liv. La somme de ces parties seroit = 29 liv. S'il n'eût été question que de partager en parties proportionnelles à 1 liv., 2 liv., 3 liv. La premiere part seroit 1 l. la seconde 2 liv. la troisiéme 3 liv. la totalité seroit 6 liv. dont la différence avec 29 liv. est 23 liv. qu'il faut prélever sur la somme proposée 173 liv. & partager le reste 150 liv. en parties proportionnelles à 1 liv. 2 liv. 3 liv. On aura donc cette regle de trois 6 : 1 :: 150 : $x$ = 25 liv. premiere partie; doublant cette partie, & ajoutant 10 liv. on aura 60 liv. pour la seconde partie; ajoutant ces deux parties avec 3 liv. on aura 88 liv. pour la troisiéme partie : en effet ces trois parties font 173 liv. Ce second exemple renferme la regles de deux *fausses positions.*

## *DES PROGRESSIONS GEOMETRIQUES.*

50. Nous supposerons pour plus de facilité, premiérement que les progressions sont croissantes; secondement que le quotient du premier terme divisé

par le second est $= \frac{1}{p}$, ce qui, en supposant que $a$ est le premier terme, donnera $ap$ pour le second terme : en effet le second terme peut être regardé comme le diviseur & le premier comme le dividende ; or le diviseur est égal au dividende divisé par le quotient ; mais $a = \frac{a}{1}$ étant divisé par $\frac{1}{p}$, donne selon la regle de la division des fractions, $ap$ pour quotient ; donc $ap$ est le second terme. Pour avoir le troisiéme, il faudra de même diviser le second par le quotient $\frac{1}{p}$, ce qui donnera $ap^2$ pour le troisiéme, & ainsi des autres.

51. THÉOREME VIII. *Toute progression géométrique peut être représentée par la progression* $\div\div$ a : ap : $ap^2$ : $ap^3$ : $ap^4$ : $ap^5$ *&c.* En effet une progression n'est autre chose qu'une proportion continue, qui a plus de trois termes, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus, c'est-à-dire, qu'une progression n'est autre chose qu'une suite des raisons égales, dans laquelle chaque terme, excepté le premier & le dernier, est antécédent d'une raison & conséquent de l'autre ; donc le quotient de deux termes quelconques, immédiatement consécutifs, doit toujours être le même : donc, &c.

J'ai dit, excepté le premier & le dernier ; car il est visible que le premier terme $a$ est seulement antécédent de la premiere raison, & que le dernier terme $ap^5$ est seulement conséquent de la derniere raison.

COROLLAIRE. Un terme quelconque, *par exemple*, le cinquiéme se trouvera facilement en multipliant le premier terme $a$ par la quantité $p$ (que

nous appellerons l'*expoſant* de la progreſſion ) élevée à un expoſant égal au nombre des termes précédens.

COROLLAIRE. Donc, pour trouver un terme quelconque $x$ du rang $n$, il faudra multiplier le premier terme $a$ par $p^{n-1}$ pour avoir $x = ap^{n-1}$.

52. THÉREME IX. *Dans une progreſſion géométrique le produit de deux termes également éloignés des extrêmes, eſt égal au produit des extrêmes.* Car il eſt viſible, *par exemple*, que $ap \times ap^4$ eſt $= a \times ap^5$.

COROLLAIRE. Si le nombre des termes de la progreſſion eſt impair, l'on aura le quarré du terme moyen, égal au produit des extrêmes : ce qui eſt évident dans la progreſſion précédente; car en ſe bornant à cinq termes, l'on aura le produit des extrêmes $a \times ap^4 = a^2p^4$, quarré du terme moyen.

53. THÉOREME X. *Dans une progreſſion géométrique, la ſomme des antécédens eſt à celle des conſéquens, comme un antécedent eſt à ſon conſéquent.* Tous les termes, excepté le dernier, ſont antécédens, ainſi que nous l'avons déjà dit ci-deſſus, & tous les termes, excepté le premier, ſont conſéquens, par la nature de la progrſſion $\dot{\dot{:}}\ a : ap : ap^2 : ap^3$ &c. Cela poſé, je dis que $a + ap + ap^2 : ap + ap^2 + ap^3 :: a : ap$ ; car le produit des extrêmes $a^2p + a^2p^2 + a^2p^3$ eſt $= a^2p + a^2p^2 + a^2p^3$, produit des moyens.

COROLLAIRE. Nommant le dernier terme $x$, la ſomme de tous les termes de la progreſſion S, on aura $S - x : S - a :: a : ap$. Donc le produit des extrêmes $Sap - apx = Sa - a^2$, produit des moyens. En ajoutant à ces 2 quantités égales $+ apx$ & retranchant de ces deux quantités, la quantité $Sa$ ( ce qui laiſſe toujours l'égalité entre ces deux gran-

deurs), on aura $Sap - apx + apx - Sa = Sa + apx - Sa - a^2$, ou (en réduisant) $Sap - Sa = apx - a^2$, divisant ces deux dernieres quantités par $a$, l'on aura les quotiens égaux $Sp - S = px - a$, & divisant encore par $p - 1$, on a $S = \frac{px - a}{p - 1}$, c'est-à-dire, que la somme de tous les termes d'une progression croissante, est égale au produit du plus grand terme par l'exposant de la progression, moins le plus petit terme, le tout divisé par l'exposant, diminué d'une unité.

COROLLAIRE. Donc la somme

| | | | | sera |
|---|---|---|---|---|
| Des moitiés..... | $\frac{1}{2}$, | $\frac{1}{4}$, | $\frac{1}{8}$.....0 = | 1. |
| Celle des tiers..... | $\frac{1}{3}$, | $\frac{1}{9}$, | $\frac{1}{27}$.....0 = | $\frac{1}{2}$. |
| Celle des quarts..... | $\frac{1}{4}$, | $\frac{1}{16}$, | $\frac{1}{64}$.....0 = | $\frac{1}{3}$. |
| Celle des dixiémes..... | $\frac{1}{10}$, | $\frac{1}{100}$, | $\frac{1}{1000}$....0 = | $\frac{1}{9}$. |

Car, en regardant le premier terme comme le dernier, 0 sera le premier terme, $p$ sera 2 dans la premiere progression 3 dans la seconde, 4 dans la troisiéme, 10 dans la quatriéme: donc pour la premiere $\frac{px - a}{p - 1} = \frac{2 \times \frac{1}{2} - 0}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$; pour la seconde $\frac{px - a}{p - a} = \frac{3 \times \frac{1}{3} - 0}{3 - 1} = \frac{1}{2}$; pour la troisiéme $\frac{px - a}{p - 1} = \frac{1}{3}$; & pour la quatriéme $\frac{px - a}{p - 1} = \frac{1}{9}$ & ainsi de suite. On trouvera donc la somme de toutes parties quelconques de l'unité, dont la suite sera une progression géométrique, en retranchant l'unité du dénominateur du premier terme de la suite.

54. THÉOREME XI. *Dans une progression géométrique*

*trique* $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ a : ap : $ap^2$ : $ap^3$ &c. *Premiérement les ſommes ; ſecondement les différences ; troiſiémement les produits des termes immédiatement conſécutifs ſont en progreſſion géométrique.* Car on a

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ $a + ap : ap + ap^2 : ap^2 + ap^3$ &c.

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ $a - ap : ap - ap^2 : ap^2 - ap^3$ &c.

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ $a^2p^2 : a^2p^3 : a^2p^5$ &c.

Ce qui eſt évident ; car chacun des termes de ces ſuites, eſt égal à celui qui le précéde immédiatement, diviſé par $\frac{1}{p}$.

55. THEOREME XII. *Dans une progreſſion géométrique les puiſſances de même nom ſont en progreſſion.* Soit toujours la progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ $a : ap : ap^2 : ap^3$ &c. je dis que l'on aura la progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ $a^m : a^m p^m : a^m p^{2m} : a^m p^{3m}$ &c. Ce qui eſt évident, car chaque terme eſt égal à celui qui les précéde, diviſé par $\frac{1}{p^m}$. Si on ſuppoſe $m = \frac{1}{2}$, on aura $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}} p$ &c., c'eſt-à-dire, que les racines quarrées des termes conſécutifs ſont en progreſſion, & il en eſt de même des racines cubes & autres quelconques.

56. THÉOREME XIII. *Dans une progreſſion géométrique, le premier terme eſt au troiſiéme, comme le quarré du premier au quarré du ſecond ; le premier eſt au quatriéme, comme le cube du premier au cube du ſecond.* Car $a^2 : a^2p^2 :: a : ap^2$ ; puiſque le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. De même $a^3 : a^3p^3 :: a : ap^3$ ; car le produit des extrêmes eſt encore égal à celui des moyens. En général le premier terme eſt à un terme quelconque du rang $n$, comme la puiſſance $n-1$ du premier terme à la puiſſance $n-1$ du ſecond terme. En effet le terme du rang $n$ eſt $= ap^{n-1}$ (51) ; or $a :$

$ap^{n-1} :: a^{n-1} : a^{n-1}\, p^{n-1}$ : car le produit des extrêmes $a\, p^{n-1} = a^n\, p^{n-1}$, produit des moyens.

COROLLAIRE. Donc la raiſon du premier terme au troiſiéme eſt doublée, & la raiſon du premier terme au quatriéme eſt triplée de la raiſon du premier au ſecond, puiſque $\frac{a}{ap^2} = \frac{a^2}{a^2 p^2}$, & que $\frac{a}{ap^3} = \frac{a^3}{a^3 p^3}$.

57. PROBLEME. *Trouver deux moyens proportionnels* x, y, *entre deux quantités données* a & d, *c'eſt-à-dire, qu'ayant la progreſſion* a : x : y : d, *on cherche la valeur de* x & *de* y. Par le théorême précédent on a $a^3 : x^3 :: a : d$; donc $a^3 d = x^3 a$, & en diviſant le tout par $a$, il vient $a^2 d = x^3$, & en prenant la racine cubique, on a $x = \sqrt[3]{a^2 d}$, c'eſt-à-dire, que pour avoir la premiere moyenne proportionnelle, il faut extraire la racine cube du produit du quarré de la premiere quantité donnée $a$ par la ſeconde $d$. Pour avoir $y$ ou la ſeconde moyenne proportionnelle, on diviſera le quarré $x^2$ de la premiere par la premiere quantité $a$, parce que la proportion continue $a : x :: x : y$, donne $y = \frac{xx}{a}$. Si $a = 2$ & $d = 16$, on aura $x = \sqrt[3]{4 \times 16} = \sqrt[3]{64} = 4$, & $y = 8$. Mais ſi la quantité $a^2 d$ n'étoit pas un cube parfait, on ne pourroit avoir qu'une valeur approchée de $x$ & de $y$ : on pourroit pour cela ſe ſervir du calcul décimal.

58. PROBLEME. *Inſérer un nombre* m *de moyens proportionnels géométriques entre deux termes* a & b. Soit $x$ le premier moyen proportionnel cherché; puiſque le nombre de tous les termes, en y com-

prenant $a$ & $b$ doit être $m+2$. On aura par le théorême précédent $a : b :: a^{m+1} : x^{m+1}$, & par conséquent $ax^{m+1} = ba^{m+1}$. Divisant de part & d'autre par $a$, il vient $x^{m+1} = ba^m$; donc en prenant la racine $m+1$, $x = \sqrt[m+1]{ba^m} = b^{\frac{1}{m+1}} a^{\frac{m}{m+1}}$, que je suppose $= c$. Le premier moyen proportionnel $x$ étant trouvé, pour avoir le second, on divisera le quarré du premier par la quantité $a$, ou ce qui revient au même, on multipliera le second par le dénominateur du quotient du premier terme $a$ de la progression, divisé par le second terme $c$, de sorte que, si ce quotient est $\frac{1}{p}$, ce qui donnera dans ce cas $c = ap$, on multipliera $ap$ par $p$, pour avoir $ap^2$, second moyen proportionnel; & en multipliant celui-ci par $p$, on aura le troisiéme, & ainsi de suite.

Mais, pour inférer un nombre quelconque $m$ de moyens proportionnels entre deux termes d'une progression $\dot{:}\dot{:} a : aq : aq^2$ &c. $= \dot{:}\dot{:} aq^0 : aq : aq^2$ &c. divisez la différence 1 qui regne entre les exposans 0, 1, 2, &c. de la quantité $q$ (exposant de la progression) par $m+1$, & vous aurez le premier moyen proportionnel cherché, en ajoutant $\frac{1}{m+1}$ au premier exposant 0 (de $q$); ensuite pour avoir le second moyen proportionnel cherché, vous ajouterez encore $\frac{1}{m+1}$ à l'exposant de $q$ dans le terme précédent, & ainsi de suite. Si donc, $m = 2$, pour inférer deux proportionnels entre deux termes consécutifs de la progression ci-dessus, on fera $\dot{:}\dot{:} aq^0 : aq^{\frac{1}{3}} : aq^{\frac{2}{3}} :$

$aq^1 : aq^{\frac{4}{3}}$ &c. ce qui eſt évident, puiſque chaque terme eſt égal à celui qui les précéde, diviſé par $\frac{1}{q^{\frac{1}{3}}}$.

59. Avant de paſſer aux progreſſions arithmétiques, nous allons dire un mot de ce qu'on appelle les *expoſans d'une raiſon.* Les *expoſans d'une raiſon* ſont les plus petits termes, qui aient entr'eux le même rapport que les termes de la raiſon dont ils ſont les expoſans. *Par exemple*, les expoſans de la raiſon $\frac{3}{6}$ ſont $\frac{1}{2}$, parce que 1 & 2 ſont les plus petits termes qui aient entr'eux le même rapport que 3 & 6. De-là il ſuit que ſi l'on a deux ou pluſieurs raiſons égales, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = p$, le produit de ces raiſons $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = p^2$, ſera un nombre quarré, ſi $p$ eſt un nombre; de même en ſuppoſant $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = p$, on aura $\frac{ace}{bdf} = \frac{a^3}{b^3} = p^3$, qui ſera un nombre cube, ſi $p$ eſt un nombre. Donc une raiſon compoſée de deux raiſons égales, c'eſt-à-dire, une raiſon doublée ſera exprimée par un nombre quarré, & une raiſon triplée par un nombre cube, ſi une des raiſons compoſantes a pour valeur un nombre, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi l'une des raiſons compoſantes a pour expoſant des nombres; car la raiſon qui ſe trouve entre le quarré de l'antécédent & celui du conſéquent d'une des raiſons compoſantes égales, eſt égale à la raiſon qu'il y a entre le produit des antécédens, & celui des conſéquens des raiſons compoſantes égales; de même la raiſon qu'il y a entre le cube de l'antécédent & celui du

conſéquent d'une des raiſons compoſantes égales, eſt la même que la raiſon qu'ont entr'eux les produits des antécédens & des conſéquens des trois raiſons compoſantes, ainſi qu'il ſuit de ce que nous venons de dire : donc, ſi la raiſon $\frac{a^2}{b^2}$ eſt $= \frac{1}{1}$, la raiſon $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ ſera $= \frac{a}{b}$ ; or $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ n'eſt pas un nombre, puiſqu'il n'eſt pas poſſible d'exprimer un nombre ſourd par un nombre (38) : donc la raiſon de 3 : 5 n'eſt pas doublée des raiſons de nombre à nombre. de même faiſant $\frac{a^3}{b^3} = \frac{2}{1}$, à cauſe que $\frac{2}{1}$ n'eſt pas un cube, la raiſon $\frac{a}{b}$ ou $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$, n'eſt pas triplée d'une raiſon de nombre à nombre ; ces ſortes de raiſons ſont appellées *ſourdes* : ainſi, en ſuppoſant $\frac{a^3}{b^3} = 2$, la raiſon $\frac{a}{b}$ ſera ſourde, parce que 2 qui eſt ici $p^3$, en faiſant $\frac{a^3}{b^3} = p^3$ & $\frac{a}{b} = p$, n'étant pas un nombre cube, $p$ ou $\sqrt[3]{2}$ n'eſt pas un nombre.

## *DES PROPORTIONS ET PROGRESSIONS ARITHMETIQUES.*

60. La raiſon arithmétique qui ſe trouve entre deux grandeurs $a$ & $b$ n'étant autre choſe que la différence qu'il y a entre ces deux grandeurs (40), il s'enſuit qu'en appellant $d$ cette différence, la raiſon arithmétique de $a \cdot b$ ſera $= a \cdot a \pm d$. Le ſigne $+$ a lieu lorſque l'antécédent eſt plus petit que ſon conſéquent, & le ſigne $-$, lorſque l'antécédent eſt plus grand que ſon conſéquent. La raiſon en eſt facile, lorſque le conſéquent eſt plus grand que

l'antécédent de la quantité $d$, il doit être égal à cet antécédent, plus à la quantité $d$; mais il doit être égal à cet antécédent moins la quantité $d$, s'il eſt plus petit de la même quantité $d$: ainſi dans la raiſon arithmétique de 6 à 4, le conſéquent 4 eſt égal à l'antécédent 6, moins la différence 2; au contraire dans la raiſon de 4 à 6, le conſéquent 6 eſt égal à l'antécédent 4 augmenté de la différence 2.

61. PROPOSITION FONDAMENTALE. *Toute proportion arithmétique* $a \cdot b :: c \cdot f$ *peut ſe repréſenter par cette formule* $a \cdot a \pm d :: c \cdot c \pm d$. Cela eſt évident, puiſque la différence de $c$ à $f$ doit être la même que celle de $a$ à $b$, autrement la premiere raiſon ne ſeroit pas égale à la ſeconde, & par conſéquent il n'y auroit pas de proportion.

COROLLAIRE I. *Donc la ſomme des extrêmes dans une proportion arithmétique eſt égale à la ſomme des moyens.* En effet la ſomme des extrêmes $a + c \pm d = a \pm d + c$, ſomme des moyens. Si l'on a proportion continue $\div a \cdot b \cdot c$, la ſomme des extrêmes ſera égale au double du moyen terme: en effet cette proportion revient à celle-ci $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d$, dans laquelle la ſomme des extrêmes $a + a \pm 2d = 2a \pm 2d$, double du moyen terme. De même dans les nombres, ſi l'on a $5 \cdot 2 :: 6 \cdot 3$, on aura $5 + 3 = 6 + 2$; & ſi l'on a $\div 6 \cdot 4 \cdot 2$, l'on aura $6 + 2 = 4 + 4 = 8$.

COROLLAIRE II. Donc, pour trouver un moyen proportionel arithmétique entre $a$ & $b$, il faut prendre la moitié de la ſomme de $a$ & de $b$. Car ſoit $x$ ce terme cherché, l'on aura $\div a \cdot x \cdot b$, & $a + b = 2x$; donc $x = \frac{a+b}{2}$.

COROLLAIRE III. Pour connoître le quatriéme

terme d'une proportion arithmétique, dont on connoît les trois autres, il faut de la ſomme des moyens ôter l'extrême connu; & ſi c'eſt un des moyens qu'on cherche, l'on ôtera le moyen connu de la ſomme des extrêmes. Car ſoit $x$ le terme cherché, on aura dans le premier cas $a \cdot b :: c \cdot x$, & par la propoſition précédente $a + x = b + c$: donc retranchant de part & d'autre la quantité $a$, on aura $x = b + c - a$. Dans le ſecond cas on a la proportion $a \cdot b :: x \cdot c$, ou $a \cdot x :: b \cdot c$; mais $a + c = x + b$: donc $a + c - b = x + b - b = x$. Si c'étoit un troiſiéme moyen proportionnel arithmétique qu'on demandât, l'on auroit $\div a \cdot b \cdot x$, & $a + x = 2b$, & par conſéquent $x = 2b - a$.

COROLLAIRE IV. *Toute progreſſion arithmétique aſcendante, (c'eſt-à-dire, dont les termes vont en croiſſant)* $\div$ a · b · c · e *&c. peut être repréſentée par cette formule* $\div$ a · a + d · a + 2d · a + 3d · a + 4d *&c.* En effet il doit y avoir une même différence $d$ entre le premier & le ſecond terme, le ſecond & le troiſiéme, &c. ſans quoi il n'y auroit point de progreſſion; donc la différence $d$ étant ajoutée à chaque terme, doit donner le terme ſuivant, puiſque nous ſuppoſons la progreſſion croiſſante: donc, &c.

COROLLAIRE V. Il ſuit du dernier corollaire qu'un terme quelconque d'une telle progreſſion eſt égal au premier, plus la différence $d$ multipliée par le nombre des termes précédens. En effet le quatriéme terme, *par exemple*, eſt $= a + 3d$: donc appellant $n$ le nombre total des termes, $x$ le dernier terme, $a$ le premier terme, l'on aura $x = a + d \times (n - 1)$, ou $x = a + nd - d$: ainſi, ſi le pre-

mier terme eſt 1, la différence 3 & le nombre des termes 5, l'on aura le cinquiéme terme $x = 1 + 15 - 3 = 13$.

COROLLAIRE VI. Donc pour inſérer un nombre quelconque $m$ de moyens proportionnels arithmétiques entre deux termes donnés, il faut diviſer leur différence par $m + 1$, & le quotient ſera la différence cherchée $d$, qui ajoutée au premier terme, donnera le ſecond & ajoutée au ſecond, donnera le troiſiéme, &c. *Par exemple*, pour inſérer trois moyens arithmétiques entre $a$ & $a + 4d$, je diviſe la différence $4d$ par $m + 1 = 3 + 1 = 4$, le quotient $d$ eſt la différence cherchée, qui, ajoutée au premier terme, donnera le ſecond $a + d$, &c.

COROLLAIRE VII. Donc entre le premier extrême & un terme quelconque il y a la même différence, qu'entre un autre terme quelconque & le dernier extrême, pourvu que les 2 derniers termes ſoient autant éloignés l'un de l'autre, que les 2 premiers, ce qui fait que la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des deux termes, également éloignés de ces extrêmes, ou au double du terme du milieu, lorſque le nombre des termes eſt impair. En effet dans la progreſſion $\div a \cdot a + d \cdot a + 2d \cdot a + 3d \cdot a + 4d$, l'on a $a \cdot a + d : a + 3d \cdot a + 4d$; or il eſt viſible que la ſomme des extrêmes de cette progreſſion, ſavoir, $2a + 4d$ eſt $= 2a + 4d$, ſomme des moyens $= 2a + 4d$ double du terme du milieu.

COROLLAIRE VIII. *Donc en multipliant la ſomme des extrêmes par la moitié du nombre des termes, l'on aura la ſomme de tous les termes.* Cela ſuit du corollaire précédent; puiſque, quand le nombre des termes eſt pair, la progreſſion contient autant

de fois la somme des extrêmes, qu'il y a de fois 2 termes ; mais quand le nombre des termes est impair, il faut ajouter la valeur du terme milieu, qui est égal à la moitié de la somme des extrêmes. C'est d'ailleurs ce qu'on voit aisément dans la progression $\div a \cdot a+d \cdot a+2d \cdot a+3d \cdot a+4d$, dont la somme est égale à la somme des extrêmes $(2a+4d) \times \frac{5}{2}$. En général, appellant S la somme de tous les termes, $a$ le premier, $x$ le dernier terme, $n$ le nombre des termes d'une progression arithmétique, on aura $S=(a+x) \times \frac{n}{2} = \frac{na+nx}{2}$.

COROLLAIRE IX. Il suit de-là que si la progression arithmétique étoit celle des nombres naturels 1, 2, 4, 5, &c. & qu'elle commençat par l'unité, $S=\frac{na+nx}{2}$ seroit $S=\frac{x+x^2}{2}=\frac{n+n^2}{2}$; car alors $x=n$ & $a=1$. Si la progression des nombres naturels commençoit par 0, & qu'on eût 0, 1, 2, 3, &c. alors $n$ seroit $=x+1$ & $S=\frac{na+nx}{2}$, seroit $=\frac{0+(x+1) \times x}{2}=\frac{x^2+x}{2}$.

## *DES LOGARITHMES.*

62. Dans une progression géométrique, dont les termes sont affectés d'exposans, ces exposans sont en progression arithmétique. *Par exemple*, si l'on a $\div\div a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5$ &c. A. Les exposans formeront la progression arithmétique $\div 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. &c. B. On appelle *Logarithmes* les termes d'une progression arithmétique, correspondans à ceux d'une progression géométrique : ainsi les termes de la progression B sont les logarithmes des termes correspondans de la pro-

gresſion A ; 3, *par exemple*, eſt le logarithme de $a^3$ ; 0 celui de $1 = a^0$.

De-là il ſuit, en ſe ſervant des progreſſions A & B, premiérement que pour avoir le logarithme du produit de deux quantités, il faut prendre la ſomme de leurs logarithmes : *par exemple*, pour avoir le produit de $a^2$ par $a^3$, j'ajoute enſemble le logarithme du multiplicande avec celui du multiplicateur, la ſomme 5 donne le logarithme du produit $a^5$.

COROLLAIRE. Donc, pour multiplier deux nombres l'un par l'autre, il ſuffit de prendre la ſomme de leurs logarithmes. On voit auſſi que pour diviſer un nombre $a^5$ par un autre nombre $a^3$, il ſuffit d'ôter le logarithme du diviſeur de celui du dividende, la différence 2 ſera le logarithme du quotient $a^2$. Pour élever $a^2$, *par exemple*, à une puiſſance quelconque, il faudroit multiplier l'expoſant 2 de $a$ par l'expoſant de la puiſſance ; or il ſuffit de multiplier le logarithme de $a^2$ par l'expoſant de la puiſſance, le produit donnera le logarithme de la puiſſance propoſée ; de ſorte que ſi c'eſt la troiſiéme puiſſanee, en multipliant 2 par 3, on aura 6, logarithme de $a^6$, troiſiéme puiſſance de $a^2$.

Si l'on vouloit avoir la racine troiſiéme de $a^6$, on diviſeroit l'expoſant 6 de $a$ par l'expoſant de la racine pour avoir l'expoſant 2 de $a^2$, racine troiſiéme de $a^6$ ; or il ſuffit de diviſer le logarithme de $a^6$ par l'expoſant 3 de la racine troiſiéme pour avoir le logarithme 2 de la racine cherchée $a^2$.

COROLLAIRE. De ce que nous venons de dire il ſuit que pour avoir la racine d'un nombre quelconque, il faut diviſer le logarithme de ce nombre

par l'exposant de la racine proposée, le résultat donnera le logarithme de la racine cherchée.

Pour faire une regle de trois directe par le moyen des logarithmes, ajoutez ensemble les logarithmes des moyens, retranchez de la somme le logarithme du premier extrême, & vous aurez le logarithme de l'extrême cherché. Ainsi, pour trouver le quatriéme terme de cette proportion $a^1 : a^3 :: a^4 : x$, j'ajoute ensemble les logarithmes de $a^3$, & de $a^4$, de leur somme 7, je retranche le logarithme 1. du premier terme, le reste 6 est logarithme du quatriéme terme cherché $a^6$; donc, pour trouver le quatriéme terme de cette proportion 341 : 428 :: 5797 : $x$, j'ajoute les logarithmes des moyens que je trouve dans les tables *.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 · 631444 | Log. | de | 428 |
| 3 · 763203 | Log. | de | 5797 |
| 6 · 394647 | Somme | | |
| 2 · 532754 | Log. | de | 341 |
| 3 · 861893 | Log. | de | $x = 7276$ |

de leur somme je soustrais le logarithme du premier terme, il me reste le logarithme du dernier terme. Cherchant ce logarithme dans les tables, je trouve à côté 7276, nombre cherché. Tout cela est fondé sur ce que, pour avoir le quatriéme terme d'une proportion, dont on connoît les moyens & un des extrêmes, il faut diviser le produit des moyens par l'extrême connu. Si l'on connoissoit un moyen & les deux extrêmes, de la somme des logarithmes

* Les Tables sont des ouvrages, dans lesquels à côté d'un nombre on trouve son logarithme, & réciproquement : elles sont plus ou moins étendues. Je me suis servi dans cet exemple de celles de M. de la Caille.

des extrêmes on ôteroit le logarithme du moyen connu, & l'on auroit le logarithme du moyen cherché.

En supposant $a = 10$, nous aurons les progressions géométrique & arithmétique qu'on voit ici.

| Prog. géom. des Tab. | Prog. arithm. |
|---|---|
| 1 | 0 = 0·000000 |
| 10 | 1 = 1·000000 |
| 100 | 2 = 2·000000 |
| 1000 | 3 = 3·000000 |
| 1000 | 4 = 4·000000 |
| &c. | &c. = &c. |

Pour avoir les logarithmes des nombres 2, 3, 4, &c. qui se trouvent entre 1 & 10, & ceux des nombres qui se trouvent entre 10 & 100, &c. il faut prendre une puissance de 10 égale à chacun de ces nombres, l'exposant de cette puissance sera le logarithme du nombre correspondant. Or on conçoit que si l'on inséroit un grand nombre de moyens proportionnels géométriques entre 1 & 10 : *par ex.* il s'en trouveroit un égal, ou à peu près égal au nombre 2, au nombre 5, &c. Et en insérant un pareil nombre de moyens arithmétiques entre les exposans 0 & 1 ; celui qui répondroit au nombre 2, seroit l'exposant de la puissance de 10 égale au nombre 2, & seroit par conséquent le logarithme de 2. *par exemple*, pour trouver le logarithme de 3 avec six décimales, j'ajoute douze 0 au nombre 10 ; & prenant la racine quarrée de ce résultat avec 6 décimales, à cause des 0 que j'ai ajoutés, je trouve 3·162277, moyen géométrique, auquel répond l'exposant de la racine quarrée, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$, ou 0·500000, moyen arithmétique entre 0 & 1. Le moyen géométrique trouvé étant plus grand que 3, j'en cherche un autre entre celui-ci & 1, c'est-à-dire que je prends avec 6 décimales la racine du nombre

que je viens de trouver pour avoir $1 \cdot 778279 < 3$, le moyen arithmétique correſpondant eſt $0 \cdot 250000$, moyen arithmétique entre 0, logarithme de 1, & $0 \cdot 500000$ logarithme du premier moyen géométrique ci-deſſus. Le moyen géométrique que nous venons de trouver étant trop petit, j'en cherche un autre entre celui-ci & le premier, ce qui ſe fait en prenant la racine de leur produit (23), & ce n'eſt qu'après dix-neuf multiplications (en y comprenant les multiplications ſous-entendues que nous avons faites, en prenant le premier moyen proportionnel, auſſi-bien que le ſecond avec 6 décimales; car ajouter 12 zéros, c'eſt la même choſe que multiplier par 1 ſuivi de 12 zéros) & autant d'extractions qu'on trouve le moyen géométrique $3 \cdot 000000$, & le moyen arithmétique correſpondant ou le logarithme $0 \cdot 477121$ de 3. A la vérité on a maintenant des méthodes plus expéditives pour avoir les logarithmes; mais en voilà aſſez pour donner une idée de la méthode qu'on peut ſuivre pour conſtruire une table de logarithmes. Au reſte les logarithmes ne ſont la plupart qu'approchés, de ſorte qu'il peut y avoir une erreur d'environ une demi-unité de décimale du ſixiéme ordre *. Ayant le logarithme de 2 & de 3, il eſt aiſé d'avoir celui de leur produit 6, en ajoutant enſemble les logarithmes du multiplicande & celui du multiplicateur.

REMARQUE I. On appelle *caractériſtique* d'un logarithme le nombre qui ſe trouve devant le point. Ce nombre indique à quelle claſſe des unités, *par*

* Il y a cependant des tables dans leſquelles les logarithmes ſont exprimés par un plus grand nombre de décimales; mais celles de M. de la Caille ſont ſuffiſantes pour les uſages ordinaires.

*exemple*, des dixaines ou centaines appartient le nombre. On voit que la caractériſtique des logarithmes des nombres, depuis 1 juſqu'à 10 eſt 0, 1 depuis 10 juſqu'à 100, 2 depuis 100 juſqu'à 1000, &c. En général un nombre contient autant de chiffres & un de plus qu'il y a d'unités dans la caractériſtique de ſon logarithme *.

REMARQUE II. C'eſt la même choſe de multiplier un nombre par 10 ou d'ajouter une unité à la caractériſtique de ſon logarithme, & en général on multiplie autant de fois un nombre par 10, qu'on ajoute d'unités à la caractériſtique de ſon logarithme : comme auſſi l'on diviſe un nombre autant de fois par 10 qu'on ôte d'unités de la caractériſtique de ſon logarithme.

Pour avoir la racine d'un nombre, on doit, ſelon ce que nous avons dit ci-deſſus, diviſer le logarithme de ce nombre par l'expoſant de la racine. Soit donc propoſé de prendre la racine ſeptiéme de 128 ; cherchant ce nombre dans les tables, à côté je trouve ſon logarithme 2·107210, qui, étant diviſé par 7, donne 0·301030 ; cherchant ce logarithme dans les tables, je trouve à côté le nombre 2, racine ſeptiéme de 128. Pour avoir le logarithme d'une fraction, *par exemple*, de la fraction $\frac{3}{4}$, il faut retrancher le logarithme du dénominateur 4 de celui du numérateur 3, le reſte — 0·124939 ſera le logarithme cherché ; ce qui fait voir que les logarithmes négatifs indiquent des fractions plus petites que l'unité : en effet, ſi l'on continue en deſcendant la progreſſion $\frac{a^3}{a^4} : a^2 : a^1 :$

* Comme 2, logarithme de 100, eſt l'expoſant de la puiſſance de 10 (c'eſt-à-dire du quarré) qui donne 100 ; de même 0.477121 eſt l'expoſant de la puiſſance de 10, qui donne 3.

$a^0 : a^{-1} : a^{-2}$, &c. les expoſans $-1$, $-2$ ſeront les logarithmes de $a^{-1} = \frac{1}{a}$, de $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

Pour trouver le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, *par ex.* de $3 + \frac{2}{5}$, réduiſez l'entier en fraction de même dénominateur, & vous aurez $\frac{15+2}{5} = \frac{17}{5}$; ôtez maintenant le logarithme du diviſeur 5 de celui du dividende 17, le reſte ſera le logarithme du quotient.

Propoſons-nous maintenant de trouver à quel nombre appartient un logarithme donné, ſoit qu'il excéde les limites des tables, ou qu'il tombe entre les logarithmes des tables. Dans le premier cas on retranchera de la caractériſtique autant d'unités qu'il ſera néceſſaire pour qu'on puiſſe trouver dans les tables les premiers chiffres du logarithme propoſé ainſi préparé. Si tous les chiffres ſe trouvent alors dans les tables, le nombre cherché ſera le nombre même qu'on trouve à côté; mais il faudra lui ajouter vers la droite autant de 0 qu'on a retranché d'unités à la caractériſtique; parce que, ſelon ce que nous avons dit ci-deſſus, on eſt cenſé avoir diviſé le nombre par autant de fois 10, que l'on a retranché d'unités dans la caractériſtique. *Par exemple*, le logarithme 7 · 017451 ſe trouve après avoir retranché 3 unités de 7, répondre à 10410, j'en conclus que le nombre auquel appartient le logarithme propoſé eſt 10410000. Si l'on ne trouve dans les tables que les premiers chiffres du logarithme préparé, on ſe conduira comme dans l'exemple ſuivant. Pour trouver à quel nombre répond le logarithme 7 · 011499, j'ôte 3 de ſa caractériſtique, le loga-

rithme reſtant 4 · 011499 tombe entre les logarithmes des nombres 10268, 10269. Le nombre auquel il répond, eſt donc 10268 plus une fraction; pour trouver cette fraction, je retranche de mon logarithme préparé celui de 10268 pour avoir le reſte 13. Je prends dans les tables la différence entre le logarithme de 10268 & celui de 10269, je trouve 42; après quoi je fais cette regle de trois. Si 42, différence entre les logarithmes des nombres dont nous venons de parler, donne 1 pour différence entre ces nombres, à quelle différence des nombres doit répondre la différence 13 entre mon logarithme & celui de 10268? c'eſt-à-dire, je fais $42 : 1 :: 13 : x = \frac{13}{42}$ *. Ainſi le logarithme 4 · 011499 appartient à $10268 + \frac{13}{42}$ à très-peu-près, & le logarithme 7 · 011499 à un nombre 1000 fois plus grand.

Si le logarithme propoſé tomboit entre ceux des tables, on ne retrancheroit rien à la caractériſtique, & même ſi le logarithme propoſé tomboit au-deſſous de celui de 1500. Il faudroit pour plus d'exactitude ajouter autant d'unités à ſa caractériſtique qu'on le pourroit, ſans paſſer les bornes des tables, après quoi l'on ſépareroit autant de décimales dans le nombre trouvé, qu'on auroit ajouté d'unités à la caractériſtique du logarithme.

Soit propoſé maintenant de trouver le nombre fractionnaire, auquel appartient un logarithme négatif — 1 · 532732. J'ajouie 4 à ce logarithme

* Cette proportion ſuppoſe que les différences des nombres ſont proportionnelles à celles de leurs logarithmes, ce qui n'eſt pas exactement vrai; mais ſeulement à peu-près lorſque les nombres ſont aſſez grands.

pour

pour avoir 2 · 467268 qui, dans les tables ſe trouve entre le logarithme de 293 & celui de 294; j'en conclus que la fraction cherchée eſt 0 · 0294, à moins d'un dix milliéme près. En effet ajouter 4 à un logarithme, c'eſt rendre le nombre auquel il répond 10 mille fois plus grand. Il faut donc, dans le nombre trouvé, ſéparer quatre décimales.

Soit propoſé de trouver la racine cubique de 53, à moins d'un milliéme près. Le tiers du logarithme de 53 eſt 0 · 574758, ce logarithme étant cherché dans les tables avec une caractériſtique plus forte de 3 unités, répond à 3756 à-peu-près: donc la racine demandée (en ſéparant 3 décimales), eſt 3 · 756 à-peu-près. Si l'on vouloit avoir la puiſſance $\frac{1}{7}$, ou, ce qui revient au même, la racine ſeptiéme du cube de 53, on multiplieroit le logarithme de 53 par 3, diviſant le produit par 7, & cherchant le réſultat avec une caractériſtique plus forte de ſept unités, l'on ſépareroit enſuite 7 décimales dans le nombre trouvé. Si le logarithme ainſi préparé ſe trouvoit trop grand pour être contenu dans les tables, on diminueroit ſa caractériſtique de quelques unités, mais enſuite on ajouteroit au nombre trouvé un pareil nombre de 0, & enfin on ſépareroit 7 décimales.

Si l'on propoſoit d'extraire la racine cube de 0 · 32 = 0 · 320; après avoir trouvé le logarithme de 320, je prendrois le tiers de ce logarithme, que je chercherois dans les tables avec une caractériſtique plus forte de trois unités, & ſéparant trois décimales, j'aurois la racine cube de 320; mais comme je veux la racine cube de 0 · 320, nombre mille fois plus petit, la racine trouvée ſeroit dix fois trop grande, il faudroit donc ſéparer encore une décimale.

Puiſque toute fraction ordinaire peut ſe réduire

en une fraction décimale (ou exactement, ou du moins à-peu-près de même valeur), ainsi que nous l'avons vu ci-devant, ce que nous venons de dire peut s'appliquer aux fractions ordinaires sans erreur sensible.

Disons un mot du complément arithmétique. On appelle *complément arithmétique* d'un nombre, la différence entre ce nombre & l'unité suivie d'autant de zeros, qu'il y a de chiffres dans le nombre. Ainsi le complément arithmétique de 357 se trouve en ôtant ce dernier nombre de 1000. Il est aisé de voir que, pour avoir ce complément, il suffit d'ôter le premier chiffre 7 de 10, & chacun des autres de 9, ou, ce qui revient au même, de regarder le premier 0 à droite, comme valant 10, & chacun des autres 9, en négligeant l'unité ou le premier chiffre de la gauche. Par-là la soustraction peut être changée en addition : *par exemple*, pour ajouter ensemble les deux nombres 352 & 523, & retrancher de leur somme les deux nombres 201 & 32, j'écris les deux premiers nombres & le complément arithmétique des deux derniers les uns sous les autres, prenant la somme 1742, je retranche une unité du rang des mille, & une du rang des centaines, le reste 642 est le nombre cherché. Pour en voir la raison, il suffit de remarquer que, si au lieu de retrancher 201, j'ajoute son complément arithmétique, je fais en même tems la soustraction proposée & une addition de 1000 : c'est-à-dire, d'une dixaine au premier chiffre de la gauche du résultat. On voit aussi qu'en ajoutant le complément de 32, on fait une augmentation d'une dixaine au second chiffre du résultat. Si les nombres à retrancher avoient autant de chiffres que le plus grand de ceux dont on retranche, on voit qu'il faudroit retrancher du premier chiffre de la gauche du résultat autant d'unités qu'on ajoute de compléments arithmétiques : or pour cela il n'y a qu'à ajouter vers la gauche

1000
357
643

523
352
Compl. arithm. de ..... 201 ..... 799
Compl. arithm. de ..... 32 ..... 68
1742
642

un nombre ſuffiſant de 0, aux nombres qu'on veut retrancher. *Par exemple*, au lieu de prendre le complément de 32, on prendra celui de 032, qui eſt 968; mais dans ce cas on retrancheroit deux unités du premier chiffre du réſultat, & l'on auroit le même nombre cherché que ci-deſſus.

Pour diviſer 436 par 109, il faudroit, en ſe ſervant des logarithmes, retrancher celui du diviſeur de celui du dividende. Au lieu de cette opération, j'écris le logarithme de 436, auquel j'ajoute le complément arithmétique du logarithme de 109. Du premier chiffre du réſultat; je retranche une unité,

2·639486 Log. de 436.
7·962574 Compl. arithm. du logarithme de 109 *.
0·602060

le reſte 0·602060 eſt le logarithme du quotient 4 que je trouve à côté dans les tables.

Pour multiplier une fraction par une autre fraction, on ajouteroit enſemble les logarithmes des numérateurs, & les complémens arithmétiques des logarithmes des dénominateurs, en prenant ces logarithmes auſſi-bien que ceux des numérateurs, avec un même nombre de chiffres à la caractériſtique (pour cela on ajoutera, s'il eſt néceſſaire, un ou pluſieurs zeros vers la gauche), retranchant deux unités du premier chiffre à gauche de la ſomme; le réſultat donneroit le logarithme du produit.

Propoſons-nous maintenant de trouver le logarithme d'un nombre qui excede le plus grand nombre des tables, que je ſuppoſe être 10000. Soit donc propoſé le nombre 3255682, dont on demande le logarithme. Il faut retrancher de ce nombre autant de chiffres qu'il eſt néceſſaire, pour que le reſte ſe trouve dans les tables. Je retranche donc 3 chiffres, & le logarithme du reſte 3255, eſt 3·512551; je prends auſſi le logarithme du nombre 3256 plus grand d'une unité, ce logarithme eſt 3·512684. Maintenant, ajoutant autant d'unités aux caractériſtiques des loga-

* Pour avoir le complément arithmétique de 2·037426, logarithme de 109, je ſouſtrais 2·037426 de 10·000000, ou ce qui revient au même, je ſouſtrais 2037426 de 10000000, & je ſépare enſuite ſix décimales.

rithmes que je viens de trouver, que j'ai ſéparé de chiffres dans le nombre propoſé, j'ai les logarithmes $6 \cdot 512551$, $6 \cdot 512684$, & les nombres qui leur répondent, ſont 3255000 & 3256000, dont la différence eſt 1000; c'eſt pourquoi je fais cette regle de trois: la différence 1000 entre les nombres dont nous venons de parler, donnant $0 \cdot 000133$ pour différence entre leurs logaritgmes, combien 682, différence entre le nombre propoſé & le nombre 3255000, donnera-t-il pour différence entre leurs logarithmes? ou $1000 : 0 \cdot 000133 :: 682 : x = 0 \cdot 000090$. J'ajoute $0 \cdot 000090$ à $6 \cdot 512551$, pour avoir le logarithme du nombre propoſé $= 6 \cdot 512641$. Cette regle eſt fondée ſur ce que les différences des nombres ſont proportionnelles aux différences des logarithmes, du moins à peu-près, lorſque les nombres ſont fort grands.

PROBLEME. *Trouver le quinzième terme d'une progreſſion géométrique* $\therefore a : ap : ap^2$ *&c. dont le premier terme* $a = 12$, *& dont l'expoſant* $p = 100$. Soit ce terme $= x$ (je déſignerai ſon logarithme par $l \cdot x$), $n = 15$, nous aurons (51) $x = ap^{n-1}$; donc $l \cdot x = l\, ap^{n-1} = l \cdot a + (n-1) \cdot l \cdot p$ (car le logarithme d'une puiſſance d'un nombre eſt égal au produit de l'expoſant de la puiſſance par le logarithme de ce nombre) $= l \cdot 12 + 14 \cdot l \cdot 100$. Mais $l \cdot 100 = 2$, $l \cdot 12 = 1 \cdot 079181$; donc le logarithme de $x$ ou $l \cdot x = 1 \cdot 079181 + 28 = 29 \cdot 079181$, qui répond à 12000 000 000 000 000 000 000 000 000 0, nombre cherché.

## *DES EQUATIONS.*

63. La raiſon d'égalité qui ſe trouve entre deux quantités, s'appelle *équation*, on l'indique par le ſigne $=$; ainſi $7 + 3 = 10$ eſt une équation. La quantité qui ſe trouve à la gauche du ſigne, ſe nomme le *premier membre de l'équation*; celle de la droite en eſt le *ſecond*. L'objet des équations eſt de faire connoître la valeur d'une ou de pluſieurs quantités inconnues qui entrent dans l'équation: voici un principe dont on peut faire un grand uſage.

64. PRINCIPE FONDAMENTAL. *Deux quantités égales resteront encore égales, si on leur ajoute, ou si on en soustrait des quantités égales; si on les multiplie, ou si on les divise par des quantités égales; si on les élève à des puissances égales; si on en extrait des racines égales, ou encore si l'on change tous les signes de l'une & de l'autre.*

Les équations sont du premier degré, lorsque l'exposant de l'inconnue (en supposant qu'il n'y en a qu'une dans l'équation) est $= 1$; elles sont dites du second degré, si le plus grand exposant de l'inconnue est 2; du troisiéme, s'il est $= 3$; &c. Mais s'il y a plusieurs inconnues, le degré de l'équation s'estime par la plus forte somme que peuvent faire les exposans des inconnues dans un même terme. Les quantités connues sont ordinairement désignées par les premieres lettres $a, b, c$, &c. de l'alphabet; & les quantités inconnues par les dernieres $x, y, u$, &c. Ainsi dans les équations $y + x = d + c$, $y = 6 + a$ (qui sont du premier degré), $x^2 - x = a$, $x^2 + y^2 = d$, $xy - y = 2$ (qui sont du second degré) les inconnues sont $x$ & $y$.

Résoudre les équations, c'est trouver les valeurs des inconnues qu'elles contiennent: pour cela s'il n'y a qu'une équation & une inconnue, il faut faire en sorte que l'inconnue reste seule dans un membre toutes les inconnues se trouvant dans l'autre membre; par ce moyen l'inconnue deviendra connue, puisqu'elle sera égale à une quantité connue. Soit proposée cette équation $gx + a - d = f$. J'ajoute à l'un & à l'autre membre la quantité $+ d$, & j'en soustrais la quantité $a$ (ce qui par le principe fondamental ne détruit pas l'égalité), & j'ai $gx + a - d - a + d = f + d - a$, ou, en réduisant, j'ai $gx = f + d - a$.

Maintenant je divise les deux membres par $g$, & j'ai $\frac{gx}{g} = \frac{f+d-e}{g}$, ou $x = \frac{f+d-e}{g}$. Si j'avois l'équation $\frac{bx}{a} + d = g$, je multiplierois l'un & l'autre membre par $a$ pour avoir $\frac{abx}{a} + ad = ag$, ou, en réduisant, $bx + ad = ag$. Divisant ensuite tous les termes par le multiplicateur de l'inconnue $x$ (nous appellerons ce multiplicateur, quel qu'il soit, *le coefficient de l'inconnue*), j'ai $\frac{bx}{b} + \frac{ad}{d} = \frac{ag}{b}$, ou $x + \frac{ad}{b} = \frac{ag}{b}$. De-là nous tirons cette regle générale. *Pour faire passer une quantité positive ou négative d'un membre dans un autre, il faut l'effacer dans le membre où elle est, & l'écrire dans l'autre membre avec un signe contraire; pour dégager une inconnue de son coefficient, il faut la laisser sans ce coefficient, & diviser les autres termes de l'équation par ce coefficient. Mais pour dégager une inconnue de son diviseur, il faut la laisser sans ce diviseur, & multiplier les autres termes de l'équation par ce diviseur.*

65. Si j'avois les deux équations $x + y = a$, $x - 2y = b$, je prendrois la valeur d'une des inconnues dans l'une des deux équations précédentes, en laissant cette inconnue seule dans un membre. Supposons, *par exemple*, que je prenne la valeur de $x$ dans la seconde, j'aurai en transposant, $x = b + 2y$ (par la regle précédente). Substituant $b + 2y$ à la place de $x$ dans la premiere équation, il viendra $b + 2y + y = a$, ou $b + 3y = a$, ou (en transposant) $3y = a - b$, & (en divisant) $y = \frac{a-b}{3}$. Substituant cette valeur de $y$ dans l'une des

deux équations données (il eſt indifférent dans quelle des deux on ſubſtitue), *par exemple*, dans la premiere on aura $x + \frac{a-b}{3} = a$, tranſpoſant $\frac{a-b}{3}$, on trouvera $x = a - (\frac{a-b}{3}) = \frac{3a-a+b}{3} = \frac{2a+b}{3}$.

Si l'on avoit trois inconnues & trois équations, on prendroit la valeur d'une de ces inconnues dans une des trois équations, & la ſubſtituant dans les deux autres, il en réſulteroit deux équations avec deux inconnues tout au plus. Or, par le moyen de ces deux équations, l'on trouveroit aiſément la valeur de ces inconnues; & ſubſtituant ces valeurs dans une des trois équations qui renfermeroit les trois inconnues, on auroit facilement la valeur de la troiſiéme inconnue. Si l'on avoit quatre inconnues & quatre équations, en prenant la valeur d'une des inconnues dans la premiere, & la ſubſtituant dans les trois autres, on auroit tout au plus trois équations & trois inconnues, dont on trouveroit la valeur par le moyen de ces trois équations. Subſtituant cette valeur dans une des quatre premieres équations, l'on auroit la valeur de la quatriéme inconnue; & ainſi de ſuite pour un plus grand nombre d'équations & d'inconnues.

Si j'avois l'équation $\sqrt[2]{x} = a^2 + d$, en élevant au quarré les deux membres de cette équation, j'aurois $x = a^2 + d = a^4 + 2a^2d + d^2$. Si j'avois cette autre équation $x^2 = 25$, en prenant les racines quarrées, j'aurois $\sqrt[2]{x^2} = \pm\sqrt{25}$ (V. le n°. 56) $= \pm 5$. En effet $+5 \times +5 = -5 \times -5 =$

25. Mais si j'avois l'équation $x^2 + 2ax = b^2$, il faudroit compléter le premier membre, c'est-à-dire, rendre le premier membre un quarré parfait, ce qui se fait en lui ajoutant le quarré de la moitié du coefficient de $x$; mais il faut faire la même addition au second membre, afin que l'égalité ne soit point détruite. Ainsi nous aurons $x^2 + 2ax + a^2 = b^2 + a^2$; or il est visible que le premier membre est un quarré, savoir, celui de $x + a$. Prenant donc la racine quarrrée de part & d'autre, j'ai $x + a = \pm\sqrt{b^2 + a^2}$, & en transposant, $x = -a \pm \sqrt{b^2 + a^2}$. Si $a = 3$ & $b = 4$, l'on aura $x = -3 \pm \sqrt{25}$, ou $x = -3 \pm 5$, ou $x = 2$ & $x = -8$. Ce qui fait voir que toute équation du second degré a deux racines; mais on entend ici par racines les valeurs de l'inconnue. Si j'avois l'équation $-ax^2 + 2a^2x = b$, je dégagerois $x^2$ de son coefficient, ce qui me donneroit $-x^2 + 2ax = \frac{b}{a}$. En second lieu je rendrois $x^2$ positif en changeant tous les signes de l'équation, ce qui (64) ne détruit point l'égalité, pour avoir $+x^2 - 2ax = -\frac{b}{a}$; ajoutant maintenant de part & d'autre le quarré de la moitié de $-2a$, coefficient de $x$, c'est-à-dire, le quarré de $-a$ qui est $a^2$, j'aurois $x^2 - 2ax + a^2 = -\frac{b}{a} + a^2$. Prenant maintenant la racine quarrée de l'un & de l'autre membre, j'ai $x - a = \pm\sqrt{(-\frac{b}{a} + aa)}$. Si $\frac{b}{a}$ est plus petit que $a^2$, les deux racines sont réelles, si $\frac{b}{a}$

est plus grand que $a^2$, les deux racines sont imaginaires ; car soit $-\frac{b}{a}+aa=-cc$, on aura $x=+a\pm\sqrt{-cc}$; or $\sqrt{-cc}$ est (36) une quantité imaginaire. Si $\frac{b}{a}=aa$, alors $-\frac{b}{a}+aa=0$, & $x=+a\pm\sqrt{0}$, ou $x=+a\pm 0$, c'est-à-dire, qu'alors les deux racines sont égales chacune à la quantité $a$.

66. Faisons maintenant l'application de ce que nous venons de dire à quelques problêmes ; mais auparavant disons un mot de la maniere de mettre une question en équation. Pour mettre un problême en équation, il faut le traduire en langage algébrique ; or pour cela il faut exprimer, par le moyen de l'algebre, les quantités soit connues, soit inconnues, qui entrent dans le problême, & les rapports que ces quantités ont entr'elles.

Problême I. *Etant donnée la somme 100 de deux nombres, & leur différence 30, trouver ces deux nombres.* Soient $x$ le plus grand de ces nombres, $y$ le plus petit, $a=100$, $30=b$. Par la nature du problême nous aurons la somme $x+y=a$, & la différence de ces mêmes nombres, savoir, $x-y=b$. Si nous ajoutons le premier membre de la premiere équation avec celui de la seconde, le second membre de la premiere avec le second de l'autre, ce qui est très-permis, puisqu'on ne fait qu'ajouter des quantités égales à des quantités égales, nous aurons $x+y+x-y=a+b$, ou $2x=a+b$, & (en divisant les deux membres de cette équation par 2) $x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$. Mais si on retranche la seconde équation $x-y=b$ de la

première $x + y = a$, le premier membre du premier membre le second du second, il viendra $x + y - x + y = a - b$, ou $2y = a - b$, ou (en divisant par 2) $y = \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$. *C'est-à-dire, qu'étant donnée la somme & la différence de deux quantités, la plus grande de ces quantités est égale à la moitié de la somme plus la moitié de la différence, la plus petite étant égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence*: ainsi dans le cas du problême le plus grand nombre $x$ est $= \frac{100}{2} + \frac{10}{2} = 50 + 15 = 65$, & le plus petit nombre $y$ est $= \frac{100}{2} - \frac{10}{2} = 50 - 15 = 35$.

PROBLEME II. *Pierre, Jean & Jacques ont chacun un certain nombre de louis; Pierre & Jean en ont ensemble vingt; Pierre & Jacques en ont quarante; mais Jean & Jacques n'en ont que trente à eux deux. On demande le nombre de louis de chacun en particulier.* Soit $x$ la somme des louis de Pierre, de Jean & de Jacques. Si de cette somme l'on retranche le nombre $20 = a$, il restera $x - a$ pour les louis de Jacques. De même si de $x$ on retranche $40 = b$ on aura $x - b$ pour les louis de Jean; enfin, si de $x$ nous retranchons $30 = c$, nous aurons $x - c$ nombre de louis de Pierre. Mais ces trois nombres doivent valoir autant que la somme $x$; donc nous aurons l'équation $(x - a) + (x - b) + (x - c) = x$; ou $x - a + x - b + x - c = x$, ou $3x - a - b - c = x$, ou, en transposant, $3x = x + a + b + c$, & en transposant encore $3x - x = a + b + c$, ou $2x = a + b + c$, ou $x = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+40+30}{2} = 45$; donc le nombre $x - a$ des louis de Jacques sera $= 45 - 20 = 25$, le

nombre $x - b$ des louis de Jean étant $= 53$ ; mais celui des louis de Pierre, savoir $x - c$, sera $= 13$.

PROBLEME III. *Titius voulant donner une certaine somme à un nombre déterminé de pauvres, a remarqué qu'il lui manquoit 8 sols pour que chacun en reçût 3 ; mais il a remarqué aussi qu'il en avoit 3 de reste, s'il se contentoit d'en donner 2 à chacun. On demande le nombre de sols & celui des pauvres ?* Soit $x$ le nombre des pauvres ; puisqu'en voulant donner 3 sols à chacun, il en manque 8, le nombre des sols est donc $3x - 8$ ; mais à cause qu'en donnant 2 sols à chaque pauvre, il y en a 3 de reste, le nombre des sols est évidemment $2x + 3$ ; donc $3x - 8 = 2x + 3$ ; transposant $- 8$ dans le second membre & $2x$ dans le premier, il vient $3x - 2x = + 11$, où $x = 11$. Il y avoit donc 11 pauvres ; & par conséquent le nombre de sols $2x + 3$ est $= 25$.

PROBLEME IV. *Un chien voit partir un lievre à 100 toises de distance, on demande à quel point il le prendra ; on sait seulement qu'il parcourt trois toises dans le tems que le lievre en parcourt deux.* Soit $a = 100$, $m = 3$, $n = 2$, $x$ le chemin que fera le lievre avant d'être pris ; il est visible que le chemin que doit faire le chien est $a + x$. D'un autre côté le chemin que fait le chien doit être à celui que fait le lievre dans le même tems, comme la vîtesse du chien est à celle du lievre, ou comme $m : n$ ; donc $a + x : x :: m : n$ ; & en faisant le produit des extrêmes & celui de moyens, $mx = na + nx$, ou $mx - nx = na$, & en divisant, $x = \frac{na}{m - n}$, c'est-à-dire, que le chemin que doit faire le lievre avant d'être pris, est égal au produit de la distance qui s'est trouvée au commencement de la course entre

lui & le chien, multipliée par la vîtesse du lievre, en divisant ce produit par la différence des vîtesses.

Ainsi dans le cas supposé le lievre sera pris après avoir parcouru le chemin $x = \frac{na}{m-n} = \frac{100}{1} = 100$ toises.

Si on supposoit $m = n$, il est visible que le chien ne pouroit jamais atteindre le lievre, à plus forte raison cela arriveroit si $m$ étoit plus petit que $n$.

PROBLEME V. *Un pere ayant le triple de l'âge de son fils s'en chagrinoit, le fils pour le consoler lui dit : cher pere, attendez encore 20 ans, & vous n'aurez que le double de mon âge. On demande l'âge du pere & celui du fils.* Soit $a = 20$, $x$ l'âge du fils ; donc, par la nature du problême, l'âge du pere qui doit être triple de celui du fils, sera $3x$ ; au bout de 20 ans, celui du fils sera $x + a$, & celui du pere $3x + a$ ; mais alors celui du pere doit être double de celui du fils : donc $3x + a = 2$ fois $(x + a) = 2x + 2a$. On a donc l'équation $3x + a = 2x + 2a$. En transposant $a$ dans le second membre, & $2x$ dans le premier, on trouve $3x - 2x = 2a - a$, ou $x = a = 20$ ; ainsi le fils avoit 20 ans, & le pere 60. En effet dans 20 ans l'âge du fils sera 40, & celui du pere 80, double de celui du fils.

PROBLEME VI. *Un pere faisant son testament veut que l'aîné de ses fils reçoive 1000 liv. & le $\frac{1}{7}$ du reste ; le second 2000 liv. & le $\frac{1}{7}$ du reste ; le troisiéme 3000 liv. & le $\frac{1}{7}$ du reste ; & ainsi de suite. On demande le nombre des enfans, la part de chacun & le bien du pere, on sait seulement que les enfans recevront autant l'un que l'autre.* Soit $x$ le bien du pere, $a = 1000$ liv. Lorsque l'aîné aura pris 1000 liv. le reste

du bien ſera $x - a$, dont le $\frac{1}{7}$ ſera $\frac{x-a}{7}$, qui, ajouté à $a$, donnera $\frac{x-a}{7} + a = \frac{x-a}{7} + \frac{7a}{7} = \frac{x-a+7a}{7} = \frac{x+6a}{7}$, part de l'aîné. Otant cette quantité de $x$, l'on aura $x - \frac{x-6a}{7} = \frac{7x-x-6a}{7} = \frac{6x-6a}{7}$, reſte du bien du pere, le premier fils partagé. Le ſecond doit prendre $2a$ ſur ce reſte, & de plus le $\frac{1}{7}$ du reſte. Otant donc $2a$ de $\frac{6x-6a}{7}$, on a $\frac{6x-6a}{7} - 2a = \frac{6x-6a-14a}{7} = \frac{6x-20a}{7}$. Le $\frac{1}{7}$ de cette derniere quantité eſt $\frac{6x-20a}{7}$ diviſé par 7, ou $\frac{6x-20a}{49}$. Ajoutant $2a$ l'on aura la part du ſecond $= 2a + \frac{6x-20a}{49} = \frac{98a+6x-20a}{49} = \frac{78a+6x}{49}$. Mais la portion du premier doit être égale à celle du ſecond. Donc $\frac{x+6a}{7} = \frac{78a+6x}{7\times 7}$. Multipliant les deux membres de l'équation par $7 \times 7$ & réduiſant, l'on a $7x + 42a = 78a + 6x$. Tranſpoſant $42a$ du premier membre dans le ſecond & $6x$ du ſecond dans le premier, il vient $7x - 6x = 78a - 42a$, ou $x = 36a = 36000$ liv. bien du pere. Le premier fils prend 1000 liv. & le $\frac{1}{7}$ du reſte, c'eſt-à-dire 1000 liv. $+ \frac{35000}{7}$ liv. ou 1000 liv. $+$ 5000 l. $=$ 6000 l.; donc la part du premier & celle de chacun des autres eſt $=$ 6000 liv. Diviſant le bien

du pere 36000 liv. par une des portions = 6000 liv., le quotient 6 fera connoître le nombre des enfans.

PROBLEME VII. *Quel eſt le nombre qui multiplié par 10 donne le tiers de ſon quarré ?* Soit $x$ ce membre, $a = 10$, $b = 3$. On aura par la nature du problême, $ax = \frac{xx}{b}$. Multipliant l'un & l'autre nombre par $b$, & diviſant par $x$, on trouve $ab = x = 30$.

PROBLEME VIII. *Partager 5 en deux parties, en ſorte que le quotient de la plus grande par la plus petite ſoit = 5.* Suppoſant $a = 5$, $x$ la plus grande partie, $a - x$ ſera la plus petite. Par la nature du problême $\frac{x}{a-x} = a$; donc (en ôtant la fraction) $x = a \times (a-x) = a^2 - ax$. Tranſpoſant $-ax$ dans le premier membre, il vient $x + ax = a^2$, ou $x \times (1+a) = a^2$; donc $x = \frac{a^2}{a+1}$. Pour avoir la ſeconde partie $a - x$, je ſubſtitue la valeur de $x$, ce qui me donne $a - \frac{a^2}{a+1} = \frac{a^2+a-a^2}{a+1}$ (en réduiſant $a$ en une fraction, dont le dénominateur ſoit $a + 1$) $= \frac{a}{a+1}$; donc la premiere partie $= \frac{25}{6}$, & la ſeconde $= \frac{5}{6}$. On voit donc que dans tous les cas ſemblables on trouvera la plus grande des deux parties en diviſant le quarré du nombre propoſé par ce nombre lui-même augmenté de l'unité, & la plus petite en diviſant le nombre propoſé par ce nombre augmenté de l'unité.

PROBLEME IX. *Si l'on doubloit le nombre de mes écus*, diſoit un bon homme, *j'en donnerois 3, ce qui fut fait ; on continua de même juſqu'à la troiſié-*

*me fois qu'il ne lui reſta rien. Quel étoit le nombre de ſes écus ?* Soit $x$ le nombre cherché, en doublant l'on aura $2x$, d'où ôtant 3, il reſtera $2x - 3$. En doublant ce premier reſte, & ôtant 3, il viendra $4x - 6 - 3 = 4x - 9$. Doublant encore & ôtant 3, il vient enfin $8x - 18 - 3$, ou $8x - 21$ qui, par la nature du problême, doit être $= 0$; donc $8x - 21 = 0$, ou (en tranſpoſant) $8x = 21$ & (en diviſant) $x = \frac{21}{8} = 2 + \frac{5}{8}$; c'eſt-à-dire qu'il avoit 2 écus & $\frac{5}{8}$ d'un écu, ce qu'il eſt facile de vérifier.

PROBLEME X. *Un oncle dit à ſon neveu, j'ai dans ma main un certain nombre d'écus que je te donnerai, ſi tu devine combien il y en a. Le quarré de ce nombre — 4 fois ce nombre eſt = 5.* Soit $x$ le nombre cherché, ſon quarré ſera $x^2$, le quadruple de ce nombre ſera $4x$. On aura donc $x^2 - 4x = 5$. Prenant le quarré de la moitié du coefficient de $x$ (65) & l'ajoutant de part & d'autre, j'aurai $x^2 - 4x + 4 = 5 + 4 = 9$. Prenant la racine de l'un & de l'autre membre, j'ai $x - 2 = \pm \sqrt{9} = \pm 3$, & (en tranſpoſant) $x = 2 \pm 3$, c'eſt-à-dire, $x = 5$, & $x = -1$. Il eſt évident que la premiere racine donne la ſolution du problême dans le ſens qu'il eſt propoſé; car le quarré de 5, moins 4 fois 5 eſt $= 5$. Mais la ſeconde racine $-1$ réſout cette queſtion implicitement renfermée dans l'équation, qu'elle eſt le nombre négatif dont le quadruple étant retranché de ce nombre, le réſultat ſera 5. Si l'on avoit demandé que le reſte fût $= -13$, on auroit trouvé $x = 2 \pm \sqrt{(-13 + 4)}$, ou $x = 2 \pm \sqrt{-9}$. La racine de $-9$ étant imaginaire; puiſqu'il n'y a aucun nombre qui, multiplié par lui-même, puiſſe donner $-9$ (car $+3 \times +3 = +9 = -3$

$x - 3$), il s'enſuit que le problême eſt impoſſible. Mais on eſt cenſé avoir réſolu un problême, quand on a démontré qu'il eſt impoſſible.

PROBLEME XI. *Etant données deux quantités, en trouver une troiſiéme qui ſoit en proportion harmonique avec les deux premieres.* Soient $a$ & $b$ les quantités données, & $x$ la quantité cherchée. Par la nature de la proportion harmonique (40) la différence de la premiere quantité à la ſeconde doit être à la différence de la ſeconde à la troiſiéme, comme la premiere eſt à la troiſiéme; donc $a - b : b - x :: a : x$, ſi eſt $a > b$; mais ſi les quantités vont en augmentant, l'on a $b - a : x - b :: a : x$. Donc en prenant le produit des extrêmes & celui des moyens, on aura dans le premier cas $ax - bx = ab - ax$, & dans le ſecond $bx - ax = ax - ab$: mais l'une & l'autre équation donne $2ax - bx = ab$, & en diviſant les deux membres par $2a - b$, on trouvera $x = \frac{ab}{2a-b}$.

Si les deux nombres $a$ & $b$ ſont 4 & 6, le nombre cherché $x$ ſera $= \frac{24}{2} = 12$. Si $a = 35$ & $b = 21$, on trouvera $x = 15$. On continueroit une progreſſion harmonique, dont on connoîtroit les 2 premiers termes, en cherchant d'abord le troiſiéme, & enſuite le quatriéme, par le moyen du ſecond & du troiſiéme, & ainſi de ſuite. On trouvera même que ſi on diviſe ſucceſſivement une même quantité $a$ par les termes d'une progreſſion arithmétique $\div b \cdot b + d \cdot b + 2d$ &c. Les quotients $\frac{a}{b}, \frac{a}{b+d}, \frac{a}{b+2d}$, &c. ſeront en progreſſion harmonique.

PROBLEME XII. *Etant donnée la ſomme de deux nombres*

*nombres avec leur produit, trouver ces nombres.* Soit la ſomme des nombres $= a$, leur différence $= x$; le plus grand ſera $\frac{a}{2} + \frac{x}{2}$, & le plus petit $\frac{a}{2} - \frac{x}{2}$ (problème I). Leur produit étant ſuppoſé $= b$, nous aurons $\frac{a^2}{4} - \frac{x^2}{4} = b$; donc $a^2 - x^2 = 4b$, $a^2 - 4b = x^2$, prenant les racines & tranſpoſant, il vient $x = \pm \sqrt{(aa - 4b)}$. Si $a = 14$. $b = 48$, on aura $x = \pm 2$, & les deux nombres ſeront $7 + 1$ & $7 - 1$, c'eſt-à-dire 8 & 6. Si $a = 4$ & $b = 5$, on aura $x = \pm\sqrt{-4}$, quantité imaginaire qui fait voir qu'il ne peut y avoir deux nombres, dont la ſomme ſoit 4 & le produit 5.

PROBLEME XIII. *Un marchand ayant placé* 100000 *livres dans un commerce où il perd, a trouvé la ſeconde année ſon argent diminué des* $\frac{4}{25}$ *du total de ce qu'il étoit après le premiere année, on demande à combien pour* 100 *ſe monte la perte par an.* Soit 100000 liv. $= a$, $\frac{4a}{25} = b$, & $x$ le nombre cherché. En faiſant cette proportion $100 : 100 - x :: a : a \times \frac{100 - x}{100} = a \times (1 - \frac{x}{100})$, ce quatriéme terme exprimera ce que devient la ſomme après la premiére année. Si l'on fait maintenant $100 : 100 - x :: a \cdot (1 - \frac{x}{100}) : \frac{100 - x}{100} \times a \times \frac{100 - x}{100} = a \times (1 - \frac{x}{100}) \cdot (1 - \frac{x}{100}) = a \times \frac{(100 - x)^2}{10000} = a \times \frac{(d - x)^2}{d^2}$ (en faiſant $d = 100$), la quantité $a \times \frac{(d-x)^2}{d^2}$ exprimera ce que devient la ſomme $a$ après la ſeconde année; mais par la nature du problême, cette quantité eſt égale à $a \times \frac{(100 - x)}{100}$ diminué de $b$, c'eſt-à-dire, qu'on a l'équation $a \times \frac{(d-x)^2}{d^2} = a \times \frac{(d - x)}{d} - b$, ou

$\frac{ad^2 - 2adx + ax^2}{d^2} = \frac{ad - ax - bd}{d}$ (en réduiſant $b$ en fraction) $= \frac{add - adx - bdd}{dd}$ (en multipliant le numérateur & le dénominateur par $d$, ce qui évidemment ne change point a valeur de la fraction); donc ôtant le diviſeur commun $ad$, ce qui ne peut altérer l'égalité, tranſpoſant tous les termes affectés de $x$ dans le premier membre & tous les autres dans le ſecond, on aura $axx - 2adx + adx = add - add - bdd = -bdd$; donc réduiſant le premier membre & diviſant par $a$, $x^2 - dx = -\frac{bdd}{a}$. Ajoutant de part & d'autre & d'autre le quarré de la moitié du coefficient de $x$, on a $x^2 - dx + \frac{dd}{4} = -\frac{bdd}{a} + \frac{dd}{4}$; & prenant les racines de part & d'autre, $x - \frac{d}{2} = \pm\sqrt{-\frac{bdd}{a} + \frac{dd}{4}}$, & en tranſpoſant, $x = +\frac{d}{2} \pm \sqrt{-\frac{bdd}{a} + \frac{dd}{4}} \pm \frac{d}{2} = \sqrt{\left(\left(-\frac{4b}{a} + 1\right) \times \frac{dd}{4}\right)} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2}\sqrt{1 - \frac{4b}{a}} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2}\sqrt{1 - \frac{16a}{25a}} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2}\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2}\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \times \frac{3}{5}$, ou (en remettant les nombres à la place des lettres) $x = 50 \pm 50 \times \frac{3}{5}$; donc $x = 50 + 30 = 80$, & $x = 50 - 30 = 20$. Ainſi il y a deux ſolutions, c'eſt-à-dire, que la ſomme pouvoit perdre 80 pour 100, ou ſeulement 20 *. Mais ſi l'on ſuppoſoit $b = \frac{a}{3}$, on trouveroit $x = 50 \pm 50\sqrt{-\frac{1}{3}}$, quantité imaginaire, c'eſt-à-dire, que les deux valeurs de $x$ ſeroient imaginaires. Il eſt donc impoſſible que la ſomme ſoit altérée

* Dans le ſecond cas la ſomme devient 80000 l. après la premiere année, & 64000 l. après la ſeconde; mais 80000 l. $-$ 16000 l. $=$ 80000 l. $-\frac{4a}{25}$. Dans le premier cas la ſomme devient 20000 liv. à la premiere année, & 20000 liv. $-\frac{4a}{25}$ = 4000 liv. à la ſeconde année.

d'une année à l'autre dans une proportion qui ſoit telle que de la premiere à la ſeconde année, la diminution ſoit le tiers du total. En effet lorſque dans une équation du ſecond degré l'on trouve pour réſultat des quantités imaginaires, c'eſt une marque le problême eſt impoſſible.

PROBLEME XIV. *Deux ſources coulant uniformement, ont rempli un baſſin de 90 muids, la premiere en coulant pendant 3 jours & la ſeconde pendant 5 jours. Les mêmes fontaines ont rempli un baſſin de 64 muids, la premiere en coulant pendant 2 jours & la ſeconde pendant 4, quelle eſt la dépenſe de chacune par jour ?* Soit $x$ la dépenſe journaliere de la premiere, $y$ celle de la ſeconde. Par la premiere condition du problême l'on a $3x+5y=90$, & par la ſeconde condition $2x+4y=64$. Tranſpoſant $4y$ dans cette ſeconde équation, il vient $2x=64-4y$, ou $x=\frac{64-4y}{2}$. Tranſpoſant $5y$ dans la premiere équation, on trouvera $3x=90-5y$, & $x=\frac{90-5y}{3}$, & en ſubſtituant dans cette derniere équation la valeur de $x$ trouvée dans la ſeconde, l'on a $\frac{64-4y}{2}=\frac{90-5y}{3}$. Otant les fractions, il vient $192-12y=180-10y$, ou (en tranſpoſant) $192-180=12y-10y$, ou $12=2y$ & $y=\frac{12}{2}=6$. Subſtituant cette valeur de $y$ dans une des valeurs de $x$ déja trouvées, dans la derniere, *par exemple*, l'on a $x=\frac{90-5\times 6}{3}=\frac{90-30}{3}=\frac{60}{3}=20$; donc $x=20$. C'eſt-à-dire, que la premiere fournit 20 muids d'eau par jour, & la ſeconde 6.

Si l'on ſuppoſoit que la premiere coulant pendant

3 jours, & la seconde pendant 5, rempliſſent un baſſin de 30 muids, & que la premiere coulant pendant 2 jours, & la seconde pendant 4 rempliſſent un baſſin de 16 muids, l'on auroit alors les deux équations ſuivantes $3x + 5y = 30$, $2x + 4y = 16$. La premiere donne $x = \frac{30-5y}{3}$, la seconde donne $x = \frac{16-4y}{2}$. Pour trouver la valeur de $y$, j'égale ces deux valeurs de $x$ * afin d'avoir $\frac{30-5y}{3} = \frac{16-4y}{2}$. Faiſant diſparoître les fractions, il vient $60 - 10y = 48 - 12y$, & faiſant paſſer tous les termes connus d'un côté & les inconnus de l'autre, l'on a $12y - 10y = 48 - 60 = -12$. Donc $2y = -12$, & $y = \frac{-12}{2} = -6$. Subſtituant la valeur de $y$ dans une des valeurs trouvées de $x$, dans la derniere, *par exemple*, l'on aura $x = \frac{16-4\times-6}{2} = \frac{16+24}{2} = \frac{40}{2} = 20$; donc $x = 20$ & $y = -6$, c'eſt-à-dire que tandis que la premiere ſource fournit 20 muids d'eau par jour, la ſeconde en tire 6 du baſſin. En effet la premiere doit fournir ſoixante muids d'eau dans 3 jours, & puiſque la ſeconde en tire 6 par jour, ou 30 dans 5 jours, les deux fontaines enſemble rempliront un baſſin de 30 muids, l'une en coulant pendant 3 jours & l'autre en tirant de l'eau pendant 5 jours. Ce qui fait voir que les quantités négatives doivent ſe prendre dans un ſens contraire aux poſitives.

* C'eſt une autre méthode de réſoudre les équations : Elle conſiſte à égaler les valeurs d'une même inconnue priſes dans deux équations différentes. Cette méthode porte avec elle ſa démonſtration.

PROBLEME XV. *Trouver deux nombres tels que le plus petit étant retranché du plus grand, il reſte 5 & que le quotient du plus grand par le plus petit, ſoit auſſi = 5.* Soit $a = 5$, $x$ le plus grand, $y$ le plus petit nombre cherché. Par la premiere condition du problême $x - y = a$, par la ſeconde $\frac{x}{y} = a$; donc $x = ay$. Subſtituant cette valeur de $x$ dans la premiere équation, l'on aura $ay - y = a$, ou $(a - 1) \times y = a$, ou $y = \frac{a}{a-1}$. Subſtituant la valeur de $y$ dans l'équation $\frac{x}{y} = a$ ou $x = a \times y$, on trouvera $x = a \times \frac{a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$; donc $y = \frac{5}{4}$ & $x = \frac{25}{4}$; & parce que $a$ peut déſigner toutes ſortes de nombres, il eſt évident en général que pour trouver deux nombres tels que la différence du plus grand au plus petit ſoit égale à un nombre quelconque donné, & que le quotient du plus grand par le plus petit ſoit auſſi égal au même nombre donné, il faut prendre pour le plus grand nombre le quarré du nombre donné diviſé par ce même nombre diminué de l'unité, & pour le plus petit nombre, le nombre donné, diviſé par ce nombre diminué de l'unité.

PROBLEME. XVI. *On demande deux nombres* x *&* y *tels que le plus petit* y *ſoit au plus grand comme* 2 : 7, *& que le quotient du plus grand par le plus petit ſoit* = 10. Par la premiere condition $2 : 7 :: y : x$; donc (en faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens) $2x = 7y$ ou $x = \frac{7y}{2}$. Par la ſeconde condition $\frac{x}{y} = 10$, ou $x = 10y$, ſubſti-

tuant cette valeur de $x$ dans l'équation $2x = 7y$, ou plutôt dans l'équation $x = \frac{7y}{2}$, l'on a $10y = \frac{7y}{2}$, & en ôtant la fraction, $20y = 7y$; & en divisant les 2 membres de l'équation par $y$, $20 = 7$, ce qui est absurde; ainsi le problême est impossible. En général toutes les fois qu'on parvient à une équation absurde, on est sûr que le problême proposé est impossible, pourvu que d'ailleurs on ait bien exprimé algébriquement les conditions du problême, & que l'on n'ait pas fait de faute dans la suite des opérations qui ont conduit à une équation absurde. Au reste on est censé avoir résolu un problême, lorsqu'on a fait voir qu'il est impossible.

PROBLEME XVII. *On veut mêler ensemble du vin à 8 sols & du vin à 12 sols la bouteille, pour avoir un mêlange à 10 sols la bouteille, combien doit-on prendre de chacun de ces vins pour 30 bouteilles du mêlange ?* Soit $q = 30, a = 12, b = 8, c = 10$, & $x$ ce qu'il faut prendre du vin le plus cher; donc $q - x$ sera ce qu'il faut prendre du vin le moins cher. En multipliant le prix $a$ par le nombre des bouteilles $x$, $ax$ exprimera la valeur du vin le plus cher; par la même raison $bq - bx$ sera la valeur du second vin. Et parce que ces deux valeurs prises ensemble doivent valoir autant que 30 bouteilles du mêlange, c'est-à-dire 30 fois 10 s. $= qc$, on aura $ax + bq - bx = cq$, ou (en transposant) $ax - bx = cq - bq$, ou $x \times (a - b) = q \times (c - b)$, ou (en divisant par $a - b$) $x = q \times \frac{(c-b)}{a-b}$. Ainsi $q - x = q - q \times \frac{(c-b)}{a-b} = \frac{qa - qb - qc + bq}{a-b} = \frac{qa - qc}{a-b} = q \times \frac{(a-c)}{a-b}$, quantité

du vin au plus bas prix. L'on aura donc $x = 30 \times \frac{(10-8)}{12-8} = \frac{30\times 2}{4} = \frac{60}{4} = 15$. De même $q \times \frac{(a-c)}{a-b}$ se réduit à 15, c'est-à-dire, qu'on doit prendre 15 bouteilles de chaque espece de vin.

REMARQUE I. De l'équation $x = q \times \frac{(c-b)}{a-b}$, on tire $a-b : c-b :: q : x$. Et faisant $= y$ la quantité du vin ou autre marchandise au plus bas prix, nous aurons $q \times \frac{(a-c)}{a-b} = y$, & $a-b : a-c :: q : y$. Donc si on propose de faire un mêlange de 20 livres à 30 s. la livre, avec du caffé à 50 s. & du caffé à 12 s., je dirai la différence du plus haut prix au plus bas prix, est à la différence du moyen prix (c'est-à-dire, du prix du mêlange) au plus bas prix, comme la quantité du mêlange à la quantité du caffé à 50 s., où $38 : 18 :: 20 : x = \frac{18\times 20}{38} = 9 + \frac{9}{19}$, ôtant cette quantité de 20, on aura la quantité qu'il faut prendre du caffé à 12 s. qu'on peut aussi trouver par la proportion $a-b : a-c :: q : y$, qui dans ce cas devient $38 : 20 :: 20 : y = \frac{400}{38} = 10 + \frac{10}{19}$. C'est-à-dire, qu'on doit prendre 9 livres & $\frac{9}{19}$ de livre du premier caffé, & 10 livres $+ \frac{10}{19}$ de livre du caffé à 12 sols.

REMARQUE II. Si on donnoit la quantité d'une des marchandises qui doivent entrer dans le mêlange avec la quantité du mêlange, l'on trouveroit facilement ce qu'on doit prendre de l'autre marchandise, en ôtant de la quantité $q$, qui représente la quantité du mêlange, la quantité que l'on prend de la premiere marchandise. Mais si on demandoit de faire un mêlange qui contînt, *par exemple*, 10 mesures de vin à 10 s. la mesure, & qu'on proposât de trou-

ver combien il faudroit de mesures à 30 s. pour avoir un mêlange à 15 s. la mesure ; on chercheroit par le Problême précédent combien il faudroit prendre du vin à 10 s. & du vin à 30 s. pour un certain nombre de mesures à volonté, pour 4, *par exemple ;* on trouveroit qu'il faut prendre 3 mesures du premier vin & 1 du second, après quoi l'on feroit cette regle de trois : trois mesures de vin à 10 s. répondent à 4 mesures du mêlange, à combien de mesures du mêlange répondront 10 mesures à 10 s., ou $3 : 4 :: 10 : x = \frac{40}{3} = 13 + \frac{1}{3}$ ; c'est-à-dire, que le mêlange seroit de 13 bouteilles & $\frac{1}{3}$, dont 10 du vin à 10 s. & par conséquent $3 + \frac{1}{3}$ du vin à 30 s.

REMARQUE III. Si l'on donnoit la quantité du mêlange, la quantité & le prix de chacune des marchandises qui entrent dans le mêlange, on trouveroit le prix du mêlange en divisant la somme des prix de toutes les marchandises qui entrent dans le mêlange par le nombre des mesures du mêlange. Ainsi si l'on demande combien vaudra la mesure d'un mêlange de 30 mesures de vin, dont 12 à 1 liv. 10 s., 10 à 1 liv. & 8 à 5 s. Le prix des 12 premieres est = 18 liv., le prix des 10 secondes est = 10 liv. & celui des 8 dernieres est = 2 liv. La somme donne 30 liv. ; donc le prix du mêlange $= \frac{30}{30} =$ 1 liv., ce qui est évident.

PROBLEME XVIII. *D'un Tonneau qui contient* 100 *bouteilles de vin, j'en tire une & je remets une bouteille d'eau, je tire de même une seconde bouteille & je remets autant d'eau & ainsi de suite, on demande combien il restera de vin dans le tonneau quand on aura tiré de cette maniere un certain nombre de bouteilles*, par exemple, 50 *bouteilles*. Soit $a =$ 100 bouteilles, $b =$ 1 bouteille, $d =$ 50 bouteilles & $n$ le nombre cherché. Après avoir tiré la premiere bouteille de vin, il reste dans le

tonneau la quantité de vin $a-b$, après la seconde bouteille il reste $\frac{(a-b)^2}{a}$, après la troisiéme bouteille il reste $\frac{(a-b)^3}{a^2}$, & après le nombre des bouteilles $n$, il reste $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$. En effet la mesure $b$ que l'on puise la seconde fois n'est pas de vin pur, elle n'en contient que $\frac{99}{100} = \frac{(a-b)}{a}$ ; donc cette mesure $b$ en contiendra $\frac{b\cdot(a-b)}{a}$, & $(a-b)-b\frac{(a-b)}{a}$ sera ce qui reste de vin après la seconde bouteille ; or cette quantité se réduit à $[\frac{(a-b)^2}{a}]$. La troisiéme bouteille $b$ ne doit donc contenir de vin que $\frac{b}{a}[\frac{(a-b)^2}{a}] = b \times \frac{(a-b)^2}{a^2}$ ; donc ce qui restera de vin après la troisiéme bouteille sera $\frac{(a-b)^2}{a} - b \times \frac{(a-b)^2}{a^2} = \frac{(a-b)^3}{a^2}$. En général après avoir puisé le nombre $n$ de bouteilles, il doit rester une quantité de vin $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} = d$ (par supposition). Comme la quantité $n$ inconnue se trouve être un exposant, il faut avoir recours aux logarithmes : ainsi nous aurons $L\cdot[\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}] = L\cdot d$ ($L$ désigne le logarithme de la quantité qui est à sa droite), ou parce que le logarithme du quotient se trouve en ôtant le logarithme du diviseur de celui du dividende, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus en parlant des logarithmes, & que celui de la puissance d'une quantité se trouve en multipliant le logarithme de cette quantité par l'exposant de la puissance, nous aurons $L\cdot(a-b)^n - L\cdot a^{n-1} = L\cdot d$, ou $nL\cdot(a-b) - (n-1)L\cdot a = L\cdot d$, ou $nL\cdot(a-b) - nL\cdot a + L\cdot a = L\cdot d$, ou (en transposant) $L\cdot a - L\cdot d = n[L\cdot a - L\cdot(a-b)]$ ; donc (en divisant) $\frac{L\cdot a - L\cdot d}{L\cdot a - L\cdot(a-b)} = n$, ou $\frac{L\cdot 100 - L\cdot 50}{L\cdot 100 - L\cdot 99} = n$, ou $\frac{2\cdot000000 - 1\cdot698970}{2\cdot000000 - 1\cdot995635} = \frac{0\cdot301030}{0\cdot004365} = 69$ à peu près, c'est-à-dire qu'il restera environ 69 bouteilles de vin, quand on aura puisé 50 bouteilles.

Pour savoir combien de vin contiendra la cinquantiéme bou-

teille, *par exemple*, il faudroit ſuppoſer $n = 49$, & l'expreſſion $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ marqueroit alors ce qui reſte de vin dans le tonneau après la quarante-neuviéme bouteille. Faiſant donc cette proportion, la capacité 100 du tonneau eſt au vin reſtant, comme la bouteille qu'on puiſe eſt à la quantité de vin que cette bouteille doit contenir; ou $a : \frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} :: b : \frac{b}{a} \times \frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} = \frac{b}{a^n} \times (a-b)^n = x$, on a par les logarithmes, $\mathrm{L} \cdot b +$, $n\,\mathrm{L} \cdot (a-b) - n\,\mathrm{L} \cdot a = \mathrm{L} \cdot x$, ou (parce que $\mathrm{L} \cdot 1 = 0$ ainſi que nous l'avons dit en parlant des logarithmes) $0 + 49\mathrm{L} \cdot 99 - 49\mathrm{L} \cdot 100 = \mathrm{L} \cdot x$, ou $-0 \cdot 213885 = \mathrm{L} \cdot x$. Pour avoir le nombre fractionnaire qui répond à ce logarithme négatif, j'ajoute trois unités à ſa caractériſtique (c'eſt comme ſi j'ajoutois à ce logarithme $3 \cdot 000000$). Cherchant donc le nouveau logarithme $2 \cdot 786115$, je trouve que le nombre le plus approchant auquel il répond eſt 611; donc (à cauſe des trois unités ajoutées à la caractériſtique) $0 \cdot 611$ exprime ce que la cinquantiéme bouteille contient de vin à très-peu-près.

PROBLEME XIX. *Un uſurier prête* 1000 *liv. à condition qu'on lui en payera l'intérêt compoſé, c'eſt-à-dire, non-ſeulement l'intérêt, mais encore les intérêts des intérêts, à raiſon de* 4 *pour* 100 *par an. Au bout d'un certain tems l'emprunteur n'ayant rien payé, ſe libere en donnant* 1800 *liv. On demande combien d'années ſe ſont écoulées depuis l'emprunt.* Soit $f$ la ſomme empruntée, $r$ l'intérêt ſimple, c'eſt-à-dire, le nombre par lequel il faut multiplier la ſomme pour avoir l'intérêt de la premiere année, il eſt viſible que cet intérêt ſera $rf$, & que la ſomme qu'exigera l'uſurier au bout de cette année eſt $f + rf = f \cdot (1+r)$. Par la même raiſon la ſomme exigée au bout de la ſeconde année ſera $f \cdot (1+r) \cdot (1+r) = f \cdot (1+r)^2$. Au bout de la troiſiéme année cette ſomme deviendra $f(1+r)^3$ & en général au bout d'un nombre $n$ d'années, cette ſomme ſera $\cdot f(1+r)^n$. Si donc on fait cette ſomme égale à $d$, on aura $f \cdot (1+r)^n = d$; donc en déſignant par L le logarithme, il eſt viſible que l'on aura $\mathrm{L} \cdot f(1+r)^n = \mathrm{L} \cdot d$ (car les quantités égales doivent avoir des logarithmes égaux); donc (parce que le logarithme d'un produit eſt égal à la ſomme des logarithmes du multiplieande & du multiplicateur, & que celui d'une puiſſance d'une quantité eſt égal au produit de l'expoſant de cette quantité par le logarithme de cette même quantité)

$L \cdot f + L \cdot (1+r)^n = L \cdot d$, ou $L \cdot d = L \cdot f + L \cdot (1+r)^n = L \cdot f + n \cdot L \cdot (1+r)$; d'où l'on tire $L \cdot d - L \cdot f = n \times L \cdot (1+r)$, & enfin $n = \frac{L \cdot d - L \cdot f}{L \cdot (1+r)}$. Ainſi prenant dans les tables les logarithmes de $d$, de $f$, de $(1+r)$, & faiſant les opérations qu'indique la formule, on trouvera le nombre des années $n$. Nous avons $d = 1800$, & $L \cdot d = 3 \cdot 255273$, $f = 1000$, $L \cdot f = 3 \cdot 000000$, $L \cdot d - L \cdot f = 0 \cdot 255273$, $r = \frac{4}{100}$, $1 + r = \frac{104}{100}$, $L \cdot (1+r) = 0 \cdot 017033$. Diviſant donc $0 \cdot 255273$, par $0 \cdot 017033$, on a 15 à peu de choſe près. Ainſi on dira qu'il y a 15 années depuis l'emprunt. Si nous regardons ſucceſſivement les quantités $f$, $r$, $n$, $d$ comme inconnues l'équation $f(1+r)^n = d$, donnera $f = \frac{d}{(1+r)^n}$ & $d = f \cdot (1+r)^n$ la même équation donne $(1+r)^n = \frac{d}{f}$, $1 + r = \sqrt[n]{\frac{d}{f}}$, & $r = \sqrt[n]{(\frac{d}{f})} - 1$. Formules par leſquelles on réſoudra la plûpart des queſtions qu'on peut faire ſur les intérêts compoſés.

PROBLEME XX. *Il y a 10000 hommes dans une ville dont la population va en augmentant dans un rapport conſtant, au bout d'un certain tems, par exemple, au bout de 15 ans la population eſt de 20000 hommes, on demande l'acroiſſement annuel* Soit $10000 = a$, $20000 = b$, $n = 15$, $x$ le nombre des habitans à la fin de la premiere année. Donc ſi on fait $a : x :: x : \frac{xx}{a}$, on aura évidemment le nombre des habitans après les deux premieres années; & faiſant enſuite $a : x :: \frac{xx}{a}$ à un 4^e. terme $\frac{x^3}{a^2}$, on aura le nombre d'hommes à la fin de la troiſiéme année. En général $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ indiquera le nombre d'habitans après le nombre $n$ d'années. Faiſant donc ce nombre $= b$, on aura $\frac{x^n}{a^{n-1}} = b$, $x^n = a^{n-1} b$, $L \cdot x^n = L \cdot a^{n-1} b$, ou $n \cdot L \cdot x = (n-1), L \cdot a + L \cdot b$, & $L \cdot x = \frac{(n-1) L \cdot a + L \cdot b}{n}$. Mais $L \cdot a = 4$, $L \cdot b = 4 \cdot 30103$ (en s'en tenant à 5 décimales); donc $L \cdot x = \frac{60 \cdot 30103}{15} = 4 \cdot 0200687$, logarithme qui répond à 10472. Si de ce nombre l'on retranche 10000, on aura 472 pour l'acroiſſement de la premiere année, ce qui ne donne pas la $\frac{1}{21}$.

partie du tout. Ainſi l'accroiſſement annuel eſt plus petit que la partie $\frac{1}{12}$ de 10000.

PROBLEME XXI. *Si le nombre* a *des habitans d'une ville augmente tous les ans de la trentiéme partie, quel ſera ce nombre au bout d'un ſiécle?* Après la premiére année ce nombre ſera évidemment $a+\frac{a}{30}=a\left(1+\frac{1}{30}\right)=a\left(\frac{31}{30}\right)$. Si l'on fait $a : a\left(\frac{31}{30}\right) :: a\left(\frac{31}{30}\right) : a\left(\frac{31}{30}\right)^2$, on aura le nombre des habitans après la ſeconde année, & en général après le nombre $n$ d'années, ce nombre ſera $a\left(\frac{31}{30}\right)^n$. En faiſant $n=100$, nous aurons $a\left(\frac{31}{30}\right)^{100}=x$, nombre cherché; donc $La+100\,L\cdot\left(\frac{31}{30}\right)=L\cdot x$; mais $L\cdot\frac{31}{30}=L\cdot 31-L\cdot 30=0\cdot 014240439$ (en employant les tables d'Ulacq). Si donc on ſuppoſe $a=100000$, nous aurons $Lx=6\cdot 4240439$, & $x=2654874$. Tel ſera le nombre des habitans après 100 ans, en ſuppoſant qu'il ait été de 100000 au commencement du ſiecle.

PROBLEME XXII. *Le monde ayant été peuplé après le déluge par ſix perſonnes, les trois enfans de Noë & leurs femmes, de quelle partie a dû croître le genre humain, pour qu'il y ait eu un million d'hommes après 200 ans. Soit* n *cette partie*; Après la premiere année le nombre des hommes auroit éte (ſans y comprendre Noë) $=6+\frac{6}{n}=6\left(1+\frac{1}{n}\right)=6\left(\frac{n+1}{n}\right)$, & au bout de 200 ans il aura été $6\left(\frac{n+1}{n}\right)^{200}=1000000$ par ſuppoſition; donc $\frac{n+1}{n}=\left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$; donc $L\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{200}L\cdot\left(\frac{1000000}{6}\right)=\frac{1}{200}\left(5\cdot 2218487\right)=0\cdot 0261092$, logarithme qui répond au nombre $\frac{10619631}{1000000}=\frac{n+1}{n}$; ôtant les fractions, tranſpoſant & réduiſant, il vient $1000000=61963\cdot n$, & enfin $n=\frac{1000000}{61963}=16$ à-peu-près. Ainſi l'accroiſſement annuel auroit été d'un $\frac{1}{16}$ de la population, ce que la ſanté robuſte & la longue vie des hommes de ce tems-là rendent très-poſſible.

PROBL. XXIII. *A quelle puiſſance faut-il élever le nombre* 10=a *pour le rendre égal au nombre* b. Soit $y$ l'expoſant cherché, on aura $a^y=b$, $L\cdot a^y=L\cdot b$,

ou $y \cdot \mathrm{L}\, a = \mathrm{L} \cdot b$ ou $y = \frac{\mathrm{L} \cdot b}{\mathrm{L}\, a}$. Si on demande à quelle puiſſance on doit élever le nombre 10 pour le rendre égal à 10000, nous aurons $y = \frac{\mathrm{L}.10000}{\mathrm{L} \cdot a} = \frac{4}{1} = 4$. Ainſi en élevant 10 à la quatriéme puiſſance, on aura 10000.

PROBLEME XXIV. *Huit chevaux ont mangé en 7 ſemaines les herbes d'un pré de 4 arpens *, tant celles qui étoient crûes, que celles qui ont dû croître pendant que les chevaux paiſſoient ; 9 chevaux ont mangé de la même maniere celles d'un pré de 5 arpens en 8 ſemaines. Combien faut-il de chevaux pour manger, ſelon les mêmes conditions, les herbes d'un pré de 6 arpens en 12 ſemaines ?* Avant de paſſer plus loin, nous prévenons que la ſolution que nous allons donner (par une méthode dont nous ne ſommes pas les inventeurs) n'eſt pas bien exacte, pour les raiſons que nous dirons bientôt ; cependant comme elle eſt ingénieuſe, nous croyons devoir la rapporter. Je fais le nombre des chevaux qui ont mangé les herbes du premier pré $= a = 8$, le nombre des ſemaines qu'ils ont employé à manger ces herbes $= c$, l'étendue du premier pré ou 4 arpens $= b$, $9 = d$, $e = 5$, $f = 8$ (je déſigne les 8 ſemaines employées par les 9 chevaux pour manger les herbes du ſecond pré, par $f$ & non par $a$, afin de rendre la ſolution générale), $g = 6$, $h = 12$, & le nombre de chevaux cherché $= x$. Cela poſé, imaginons que les chevaux qui mangent les herbes de chaque pré ſont partagés en deux bandes, dont l'une mange l'herbe contenue au premier inſtant dans chaque pré, & l'autre mange l'herbe qui croît pendant que les chevaux paiſſent. Soit $y$ la premiere bande du premier pré ; la ſeconde ſera $a - y$. Si nous faiſons $= z$ la premiere bande des chevaux du ſecond pré, la ſeconde ſera $d - z$ ; & ſi la premiere bande des chevaux du troiſiéme pré eſt $= t$, la ſeconde ſera $x - t$.

Cette ſuppoſition (que je ſerai voir un peu plus bas n'être pas exacte) une fois admiſe, il eſt clair que les premieres ban-

* L'arpent, ſuivant l'Ordonnance de 1669 pour les Eaux & Forêts, eſt de 100 perches quarrées, la perche étant ſuppoſée de 22 pieds ; mais on ne ſuit pas par tout cette meſure.

des des chevaux ſont entr'elles comme les étendues des prés (dans leſquels on ſuppoſe la quantité d'herbe en raiſon des ſurfaces) diviſées par les tems correſpondans. Car il eſt viſible que ſi l'on a deux quantités d'herbes, l'une de 12, l'autre de 48 quinteaux, & que ſix chevaux puiſſent manger la premiere quantité dans 4 jours, 12 chevaux mangeront la ſeconde quantité dans 8 jours, & les premiers chevaux ſeront aux ſeconds comme $\frac{12}{4} : \frac{48}{8} :: 3 : 6 :: 6 : 12$. Revenant donc à notre problême, nous aurons ces deux proportions $y : z :: \frac{b}{c} :: \frac{e}{f}$; $y : t :: \frac{b}{c} : \frac{g}{h}$. La premiere en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, donne $\frac{y \cdot e}{f} = \frac{b \cdot z}{c}$, ou $c \cdot ey = bf \cdot z$ équation que je déſignerai par I. La ſeconde proportion donnera l'équation $cgy = bht$ que je déſigne par II.

Les ſecondes bandes $a - y$, $d - z$, $x - t$, qui mangent journellement les herbes qui croiſſent pendant que les chevaux paiſſent ſont entr'elles comme les étendues des prés, parce que nous ſuppoſons que les herbes (tant celles qui étoient d'abord dans les prés, que celles qui répouſſent à chaque inſtant à proportion que les chevaux paiſſent) croiſſent uniformement dans tous les prés, & proportionnellement à leur étendue. Nous avons donc les deux proportions $a - y : d - z :: b : e$; $a - y : x - t :: b : g$. Deſquelles en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, il eſt aiſé de tirer les deux équations $ae - ey = bd - bz$ (que je déſigne par III), & $ag - gy = bx - bt$ (que je déſigne par IV), les équations I & II donnent $z = \frac{cey}{bf}$, $t = \frac{cgy}{bh}$. Subſtituant la valeur de $z$ dans l'équation III, nous trouverons $y = \frac{afe - bdf}{fe - ce}$. Cette valeur de $y$ étant ſubſtituée dans l'équation $t = \frac{cgy}{bh}$, il vient $t = \frac{cg\,(afe - bdf)}{bh\,(fe - ce)}$. la même valeur de $y$ ſubſtituée dans l'équation $z = \frac{cey}{bf}$ donne $z = \frac{ce\,(afe - bdf)}{bf\,(fe - ce)}$. Mettons les valeurs de $y$ & de $t$ dans l'équation IV, & nous trouverons après les opérations ordinaires, $x = \frac{aceg \cdot (f - h) + bdfg \cdot (h - c)}{beh\,(f - c)}$. Suſtituant main-

tenant les valeurs numériques de $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$, il vient $x = 8$. ainſi le nombre des chevaux cherché eſt 8, ſi la méthode qu'on vient d'employer eſt exacte.

Mais nous avons ſuppoſé que les herbes des trois prés croiſſoient uniformement & proportionnellement à l'étendue de ces prés pendant que les chevaux paiſſoient, ſuppoſition qu'on ne ſauroit admettre ; car il n'y a pas d'apparence que l'herbe qui a 6 pouces, *par exemple*, croiſſe en groſſeur & en longueur comme celle qui en a 8, ou 3, ou 5, &c. D'autre côté ſelon que le tems eſt plus ou moins favorable les herbes croiſſent plus ou moins dans un jour, dans une heure, &c. De ſorte qu'il pourroit arriver que les chevaux qui ſuffiſoient pour manger la quantité d'herbe qui étoit crûe hier dans un pré d'une certaine étendue, ne ſuffiroient pas pour manger dans le même eſpace de tems l'herbe qui pourra croître demain dans le même pré. Il eſt donc viſible qu'on ne doit pas regarder la ſolution que nous venons de donner comme bien rigoureuſe, & il n'arrive que trop ſouvent que les Géométres donnent des ſolutions fauſſes de certains problêmes, parce qu'ils partent des principes peu exacts, & quils n'ont pas bien approfondis : cela peut arriver bien facilement à ceux qui n'ont pas fait une certaine étude de la métaphyſique, & de la phyſique.

## *DES PROBLEMES INDÉTERMINÉS, Sémidéterminés & plus que Déterminés.*

67. Les *problêmes déterminés* ſont ceux pour la ſolution deſquels il y a autant d'équations que d'inconnues. Tels ſont les problêmes que nous avons réſolus juſqu'ici. On appelle *problême indéterminé*, un problême pour la ſolution duquel il y a moins d'équations que d'inconnues, parceque, pour la réſoudre, il eſt néceſſaire de déterminer arbitrairement une ou pluſieurs inconnues. Si, *par exemple*, on demandoit deux nombres $x$ & $y$, dont la ſomme fût 10, l'on auroit l'équation $x + y = 10$, ou $x = 10 - y$. Pour réſoudre ce problême, ſuppoſons $y = 9$, afin d'avoir $x = 10 - 9 = 1$. Si

l'on ſuppoſe $y = 8$, l'on aura $x = 2$. En général on voit que ce problême a une infinité de ſolutions: car on peut ſuppoſer $y$ égal à un nombre négatif ou poſitif, entier ou fractionnaire; de ſorte que l'on peut faire une infinité de ſuppoſitions arbitraires. Mais ſi l'on exigeoit que les deux nombres $x$ & $y$ fuſſent entiers & poſitifs, il eſt évident qu'il n'y auroit que 9 ſolutions poſibles, & qu'on pourroit ſeulement ſuppoſer $y = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Dans le cas où l'on ajoute des conditions aux problêmes indéterminés (ces conditions peuvent quelque fois rendre le nombre des ſolutions déterminé, ou faire voir que dans certains cas le problême n'a point de ſolution), ces problêmes prennent le nom de *ſémi-déterminés*. Si le nombre des équations d'un problême ſurpaſſe celui des inconnues, le problême eſt plus que déterminé & la ſolution en eſt ſouvent impoſſible, tel ſeroit celui-ci: trouver deux nombres $x$ & $y$, dont la ſomme $= 8$, la différence $= 2$ & le produit $= 12$. On aura donc ces trois équations, $x + y = 8$, $x - y = 2$, $xy = 12$. La ſeconde donne $x = 2 + y$; cette valeur de $x$ ſubſtituée dans la premiere donne $2 + y + y = 8$, ou $2 + 2y = 8$, ou $2y = 8 - 2 = 6$, & $y = 3$. Subſtituant cette valeur de $y$ dans la ſeconde, l'on a $x - 3 = 2$, ou $x = 5$; donc $xy = 5 \times 3 = 15$. Mais $xy$ doit être $= 12$, par la troiſiéme condition; donc le problême eſt impoſſible. Si l'on avoit exigé que le produit des nombres cherchés fût 15, la ſolution du problême auroit été poſſible; mais cette troiſiéme condition qui ſuit des deux premieres auroit été ſuperflue. On connoît qu'il y a des conditions ſuperflues exprimées par les équations, lorſqu'on parvient à une *équation identique*, c'eſt-à-dire,

c'eſt-à-dire, à une équation telle que les quantités qui compoſent le premier membre, ſont les mêmes que celles qui compoſent le ſecond. *Par exemple*, dans le problême ci-deſſus nous avons $x+y=8$, $x-y=2$; & ſuppoſant que la troiſiéme condition exige que $xy$ ſoit $=15$, nous aurons par les deux premieres équations, $x=5$, & $y=3$; ces valeurs ſubſtituées dans la troiſiéme $xy=15$, donnent $15=15$. La raiſon en eſt que les conditions identiques doivent donner des expreſſions identiques, comme les conditions différentes donnent des expreſſions différentes. En général il y aura autant d'équations identiques qu'on aura employé d'équations inutiles. Lorſque dans la ſolution d'un problême, après avoir rempli toutes les conditions, l'on arrive à une équation identique, c'eſt une marque que toutes les quantités du genre de celles dont on parle, ont les conditions requiſes, & que c'eſt un théorême & non un problême qu'on propoſe. Suppoſons, *par exemple*, que dans la ſérie des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. on demande quatre nombres de ſuite, tels que la ſomme des extrêmes ſoit égale à celle des moyens. Appellons ces nombres $x, y, z, p$; par la nature de la ſérie, $x+1=y$, $y+1=z$, & $z+1=p$; par la condition du problême, $x+p=y+z$; par les deux premieres équations, $x+2=z$; par celle-ci & la troiſiéme, $x+3=p$. Subſtituant dans la quatriéme les valeurs de $y, z, p$, il vient $2x+3=2x+3$, équation identique qui fait voir que quatre nombres quelconques ſucceſſifs de la ſérie 1, 2, 3 &c. ſont toujours tels que la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens: ainſi c'eſt un théorême & non un problême.

Si l'on parvient à une équation identique, ſans avoir exprimé toutes les conditions du problême, c'eſt une marque d'erreur, ou que l'on a pris une condition ſuperflue, & obmis quelque condition néceſſaire. On peut encore remarquer que les conditions ſuperflues peuvent faire paroître un problême déterminé, quoique réellement il ſoit indéterminé. *Par exemple*, qu'on demande quatre nombres $x, y, z, u$ dont la ſomme des moyens ſoit égale à celle des extrêmes, que celle des extrêmes ſoit 5, & le triple de celle des moyens 15. Par la premiere condition $x + u = y + z$; par la ſeconde & la premiere $y + z = 5$, & $x + u = 5$; par la troiſiéme $3y + 3z = 15$. Nous avons autant d'équations que d'inconnues, & l'on pourroit croire le problême déterminé; mais ſi dans la premiere équation, à la place du premier & du ſecond membre, on ſubſtitue leurs valeurs priſes dans les autres équations, il vient $5 = 5$. De même ſi dans la quatriéme on ſubſtitue la valeur de $y + z$ priſe dans la ſeconde, on aura $15 = 15$. Ainſi il y a quelque condition ſuperflue, & en effet celle-ci $y + z = 5$ ſuit évidemment de $x + u = y + z$, & de $x + u = 5$; de même $3y + 3z = 15$ ſuit de $x + u = y + z$, & de $x + u = 5$. Et parce qu'il n'y a aucun moyen de trouver deux autres équations réellement différentes, le problême eſt indéterminé. Il faut donc faire beaucoup d'attention, afin de trouver les équations néceſſaires pour la ſolution d'un problême, ſans en introduire de ſuperflues.

Dans les problêmes ſémi-déterminés que nous allons réſoudre, nous ſuppoſerons à l'égard de ceux du premier degré, qu'on demande des nombres entiers & poſitifs.

PROBLEME I. *On demande deux nombres* x, y, *tels que* $3x - 5y = 9$. Donc $3x - 9 = 5y$, & $y = \frac{3x-9}{5}$, qui doit être un nombre entier & positif; ainsi $3x > 9$ & $x > 3$, autrement $y$ seroit négatif. En second lieu pour que $y$ soit un nombre entier, il faut que $3x - 9$ soit exactement divisible par 5; mais parce que les seuls nombres terminés en 0, ou en 5, sont divisibles par 5, il faut que $3x - 9$ soit un nombre terminé en 0 ou en 5; or pour que $3x - 9$ soit terminé en 0, il est nécessaire que $3x$ soit terminé en 9, & pour que $3x - 9$ soit terminé en 5, $3x$ doit être terminé en 4; desorte qu'aucun nombre ne peut être admis pour la valeur de $x$ excepté ceux qui, multipliés par 3, se terminent en 9 ou en 4. Ainsi le plus petit possible est 8, viennent ensuite 13, 18, &c. auxquels répondent $y = 3$, 6, 9, &c. comme on le voit dans la table. On peut remarquer que les nombres qui représentent $x$, forment une progression arithmétique dont la différence est 5; mais la différence de la progression des nombres qui représentent $y$, est seulement 3; de sorte qu'en continuant les deux progressions à l'infini, l'on aura une infinité de solutions. Si l'on prend 13 pour $x$, on prendra pour $y$ la valeur correspondante 6, & l'on aura $3x - 5y = 39 - 30 = 9$. Si l'on suppose $x = 18$, il faudra prendre 9 pour la valeur de $y$; & l'on aura de même $3x - 5y = 54 - 45 = 9$, & ainsi de suite.

| | |
|---|---|
| 13 | 6 |
| 18 | 9 |
| 23 | 12 |
| &c. | &c. |

PROBLEME II. *On demande deux nombres* x & y *tels que le triple du premier joint au double du second donne 20, ou tels que* $3x + 2y = 20$. Donc $x =$

$\frac{20-2y}{3}$. Pour que $x$ ſoit entier & poſitif il faut que $20 > 2y$ & $10 > y$. De même il faut que $x < 7$, autrement $y = \frac{20-3x}{2}$ ne ſauroit être un nombre entier & poſitif. L'équation $x = \frac{20-2y}{3}$ ſe réduit à celle-ci $x = 6 + \frac{2-2y}{3} = 6 + 2 \times \frac{1-y}{3}$. Pour que la fraction donne un entier, en ſuppoſant $y < 10$. Il eſt facile de voir que $y$ ne peut avoir d'autres valeurs que 7, 4 & 1, auxquelles répondent les valeurs de $x = 2, 4, 6$. On peut remarquer qu'il importe peu que le nombre entier qui doit réſulter de la fraction, ſoit négatif, pourvu que $y$ ne paſſe pas les limites preſcrites. Ici, *par exemple*, $y$ ne doit pas être au-deſſous de 1, ni au-deſſus de 9.

| $y=$ | $x=$ |
|---|---|
| 7 | 2 |
| 4 | 4 |
| 1 | 6 |

PROBLEME III. *On demande deux nombres* x & y *tels que* $33x = 76 + 59y$. *Donc* $x = \frac{76+59y}{33}$. Parce que l'un & l'autre terme de la fraction peut être diviſé par le dénominateur, on aura en faiſant cette diviſion, $x = 2 + y + \frac{10+26y}{33}$. Voyons maintenant ſi les termes du numérateur n'ont pas un facteur commun, ils en ont un $= 2$ : ainſi réduiſant la fraction, nous aurons $\frac{2 \times (5+13y)}{33}$. Faiſant $\frac{5+13y}{33} = p$, nombre entier ; le double de cette fraction ſera auſſi un nombre entier. Nous appellerons *fractions réduites* les fractions pures (*ce ſont celles qu'on ne peut plus réduire*) dans leſ-

quelles les termes du numérateur ſont premiers entr'eux. De l'équation $\frac{5+13y}{33}=p$, on tire $y=\frac{33p-5}{13}$, ou en réduiſant la fraction, $y=2p+\frac{7p-5}{13}$. Faiſons maintenant $\frac{7p-5}{13}=q$ nombre entier, on trouvera $p=\frac{13q+5}{7}$, & en réduiſant la fraction, $p=q+\frac{6q+5}{7}$. Suppoſons $\frac{6q+5}{7}=r$ nombre entier, on aura $q=r+\frac{r-5}{6}$. Soit enfin $\frac{r-5}{6}=t$ (nombre entier); donc $r-5=6t$ & $r=5+6t$. Cette équation donne pour $r$ un nombre entier, puiſque $t$ par ſuppoſition eſt un nombre entier. En rétrogradant nous avons $q=7t+5$, $p=13t+10$, $y=33t+25$. Cette valeur de $y$ étant ſubſtituée dans l'équation $x=\frac{75+59y}{33}$ donne $x=47+59t$, équation qui fait voir qu'en ſubſtituant à la place de $t$ un nombre entier poſitif, $x$ ſera toujours un nombre entier poſitif. Si l'on ſuppoſe $t=1$, 106 ſera le plus petit nombre qui puiſſe repréſenter $x$.

Suppoſons $a=5$, $d=13$, $c=33$; la premiere fraction réduite devient $p=\frac{a+dy}{c}$. Si l'on fait attention à la ſuite des opérations précédentes, on pourra voir dans quel cas on peut ſubſtituer des valeurs de $y$ qui rendent $x$ entier & poſitif; car dans la nouvelle fraction qui réſulte de la premiere on diviſe $c$ par $d$ ($d$ repréſente le coefficient de l'inconnue $y$, $p$, &c. dans chaque fraction réduite, &

$c$ le dénominateur de chaque fraction réduite), & l'on a pour reste une nouvelle fraction réduite, dans laquelle on divise encore $c$ par $d$, premier reste, ensuite celui-ci par le second reste, &c. (On entend ici par reste le multiplicateur de l'inconnue dans la fraction réduite). Si $d$ & $c$ sont premiers entr'eux, on doit arriver à la fin à un reste égal à l'unité (14); ce qui étant fait, l'on a ce que l'on cherche. Car faisant la derniere fraction égale à une nouvelle inconnue, on pourra assigner à cette inconnue une valeur en nombres entiers & positifs. Mais si $d$ & $c$ ne sont pas premiers, il est impossible d'arriver à un reste $= 1$. Soit la fraction réduite $\frac{a+dy}{c}$, $a$ & $d$ étant premiers entr'eux, $d$ & $c$ ne l'étant pas. Supposons que leur diviseur commun soit $n$, il est clair que $n$ ne divisera pas $a$, autrement $a$ & $d$ ne seroient pas premiers entr'eux. Faisons $d = nf$, $c = ng$, notre fraction deviendra $\frac{a+nfy}{ng} = p$; donc $\frac{a}{n} + fy = gp$ (nombre entier), & parce que $fy$ est aussi un nombre entier, $\frac{a}{n}$ seroit un nombre entier & $a$ seroit divisible par $n$, ce qui est impossible; donc, &c. En effet supposons la fraction réduite $\frac{5+11y}{33}$ dans laquelle $d$ & $c$, c'est-à-dire 11 & 33 ne sont pas premiers entr'eux. Faisons $\frac{5+11y}{33} = p$; donc $y = 3p - \frac{5}{11}$; mais $y$ & $p$ étant des nombres entiers, il est évident que cette équation ne peut jamais avoir lieu. On peut donc connoître par-là dans quel cas une fraction réduite peut, ou ne peut pas être un entier,

en ſuppoſant $y$ entier, ou dans quel cas la méthode précédente peut réuſſir.

PROBLEME VI. *Un Cuiſinier a acheté des perdrix & des lapins ; il a payé chaque perdrix 31 ſols, & chaque lapin 20 ſols. Il ſe trouve que les lapins lui ont coûté 7 ſols de plus que les perdrix, combien a-t-il acheté de perdrix & de lapins ?* Suppoſons que $x$ eſt le nombre des lapins, & que $y$ déſigne celui des perdrix. Par la nature du problême on aura $20x = 31y + 7$, & $x = \frac{31y+7}{20} = y + \frac{11y+7}{20}$ $= y + r$ (en faiſant la fraction $= r$) ; donc $20r = 11y + 7$, & $y = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{11} = r + ſ$ ; donc $11ſ = 9r - 7$, & $r = \frac{11ſ+7}{9} = ſ + \frac{2ſ+7}{9} = ſ + t$ ; ainſi $9t = 2ſ + 7$, & $ſ = \frac{9t-7}{2}$ $= 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u$. C'eſt pourquoi $2u = t - 7$, & $t = 2u + 7$ ; donc $ſ = 4t + u = 9u + 28$ ; $r = ſ + t = 11u + 35$ ; $y = r + ſ = 20u + 63$ nombre des perdrix ; & $x = y + r = 31u + 98$ nombre des lapins. Il eſt viſible que les plus petites valeurs poſitives de $x$ & de $y$ ſe trouvent en faiſant $u = -3$ ; celles qui ſont plus grandes ſe ſuivent en progreſſion arithmétique comme le fait voir la table.

| $x =$ | $y =$ |
|---|---|
| 5 | 3 |
| 36 | 23 |
| 67 | 43 |
| 98 | 63 |
| 129 | 83 |
| 160 | 103 |
| &c. | &c. |

PROBLEME. *Un orfevre a trois lingots d'or, le premier contient 7 onces d'or par marc, le ſecond $5\frac{1}{2}$, & le troiſiéme $4\frac{1}{2}$ ; il veut faire un alliage de 30 marcs, de maniere que le marc de cet alliage con-*

*tienne ſix onces d'or. Comment doit-il s'y prendre ?* Qu'il prenne $x$ marcs du premier lingot, $y$ marcs du ſecond, & $z$ marcs du troiſiéme, pour avoir 1°. l'équation $x+y+z=30$; 2°. il eſt viſible que $7x+5\frac{1}{2}y+4\frac{1}{2}z$ exprimera la quantité d'or qui doit ſe trouver dans l'alliage, c'eſt-à-dire, 30 fois 6 onces d'or, ou 180 onces; donc $7x+5\frac{1}{2}y+4\frac{1}{2}z=180$. multipliant la premiere équation par 9 & la retranchant enſuite de celle-ci multipliée par 2, il vient $5x+2y=90$; d'où l'on tire $2y=90-5x$, $y=45-\frac{5x}{2}=45-5u$, en faiſant $\frac{x}{2}=u$. Mais $z=30-x-y$: donc $z=3u-15$; ainſi $u$ doit être plus grand que 4, & plus petit que 10. Cependant il ne peut pas être $=5$, autrement $z$ ſeroit $=0$, il ne peut pas non plus être $=9$, parce que dans ce cas $y$ ſeroit $=0$; de ſorte que le problême admet les ſolutions qu'indique la table.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u=6$, | $x=12$, | $y=15$, | $z=3$. |
| 7 | 14 | 10 | 6 |
| 8 | 16 | 5 | 9 |

PROBLEME. VI. *Les faiſans ſe vendant deux écus, les perdrix un écu & les cailles $\frac{1}{2}$ écu, un ſeigneur ordonne à ſon maître-d'hôtel de lui acheter cent de ces oiſeaux ne lui donnant pour cela que 70 écus, comment pourra s'y prendre le maître-d'hôtel ?* Par la nature du problême en faiſant le nombre des faiſans cherché $=x$, celui des perdrix $=y$, & celui des cailles $=z$, on aura ces deux équations $x+y+z=100$, $2x+y+\frac{1}{2}z=70$. De la ſeconde

multipliée par 2, retranchez la premiere, pour avoir $3x + y = 40$; ainsi il est visible que $x$ est $< \frac{40}{3}$ ou $< 14$, & $y < 40$. Considérons maintenant la formule $y = 40 - 3x$. Si l'on fait $x = 13$, on trouve $y = 1$, & $z = 86$. Si $x = 12$, $y$ sera $= 4$, & $z = 84$, & ainsi de suite. La table fait voir qu'il y a treize solutions.

| $x = 13$, | $y = 1$, | $z = 86$ |
|---|---|---|
| 12 | 4 | 84 |
| 11 | 7 | 82 |
| 10 | 10 | 80 |
| 9 | 13 | 78 |
| 8 | 16 | 76 |
| 7 | 19 | 74 |
| 6 | 22 | 72 |
| 5 | 25 | 70 |
| 4 | 28 | 68 |
| 3 | 31 | 66 |
| 2 | 34 | 64 |
| 1 | 37 | 62 |

PROBLEME VII. *Trente bêtes ont coûté 75 écus; les moutons coûtent 5 écus, les brebis 3, & les agneaux 2; on demande le nombre des moutons* x, *celui des brebis* y, *& celui des agneaux* z. Il est évident par la nature du problême, que les moutons ont coûté $5x$, les brebis $3y$, & les agneaux $2z$. Donc on a l'équation $5x + 3y + 2z = 75$. De plus, puisqu'il y a 30 bêtes, on a $x + y + z = 30$. Multipliant la seconde équation par 2, & la retranchant ensuite de la premiere, le premier membre du premier membre, le second du second (ce qui évidemment ne détruit point l'égalité, puisque de quantités égales on ôte seulement des quantités égales), il vient $3x + y = 15$, ce qui fait connoître que $y < 15$, & $x < 5$. Multipliant la seconde équation par 3, & du produit ôtant la premiere, l'on a $-2x + z = 15$; mais $2x < 10$, puisque $x < 5$; donc $z < 25$. Parce que la limite de $x$ est plus petite que celle de $y$, servons nous de l'équation $3x + y = 15$, qui nous donne $y = 15 - 3x$. Faisant usage de cette premiere équation & de $z = 15 + 2x$, si nous supposons $x = 4$, nous aurons $y = 3$ & $z = 23$. La table fait voir les solutions qu'admet le problême, où l'on voit aussi les séries & les différences des séries des valeurs correspondantes de $x$, $y$, $z$.

| $x = 4$, | $y = 3$, | $z = 23$ |
|---|---|---|
| 3 | 6 | 21 |
| 2 | 9 | 19 |
| 1 | 12 | 17 |

PROBLEME VIII. *On a acheté 30 bouteilles de différens vins*

*75 liv. Le vin de Bourgogne coûte 5 liv. la bouteille, celui de Champagne 3 liv. & celui de Cahors 2 liv. On demande le nombre des bouteilles de chaque eſpece de vin?* Il eſt viſible qu'en appellant $x$ le nombre des bouteilles du premier vin, $y$ le nombre des bouteilles du ſecond, & $z$ celui des bouteilles du troiſieme, on aura les équations ſuivantes $x+y+z=30$; $5x+3y+2z=75$, deſquelles on tirera les mêmes valeurs numériques de $x$, $y$ & $z$ que dans le problême précédent.

PROBLEME IX. *Suppoſant qu'un voyageur n'a que trois eſpeces de monnoie, les pieces de la premiere eſpece valent 5 liv. celle de la ſeconde 3 liv. & celle de la troiſiéme 2 liv. Il a dépenſé 75 liv. qu'il veut payer en 30 pieces, combien de pieces doit-il donner de chaque eſpece?* Soit $x$ le nombre cherché des des pieces de la premiere eſpece, $y$ celui des pieces de la ſeconde eſpece, $z$ celui des pieces de la troiſiéme eſpece; il eſt évident que nous aurons les deux équations $x+y+z=30$; $5x+3y+2z=75$, d'où nous tirerons les mêmes valeurs numériques de $x$, $y$ & $z$ que dans l'avant dernier problême: ainſi ce voyageur peut payer ſa dépenſe de quatre manieres différentes.

PROBLEME X. *Trois marchands ont chacun un certain nombre d'écus, de maniere que ſi on multiplie le nombre des écus du premier par 3, le nombre des écus du ſecond par 5, & le nombre des écus du troiſiéme par 7, la ſomme des produits eſt = 560; mais ſi l'on multiplie le premier nombre par 9, le ſecond par 25, & le troiſiéme par 49, la ſomme des produits ſera 2920, on demande le nombre des écus de chacun.* Soit $x$ le nombre des écus du premier marchand, $y$ le nombre des écus du ſecond, & $z$ le nombre des écus du troiſiéme. On aura donc les deux équations $3x+5y+7z=560$; $9x+25y+49z=2920$. Multipliant la premiere par 3 & la retranchant enſuite de la ſeconde, il reſtera $10y+28z=1240$; d'où $5y+14z=620$; d'où l'on tire $y=124-\frac{14z}{5}$. Il eſt donc néceſſaire que $z$ ſoit diviſible par 5. Ainſi faiſant $u=\frac{z}{5}$ ou $5u=z$, nous aurons $y=124-14u$; c'eſt pourquoi la premiere équation deviendra $3x-35u+620=560$, ou $3x=35u-60$, & $x=\frac{35u}{3}-20$. Si l'on fait $u=3t$, on trouvera $x=35t$

$= 20$, $y = 124 - 42t$, & $z = 15t$. Or il eſt viſible que $t$ doit être $< 3$, autrement $y$ ſeroit négatif; de maniere que l'on eſt borné aux deux ſolutions qu'on voit dans la table.

| $t = 1$ | $x = 15$ | $y = 82$ | $z = 15$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 50 | 40 | 30 |

PROBLEME XI. *Diſpoſer 20 chevaux dans cinq écuries de maniere qu'il y en ait un nombre impair dans chacune.* Soit $s$ le nombre des chevaux qu'il doit y avoir dans la premiere écurie, $t$ celui de la ſeconde, $x$ celui de la troiſiéme, $y$ celui de la quatriéme, & $z$ celui de la cinquiéme. Comme $s$ & $t$ doivent être des nombres impairs, leur ſomme $s + t$ ſera évidemment un nombre pair que je fais $= p$. Par la même raiſon $x + y$ ſera un nombre pair que je ſuppoſe $= q$; mais $p + q$, ſomme de deux nombres pairs eſt auſſi un nombre pair que je fais $= n$. Si au nombre $n$ j'ajoute $z$, nombre impair, la ſomme $n + z$ des deux nombres, dont l'un eſt pair, & l'autre impair, ſera évidemment un nombre impair; donc le nombre des chevaux devroit être impair. Mais ce nombre eſt 20 nombre pair; donc le problême eſt impoſſible. On prouvera de même qu'il n'eſt pas poſſible de placer 100 chevaux dans ſept écuries de maniere qu'il y en ait un nombre impair dans chacune, parce qu'alors ſept nombres impairs donneroient un nombre pair, c'eſt-à-dire, que la ſomme d'un nombre impair de nombres impairs donneroit un nombre pair, ce qui eſt impoſſible.

Il arrive ſouvent qu'on ne parviendroit jamais à la ſolution d'un problême, ſi l'on ne faiſoit attention à quelques propriétés ſingulieres des quantités qui peuvent le réſoudre; c'eſt ce qu'on peut facilement remarquer dans l'exemple ſuivant.

PROBLEME XII. *Trouver un nombre parfait, c'eſt-à-dire, un nombre égal à la ſomme de ſes diviſeurs exacts.* Parmi ces diviſeurs nous ne comptons pas le nombre lui-même, autrement le problême ſeroit abſurde. Je remarque que lorſqu'une progreſſion géométrique commence par l'unité & que ſon ſecond terme eſt un nombre premier, aucun de ſes termes ne peut être diviſé exactement que par quelqu'un de ceux qui le précédent, comme il eſt facile de s'en appercevoir dans la progreſſion $\frac{1}{1} : 1 : 2 : 4 : 8 : 16$ &c. (A). Je fais encore attention que dans la progreſſion A, 1°. Chaque terme eſt égal à la ſomme des termes précédens augmentée de l'unité; 2°. Que ſi on multiplie un des termes par un nombre premier, le produit

ne peut être diviſé que par le terme qu'on a pris, par ceux qui le précédent, par le multiplicateur premier, & par les produits de ce multiplicateur par les termes précédens de la progreſſion. Soit $d = 2$, la progreſſion A deviendra $\div\div d^0 : d : d^2$ &c. Soit encore $d^n$ le terme cherché, $x$ le multiplicateur premier par lequel on doit multiplier le terme $d^n$ pour avoir $d^n x$ nombre parfait cherché. Tous les diviſeurs de ce produit ſont $d^0 = 1, d, d^2, d^3 \cdots d^n, x, dx, d^2x \cdots d^{n-1}x$; & parce que $d^n$ eſt égal à la ſomme de tous ſes diviſeurs, on aura $d^n x = 1 + d + d^2 \cdots + d^n + x + dx + d^2x \cdots + d^{n-1}x$. D'où l'on tirera aiſément $d^n x - x - dx - d^2x \cdots - d^{n-1}x = 1 + d + d^2 \cdots + d^n$, & $x = \frac{1 + d + d^2 \cdots + d^n}{d^n - 1 - d - d^2 \cdots - d^{n-1}}$. Mais $d^n = (1 + d + d^2 \cdots + d^{n-1}) + 1$; donc $d^n - 1 - d \cdots - d^{n-1} = 1$, c'eſt-à-dire, que le dénominateur de la valeur de $x$ eſt l'unité, & par conſéquent $x = 1 + d + d^2 \cdots + d^n$. D'autre côté $x$ doit être un nombre premier; ainſi ſi on ajoute les uns avec les autres les termes de la progreſſion $\div\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$ &c. juſqu'à ce que la ſomme donne un nombre premier, & qu'on multiplie cette ſomme par le dernier terme qu'on a pris, le produit ſera un nombre parfait, & l'on pourra de cette maniere en trouver tant qu'on voudra. En prenant les deux premiers termes 1 & 2, on a 3 nombre premier, & multipliant ce nombre par 2 dernier terme pris, on a 6 nombre parfait; car il eſt égal à la ſomme de tous ſes diviſeurs, 1, 2, 3. De même prenant les trois premiers termes 1, 2, 4, on trouve 7 nombre premier qui, étant multiplié par 4, donne 28, autre nombre parfait égal à tous ſes diviſeurs 1, 2, 4, 7, 14; & ainſi de ſuite.

68. Venons maintenant à une autre eſpece de problêmes, dans leſquels nous ſuppoſerons que les quantités inconnues ne ſont pas ſourdes ou incommenſurables : comme ſeroit, *par exemple*, la quantité $\sqrt{3}$.

PROBLEME I. *Trouver deux nombres dont la ſomme des quarrés ſoit un nombre quarré.* Si au quarré $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$, on ajoute un autre quarré $4x^2y^2$, la ſomme ſera $= x^4 + 2x^2y^2 + y^4$, quarré de

$x^2 + y^2$ ; donc les nombres cherchés ſont $x^2 - y^2$ & $2xy$, dont la ſomme des quarrés égale le quarré de $x^2 + y^2$. Ainſi l'on peut donner à $x$ & à $y$ telles valeurs que l'on voudra, pourvu que ces valeurs ne ſoient point des quantités ſourdes ou irrationnelles. Si l'on ſuppoſe $x = 3$ & $y = 2$, on aura $x^2 - y^2 = 9 - 4 = 5$, $2xy = 12$, & $25 + 144 = 169$, quarré de $x^2 + y^2 = 13$.

PROBLEME II. *Trouver deux nombres quarrés dont la différence ſoit un quarré.* Soit $x + y$ l'un de ces nombres, $x - y$ l'autre nombre, leurs quarrés ſont $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - 2xy + y^2$, dont la différence $4xy$ doit être un nombre quarré ; mais la racine $2\sqrt{xy}$ eſt néceſſairement un nombre pair ( parce que le double d'un nombre pair ou impair eſt néceſſairement pair ). Soit donc $2n$ cette racine, l'on aura $4xy = 4nn$, & $xy = nn$ ; ce qui fait voir que $xy$ eſt un nombre quarré. Ainſi ſi l'on diviſe un quarré quelconque $nn$ en deux facteurs, dont l'un ſoit pris pour $x$, & l'autre pour $y$, le problême ſera réſolu. Soit ſuppoſé $nn = 4$, ſi l'on fait $x = 4$ & $y = 1$, les nombres cherchés $x + y$, $x - y$ ſeront 5 & 3, dont les quarrés ſont 25 & 9 ; or la différence de ces quarrés eſt $= 16$ nombre quarré.

PROBLEME III. *Trouver deux nombres* x *&* y *tels que le quarré du premier joint au ſecond ſoit égal au quarré du ſecond joint au premier.* On aura donc $x^2 + y = y^2 + x$, ou $x - y = x^2 - y^2 = (x + y) \times (x - y)$ ; donc en diviſant par $x - y$, $1 = x + y$ ; & partant ſi l'on partage l'unité en deux parties quelconques, ces deux parties réſoudront le problême. Ainſi ſi l'une des parties eſt $\frac{1}{3}$ & l'autre $\frac{2}{3}$, on aura $\frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}$.

PROBLEME IV. *Diviſer un nombre quarré* aa *en deux*

*autres quarrés* $x^2$ & $y^2$. Par la nature du problême l'on aura $a^2 = x^2 + y^2$ (A), $a^2 - x^2 = y^2 = (nx - a)^2$ ,,en faiſant $y = nx - a$; donc l'équation A deviendra $a^2 = x^2 + nnxx - 2anx + a^2$, ou en tranſpoſant & effaçant les termes qui ſe détruiſent, $2nax = xx + nnxx$, ou $2na = (1 + nn)x$; donc $x = \frac{2na}{1+nn}$. Si on prend donc pour $x$ & pour $n$ des nombres rationnels, $y$ ſera auſſi rationnel. Soit $n = 2$, $x$ ſera $= \frac{4a}{5}$. C'eſt pourquoi ſi on ſuppoſe $a = 5$, & par conſéquent $a^2 = 25$, on aura $x = 4$ & $y = nx - a$ ſera $= 3$ : ainſi les nombres cherchés $x$ & $y$ ſeront 4 & 3, & la ſomme $16 + 9$ de leurs quarrés ſera égale au quarré $a^2 = 25$.

PROBLEME V. *Etant donnés deux nombres quarrés* aa, bb *partager leur ſomme* aa + bb *en deux autres quarrés.* Soit $x - a$ la racine d'un des quarrés cherchés, $nx - b$ la racine de l'autre; nous aurons donc $(x - a)^2 + (nx - b)^2 = a^2 + b^2$, ou $x^2 - 2ax + a^2 + n^2x^2 - 2nbx + b^2 = a^2 + b^2$; & en tranſpoſant & effaçant les quantités qui ſe détruiſent, $x^2 + n^2x^2 = 2nbx + 2ax$, & en diviſant par $x$, $x + n^2x = 2nb + 2a$; d'où l'on tire $x = \frac{2nb+2a}{1+n^2}$. On pourra donc ſatisfaire à la queſtion propoſée, en prenant pour $n$ un nombre rationnel, excepté l'unité; car ſi on faiſoit $n = 1$, on auroit $x = b + a$, & le nombre $x - a$ ſeroit $= b$; de ſorte que dans ce cas la ſomme $a^2 + b^2$ ne ſeroit pas partagée en deux quarrés différens de $a^2$ & $b^2$. Si on ſuppoſe $n = 2$, l'on a $x = \frac{4b+2a}{5}$. Si donc on ſuppoſe encore $b = 2$, $a = 3$, il viendra $x =$

$\frac{24}{5}$, $x - a = -\frac{1}{5}$, & $nx - b = \frac{28}{5} - 2 = \frac{18}{5}$. Les quarrés de ces nombres $\frac{1}{25}$ & $\frac{324}{25}$ étant ajoutés enſemble donnent $\frac{325}{25} = 13$, ſomme de deux quarrés $4 + 9 = a^2 + b^2$.

PROBLEME VI. *On demande un nombre* x, *qui ajouté à deux nombres donnés* a & b, *les rende quarrés.* Par la nature du problême $a + x$ ſera un quarré parfait, auſſi-bien que $b + x$. Soit $m + n$ la racine du premier quarré & ſuppoſons que $m - n$ ſoit celle du ſecond, nous aurons,

$$a + x = mm + 2mn + nn. \quad A$$
$$b + x = mm - 2mn + nn. \quad B$$
$$a - b = 4mn,$$

Ainſi ſi on prend le quart $mn$ de la différence des nombres donnés, & qu'on le diviſe en deux facteurs $m$ & $n$, les racines des quarrés qui réſoudront le problême, ſeront $m + n$ & $m - n$. Or l'un quelconque de ces quarrés ſuffira pour trouver la valeur de $x$ par le moyen des équations A ou B. Soit $a = 17$, $6 = 5$, on aura $a - b = 12$ & $mn = 3$. Ayant donc pris $m = 3$ & $n = 1$, pour avoir $m + n = 4$, $m - n = 2$, il viendra $a + x = 16$ & $x = -1$ (l'équation $b + x = 4$ donne auſſi $x = -1$) & il eſt viſible que $17 - 1 = 16$, & $5 - 1 = 4$ ſont des nombres quarrés.

PROBLEME VII. *Titius & Alexandre ont chacun un certain nombre de louis, de maniere que ſi l'on ajoute le produit de ces nombres à leur ſomme, le réſultat donne 79; quel eſt le nombre des louis de chacun?* Soit $x$ le nombre des louis de Titius, $y$ le nombre des louis d'Alexandre. Par la nature du problême $xy + x + y = 79$; donc $xy + y = 79 - x$, & $y = \frac{79 - x}{x + 1} = -1 + \frac{80}{x+1}$. Il faut donc que $x + 1$ ſoit un diviſeur de

80. Si l'on veut que $x$ & $y$ ſoit des nombres entiers poſitifs ou 0, on aura les ſolutions indiquées par la table.

| Diviſeurs de 80 | 1 | 2 | 4 | 5 | 8 | 10 | 16 | 20 | 40 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x =$ | 0 | 1 | 3 | 4 | 7 | 9 | 15 | 19 | 39 | 79 |
| $y =$ | 79 | 39 | 19 | 15 | 9 | 7 | 4 | 3 | 1 | 0 |

PROBLEME VIII. m, a, b & c *étant des nombres donnés, on demande la valeur de* x *&* y *en nombres entiers, lorſqu'on a l'équation* $mxy = ax + by + c$. On aura donc $y = \frac{ax+c}{mx-b}$, $my = \frac{max+mc}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$, & par conſéquent le numérateur de cette fraction doit être diviſible par le dénominateur; c'eſt pourquoi en faiſant le numérateur $= fg$, & $mx - b = f$ ou $x = \frac{f+b}{m}$, $f + b$ doit être diviſible par $m$. Ainſi parmi les facteurs de $mc + ab$ on ne peut employer que ceux qui, étant ajoutés à $b$, donnent une ſomme diviſible par $m$.

PROBLEME IX. *Alexandre a un nombre* x *de louis & Titius un nombre* y *tels que* $5xy = 2x + 3y + 18$, *quel eſt le nombre des louis d'Alexandre & celui de Titius?* On aura $y = \frac{2x+18}{5x-3}$ & $5y = \frac{10x+90}{5x-3} = 2 + \frac{96}{5x-3}$. Il ne s'agit donc que de trouver parmi les diviſeurs de 96 ceux qui, ajoutés à 3, donnent des nombres diviſibles par 5; mais les diviſeurs de 96 étant 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, il eſt facile de voir qu'il n'y a que 2, 12, 32 qui aient la condition requiſe. Si l'on fait $5x - 3 = 2$, on aura $x = 1$ & $y = 10$; l'équation $5x - 3 = 12$ donne $x = 3$ & $y = 2$. Enfin la ſuppoſition de $5x - 3 = 32$ donnera $x = 7$ & $y = 1$.

REMARQUE. Comme dans la ſolution générale l'on a $my - a = \frac{mc+ab}{mx-b}$, il n'eſt pas difficile de voir que ſi un nombre de la forme $mc + ab$ eſt diviſible par $mx - b$, le quotient eſt néceſſairement renfermé dans la forme $my - a$. Ainſi l'on peut repréſenter $mc + ab$ par $(mx - b) \cdot (my - a)$. Si l'on avoit $m = 12$, $b = 7$, $a = 5$ & $c = 15$, on trouveroit $12y - 5$

=

$= \frac{215}{12x-7}$. Les diviseurs de 215 sont 1, 5, 43, 215, parmi lesquels il faut choisir ceux qui sont compris dans la formule $12x - 7$. Le seul diviseur 5 satisfaisant à cette condition, on a $12x - 7 = 5$, & $12y - 5 = 43$; donc $x = 1$ & $y = 4$.

PROB. X. *Titius a un nombre* x *& Alexandre un nombre* y *de chevaux, de maniere que* $xx + xy = 2x + 3y + 29$; *quel eſt le nombre des chevaux de chacun?* On aura $y = \frac{2x - xx + 29}{x - 3}$ $= -x - 1 + \frac{26}{x-3}$; $x - 3$ doit donc être un diviseur de 26, & la diviſion étant ſuppoſée faite, le quotient ſera $y + x + 1$; mais les diviſeurs de 26 ſont 1, 2, 13, 26: Ainſi nous aurons les ſolutions ſuivantes, ſi $x - 3 = 1$, ou ſi $x = 4$, on aura $y + x + 1 = y + 5 = 26$, & $y = 21$. Si $x - 3 = 2$, on aura $x = 5$ & $y = 7$. Si $x - 3 = 13$, on aura $x = 16$ & $y = -15$. Cette derniere valeur étant négative ne peut pas ſervir, & c'eſt pour la même raiſon qu'on ne peut pas ſuppoſer $x - 3 = 26$.

PROBLEME XI. *On demande de rendre rationelle la quantité* $\sqrt{(a + bx)}$. Soit $a + bx = yy$, on aura $x = \frac{yy - a}{b}$, & quelque nombre que l'on ſubſtitue à la place de $y$, il en réſultera toujours pour $x$ une valeur telle que $a + bx$ ſera un quarré, & par conſéquent $\sqrt{(a + bx)}$ une quantité rationelle.

PROBLEME XII. *Rendre rationelle la formule* $\sqrt{(1 + xx)}$. Il eſt clair que les valeurs de $x$ ne peuvent être des nombres entiers; il faut donc ſe borner à chercher des nombres fractionnaires. Soit $1 + xx = x + t$; donc $1 + x^2 = xx + 2tx + t^2$; d'où l'on tire $2tx + tt = 1$, & $x = \frac{1 - tt}{2t}$. Si à la place de $t$ on ſubſtitue un nombre entier ou fractionnaire, il en réſultera pour $x$ une valeur qui réſoudra le problême. Soit $t = \frac{m}{n}$, on aura $x = \frac{1 - \frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}} = \frac{nn - mm}{2mn}$ (en multipliant les deux tèrmes de la fraction par $nn$). Donc $1 +$

$xx = \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{4mmnn}$, & $\sqrt{(1+xx)} = \frac{nn+mm}{2mn}$. Si $n=2$, & $m=1$, on a $x=\frac{3}{4}$; si $n=3$, & $m=1$, il vient $x=\frac{4}{3}$; si $n=3$ & $m=2$, $x$ sera $=\frac{5}{12}$; &c.

PROBLEME XIII. *ζ étant un nombre entier, on propose de rendre rationelle la formule* $\sqrt{(2zz+1)}$. Soit supposée cette quantité $=\zeta+p$, l'on aura $2\zeta\zeta+1=\zeta\zeta+2\zeta p+pp$; ainsi $\zeta\zeta=2\zeta p+pp-1$, & $\zeta=p+\sqrt{(2pp-1)}$. Il est donc visible que si $p=1$, $\zeta$ sera une quantité rationelle $=2$ & $\sqrt{(2\zeta\zeta+1)}$ sera $=3$.

PROBLEME XIV. *ζ étant toujours un nombre entier, on propose de rendre rationelle la forme* $\sqrt{(3zz+1)}$. Supposant cette quantité $=\zeta+p$, nous aurons $3\zeta\zeta+1=\zeta\zeta+2\zeta p+pp$ & $2\zeta\zeta=2\zeta p+pp-1$, d'où l'on tire $\zeta=\frac{p+\sqrt{(3pp-2)}}{2}$; $\zeta$ sera donc rationel en supposant $p=1$, ce qui donnera $\zeta=1$, & $\sqrt{(3\zeta\zeta+1)}=2$.

PROBLEME XV. *ζ étant encore un nombre entier, on demande de rendre rationelle la forme* $\sqrt{(5zz+1)}$ *qui est plus grande que* $2\zeta$. Je suppose cette quantité $=2\zeta+p$ pour avoir $5\zeta\zeta+1=4\zeta\zeta+4\zeta p+pp$; d'où je tire $\zeta\zeta=4\zeta p+pp-1$, & $\zeta=2p+\sqrt{(5pp-1)}=2+2$, en supposant $p=1$; donc $\zeta=4$ & $\sqrt{(5\zeta\zeta+1)}=9$.

PROBLEME. *ζ étant toujours un nombre entier, on propose de rendre rationelle la forme* $\sqrt{(6\zeta\zeta+1)}$ *dont la valeur est entre* $2z$ *&* $3z$. Je fais donc cette quantité $=2\zeta+p$ pour avoir $6\zeta\zeta+1=4\zeta\zeta+4\zeta p+pp$, ou $2\zeta\zeta=4\zeta p+pp-1$. Donc par la méthode des équations du second degré, j'aurai $\zeta=p+\frac{\sqrt{(6pp-2)}}{2}$; donc $\zeta>2p$, du moins en supposant $p>1$. Si en conséquence je suppose $\zeta=2p+q$, nous aurons en substituant cette valeur dans l'équation précédente, & ôtant la fraction, nous aurons, dis-je, $4p+2q=2p+\sqrt{(6pp-2)}$, ou $2p+2q=\sqrt{(6pp-2)}$ ou, en prenant les quarrés $4pp+8pq+4qq=6pp-2$. Il est donc facile de voir que $2pp=4qq+8pq+2$, $pp=2qq+4pq+1$, & $p=2q+\sqrt{(6qq+1)}$. Cette formule ressemblant à la premiere, je fais $q=0$, donc $p=1$, $\zeta=2$, & $\sqrt{(6\zeta\zeta+1)}=5$.

PROBLEME XVI. *ζ étant encore un nombre entier, comment*

*peut-on rendre rationelle la formule* $\sqrt{(7\zeta\zeta+1)}=m$ ? Il eſt facile de voir que $m>2\zeta$; je fais donc $m=2\zeta+p$ pour avoir $7\zeta\zeta+1=4\zeta\zeta+4\zeta p+pp$, ou $3\zeta\zeta=4\zeta p+pp-1$; donc $\zeta=\frac{2p+\sqrt{(7pp-3)}}{3}$. Maintenant, puiſque $\zeta>\frac{4p}{3}$, & par conſéquent plus grand que $p$, je ſuppoſerai $\zeta=p+q$, & j'aurai $p+3q=\sqrt{(7pp-3)}$, ou $pp+6pq+9qq=7pp-3$; donc $6pp=9qq+6pq+3$, ou $2pp=3qq+2pq+1$, & par conſéquent $p=\frac{q+\sqrt{(7qq+2)}}{2}$. Or on a ici $p>q$; c'eſt pourquoi je fais $p=q+r$, pour avoir $q+2r=\sqrt{(7qq+2)}$. De là je tire d'abord $qq+4rq+4rr=7qq+2$, enſuite $6qq=4qr+4rr-2$, ou $3qq=2qr+2rr-1$; & enfin $q=\frac{r+\sqrt{(7rr-3)}}{3}$. Et parce que $q>r$, je fais $q=r+s$, pour avoir $2r+3s=\sqrt{(7rr-3)}$, ou $4rr+12rs+9ss=7rr-3$, ou $3rr=12rs+9ss+3$, ou $rr=4rs+3ss+1$, & $r=2s+\sqrt{(7ss+1)}$, formule par laquelle en faiſant $s=0$, on obtient $r=1$, $q=1$, $p=2$, $\zeta=3$, & $m=8$.

On peut auſſi réſoudre plus facilement ce problème de la maniere ſuivante. Puiſque $7\zeta\zeta+1=mm$, il eſt viſible que $m<3\zeta$. Je ſuppoſe donc $m=3\zeta-p$ pour avoir $7\zeta\zeta+1=9\zeta\zeta-6\zeta p+pp$, ou $2\zeta\zeta=6\zeta p-pp+1$. Réſolvant cette équation du ſecond degré, en regardant $\zeta$ comme l'inconnue, je trouve $\zeta=\frac{3p+\sqrt{(7pp+2)}}{2}$. Ainſi $\zeta<3p$. Je fais $\zeta=3p-2q$ pour avoir, en prenant les quarrés, $9pp-12pq+4qq=7pp+2$, d'où il eſt aiſé de tirer $pp=6pq-2q^2+1$, & $p=3q+\sqrt{(7qq+1)}$. Donc en faiſant $q=0$, il viendra $p=1$, $\zeta=3$, & $m=8$, comme nous l'avons déjà trouvé par la premiere méthode.

PROBLEME XVII. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(8\zeta\zeta+1)}=m$. Je fais $m=3\zeta-p$, pour avoir $8\zeta^2+1=9\zeta^2-6\zeta p+pp$, ou $\zeta\zeta=6\zeta p-pp+1$; d'où je tire $\zeta=3p+\sqrt{(8pp+1)}$. Comme $\sqrt{(8pp+1)}$ eſt ſemblable à la forme propoſée, je puis faire $p=0$ : ainſi $\zeta=1$, & $m=3$.

PROBLEME XVIII. *g étant un nombre entier poſitif & non quarré, rendre rationelle la forme* $\sqrt{(g\zeta\zeta+1)}$. En ſuivant

la méthode qu'on vient d'employer dans le dernier & l'avant dernier problème, on parviendra à la fin à une quantité radicale de la forme $\sqrt{(guu+1)}$ qui ſera ſemblable à la propoſée, dans laquelle en ſuppoſant $u=0$ & retournant ſur ſes pas, on trouvera pour $z$ une valeur qui rendra rationelle la forme propoſée. Si $g$ étoit un nombre quarré, entier & poſitif, il eſt viſible que $gzz$ ſeroit un quarré, car $z$ eſt ſuppoſé un nombre entier. Mais un quarré augmenté d'une unité ne peut demeurer quarré; donc $gzz+1$ ne ſauroit dans ce cas être un quarré. Si $g$ étoit négatif & entier, la formule propoſée ſeroit imaginaire; ainſi il ſeroit abſurde de vouloir la rendre rationelle.

PROBLEME XIX. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(aa+bx+cx^2)}$. Je fais cette quantité $=a+\frac{mx}{n}$ pour avoir $aa+bx+cxx=aa+\frac{2am}{n}x+\frac{mm}{nn}\cdot xx$. Effaçant les termes qui ſe détruiſent & diviſant le reſte par $x$, il vient $b+cx=\frac{2am}{n}+\frac{mm}{nn}x$; d'où il eſt aiſé de tirer $x=\frac{2amn-bnn}{nnc-mm}$. En ſubſtituant cette valeur de $x$, nous aurons $a+\frac{mx}{n}=a+\frac{2mma-mnb}{nnc-mm}=\frac{nnac+amm-bnm}{nnc-mm}=\sqrt{(aa+bx+cxx)}$.

Si $a=0$, la forme $\sqrt{(bx+cx^2)}$ deviendra rationelle en ſuppoſant $\sqrt{(bx+cxx)}=\frac{mx}{n}$, ce qui donnera $bx+cxx=\frac{mmxx}{nn}$; donc $bnn+cnnx=mmx$, & $x=\frac{nnb}{mm-cnn}$. Soit $b=c=2$, $m=3$, & $n=2$, nous aurons $x=8$ & $\sqrt{(2x+2xx)}=12$.

PROBLEME XX. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(a+bx+ccx^2)}$ *dans laquelle le coefficient de* $x^2$ *eſt un quarré.* Je fais cette formule $=cx+\frac{m}{n}$, pour avoir $a+bx+ccxx=ccxx+\frac{2mx}{n}+\frac{mm}{nn}$. En multipliant par $nn$, & faiſant les opérations ordinaires, on trouvera $x=\frac{mm-ann}{bnn-2cmn}$. Ainſi en ſubſtituant cette valeur de $x$, nous aurons $\sqrt{(a+bx+ccxx)}=\frac{cmm-acnn}{bnn-cmn}+\frac{m}{n}$, les nombres $m$ & $n$ ſont arbitraires.

PROBLEME XXI. *Rendre rationelle la formule* $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ *lorsque la quantité sous le signe est le produit de deux facteurs rationels* $(f+gx)\cdot(h+kx)$. Soit $\sqrt{[(f+gx)\times(h+kx)]}=\frac{m(f+gx)}{n}$, on aura $(f+gx)\cdot(h+kx)=\frac{mm\cdot(f+gx)^2}{nn}$; d'où l'on tire $hnn+knnx=mm\cdot(f+gx)$, & $x=\frac{fmm-hnn}{knn-gmm}$ : cette valeur de $x$ résout le problême.

Si l'on demande, *par exemple* de trouver un nombre tel que du double de son quarré retranchant 2, le reste soit un quarré; $2xx-2$ sera donc un quarré; or $2xx-2=2\cdot(x+1)\times(x-1)$. Si donc on suppose $\sqrt{[(2x+2)(x-1)]}=\frac{m\cdot(x+1)}{n}$, on aura $2\cdot(x+1)\cdot(x-1)=\frac{mm(x+1)^2}{nn}$. Multipliant par $nn$ & divisant par $x+1$, il viendra $2nnx-2nn=mmx+mm$; d'où l'on tire $x=\frac{mm+2nn}{2nn-mm}$. Si l'on fait $m=n=1$, il vient $x=3$, & $2xx-2=16$. Si $m=3$, & $n=2$, l'on trouvera $x=-17$; mais parce que le quarré de $x$ & de $-x$ est toujours le même on peut faire $x=17$, & l'on aura également $2xx-2=576$ quarré de 24.

PROBLEME XXII. *Rendre rationelle la formule* $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ *lorsque la quantité sous le signe peut se décomposer en deux parties dont l'une soit un quarré, la seconde étant le produit de deux facteurs.* Dans ce cas la quantité $a+bx+cxx$ pourra donc être représentée par la forme $pp+qr$, les lettres $p$, $q$, $r$ indiquant des quantités de la forme $f+gx$. L'on fera $\sqrt{(pp+qr)}=p+\frac{mq}{n}$, pour avoir $pp+qr=pp+\frac{2mpq}{n}+\frac{mmqq}{nn}$. Effaçant $pp$ de part & d'autre, & divisant par $q$, on trouvera $r=\frac{2mp}{n}+\frac{mmq}{nn}$; donc $nnr=2mnp+mmq$, formule par laquelle on peut facilement déterminer $x$.

Supposons qu'on demande un nombre $x$, tel que si du double de son quarré l'on retranche 1, le reste soit un quarré, ou tel que $2xx-1$ soit un quarré. Cette formule peut être représentée par $xx+(xx-1)=xx+(x-1)\cdot(x+1)$. Ainsi elle est dans le cas du problême. Supposant donc sa racine $=x+$

$\frac{m \cdot (x+1)}{n}$, on aura $xx + (x-1) \cdot (x+1) = xx + \frac{2m(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn}$; ainſi, en effaçant $xx$ de part & d'autre, diviſant enſuite par $x+1$ & ôtant les fractions, on aura $nnx - nn = 2mnx + mmx + mm$; donc $x = \frac{mm+nn}{nn-2mn-mm}$; & puiſque dans la formule $2xx - 1$ le quarré de $x$ s'y trouve ſeul, il eſt indifférent de prendre pour $x$ des valeurs poſitives ou négatives. On peut de même écrire $-m$ au lieu de $+m$, afin d'avoir $x = \frac{mm+nn}{nn+2mn-mm}$. Si on fait $m = 1 = n$, on aura $x = 1$ & $2xx - 1 = 1$.

Si l'on demandoit de trouver un nombre $x$ tel que $2xx + 2$ fût un quarré; on auroit $2xx + 2 = 4 + 2(x+1) \cdot (x-1)$, qui eſt dans le cas du problême précédent. Suppoſons ſa racine $= 2 + \frac{m(x+1)}{n}$ nous trouverons $x = \frac{4mn+mm+2nn}{2nn-mm}$. Le calcul qu'il faut faire pour cela n'ayant rien de difficile, je le laiſſe aux Commençans. Si dans la valeur de $x$ on fait $m = 1$ & $n = 1$, on trouvera $x = 7$, & $2xx + 2 = 100$.

PROBLEME XXIII. *On demande la valeur de x qui peut rendre la quantité* $5xx + 3x + 7$ *un quarré parfait.* Si je fais $x = z - 1$, la formule propoſée devient $5zz - 7z + 9$, dont je ſuppoſe la racine quarrée $= 3 - \frac{mz}{n}$. Donc $5zz - 7z + 9 = 9 - \frac{6mz}{n} + \frac{mmzz}{nn}$. Donc en effaçant 9 de part & d'autre, diviſant enſuite par $z$ & ôtant les fractions, $5nnz - 7nn = -6mnz + mmz$, d'où il eſt aiſé de tirer $z = \frac{7nn-6mn}{5nn-mm}$, & enfin $x = \frac{2nn-6mn+mm}{5nn-mm}$. Si $m = 2$, & $n = 1$, on aura $x = -6$, & par conſéquent $5xx + 3x + 7 = 169$ quarré de 13.

PROBLEME XXIV. *Titius & Alexandre ont chacun un certain nombre de louis qu'il s'agit de trouver : on ſait que la ſomme des quarrés de ces nombres eſt égale à la ſomme des quar-*

*rés des nombres de louis de Pierre & de Jacques.* Soit $a$ le nombre de louis de Pierre, $b$ le nombre de louis de Jacques. La somme des quarrés de ces nombres sera $a^2 + b^2$. Supposons que le nombre des louis de Titius est $mx - a$, celui des louis d'Alexandre étant $nx - b$. La somme des quarrés de ces nombres sera donc $mm\,xx - 2max + aa + nnxx - 2nbx + bb = aa + bb$, &c $x = \frac{2ma + 2nb}{mm + nn}$. Cette valeur substituée dans les nombres $mx - a$ & $nx - b$ résoudra le problême.

Si l'on demandoit en général deux nombres dont la somme des quarrés fût égale à la somme de deux autres quarrés qui ne sont pas donnés. Les nombres cherchés seroient $mm + 2bmn - ann$ & $-bmm + 2amn + bnn$, dont la somme des quarrés donne $\begin{matrix} a^2 m^4 + 2a^2 m^2 n^2 + a^2 n^4 \\ + b^2 m^4 + 2b^2 m^2 n^2 + b^2 n^2 \end{matrix}$; or cette quantité est égale à la somme des quarrés des nombres $(mm + nn)a$, & $(mm + nn)b$; mais il faut remarquer que $m$ ne doit pas être $= n$, autrement les nombres trouvés seroient égaux aux nombres supposés, & la solution du problême seroit illusoire. Si l'on fait $m : n :: a : b$, le premier des nombres supposés sera égal au premier des nombres trouvés, & le second des supposés au second des trouvés.

PROBLEME XXV. *Trouver deux nombres tels que la différence de leurs quarrés soit donnée, & = a.* Supposons que les nombres cherchés sont $mx + n$, & $mx - n$, la différence $4mnx$ de leurs quarrés doit être $= a$; donc $x = \frac{a}{4mn}$. Ainsi les nombres qui résolvent le problême, sont $\frac{a}{4n} + n$, $\frac{a}{4n} - n$. Si la différence donnée $a$ est supposée $= 2$, ces nombres seront $\frac{1}{2n} + n$ & $\frac{1}{2n} - n$. Si donc on fait $n = 1$ les nombres cherchés seront $\frac{3}{2}$, & $-\frac{1}{2}$, ou $\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$; car le quarré d'un nombre négatif $-\frac{1}{2}$ est le même que celui de $+\frac{1}{2}$. Si $n = 2$, ces nombres seront $\frac{9}{4}$ & $-\frac{7}{4}$, ou $\frac{9}{4}$ & $\frac{7}{4}$, &c.

PROBLEME XXVI. *On demande 1°. un nombre x qui étant ajouté à son quarré, donne un quarré; 2°. on demande aussi un nombre qui étant retranché de son quarré donne aussi un quarré.* Donc $x^2 + x$ sera un quarré que je fais $= p^2 x^2$; d'où l'on tire

$x = \frac{1}{pp-1}$. Si je fais $x^2 - x = q^2 x^2$, j'aurai $x = \frac{1}{1-qq}$ Cette derniere ſolution ſuppoſe $xx > x$ ; mais ſi $x < 1$, on ſera $x - x^2 = qqxx$, & l'on aura dans ce cas $x = \frac{1}{qq+1}$ ; & $x - x^2$ ſera un nombre quarré.

PROBLEME XXVII. *Trouver un nombre dont le quarré d'une des parties multiplié par* aa, *& ajouté à l'autre partie multipliée par* b *donne un quarré.* Soit $x$ le nombre cherché, $y$ la premiere partie, $x - y$ la ſeconde; par la nature du problême, $aayy + bx - by$ ou $yy + \frac{bx}{a} - \frac{by}{aa}$ doit être un quarré. Or cela aura lieu ſi $\frac{bx}{aa} = \frac{bb}{4a^4}$, ou ſi $x = \frac{b}{4aa}$.

PROBLEME XXVIII. *Trouver trois nombres tels que la ſomme de ces trois nombres, & de deux quelconques d'entr'eux donne un nombre quarré.* Soient les trois nombres $4x$, $xx - 4x$, $2x + 1$. La ſomme des trois eſt $x^2 + 2x + 1$ ; la ſomme du premier & du ſecond eſt $x^2$ ; celle du ſecond & du troiſiéme eſt $x^2 - 2x + 1$. Or tous ces nombres ſont des nombres quarrés. Pour ſatisfaire donc parfaitement au problême, il faut que la ſomme $6x + 1$ du premier & du troiſiéme ſoit un quarré. Je fais $6x + 1 = p^2$ : donc $x = \frac{p^2-1}{6}$. Ainſi nos trois nombres ſont $\frac{2pp-2}{3}$, $\frac{p^4-26p^2+25}{36}$, $\frac{p^2+2}{3}$.

PROBLEME XXIX. *Trouver trois nombres* x, y, z, *tels que ſi au produit de deux quelconques de ces nombres on ajoute un nombre donné* a, *il en réſulte toujours un quarré.* Par la nature du problême ces trois quantités $xy + a$, $xz + a$, $yz + a$ doivent être des quarrés. Je fais $xy + a = p^2$, ou $xy = pp - a$, $x = p + m$, & $y = p - n$ ; donc $xy = p^2 + pm - np - mn = p^2 - a$, & $p = \frac{mn-a}{m-n}$. Ainſi $x = \frac{mn-a}{m-n} + m = \frac{mm-a}{m-n}$, & $y = \frac{mn-a}{m-n} - n = \frac{nn-a}{m-n}$. Si donc $x$ & $y$ ont les valeurs que nous venons de trouver, $xy + a$ ſera un quarré. Or il eſt viſible que ſi l'on multiplie les valeurs de $x$ & de $y$ par $m - n$ & qu'on leur ajoute enſuite la quantité $a$, elles donne-

ront $m^2, n^2$, donc si on fait $z = m - n$, $xz + a$ & $yz + a$ seront aussi des quarrés.

PROBLEME XXX. *On demande deux nombres* x & y, *dont la somme soit un quarré tel que sa racine soit égale à la somme faite du second ajouté au quarré du premier.* On aura donc $x + y = (xx + y)^2$. Je fais chaque membre de cette équation $= p^2x^2$ pour avoir $(xx + y)^2 = p^2x^2$, $xx + y = px$, & $y = px - xx$. Mais $x + y = p^2x^2$; donc en substituant la valeur de $y$, $x + px - xx = p^2x^2$, ou $x = \frac{p+1}{pp+1}$; donc $y = \frac{(p+1)\cdot p}{(pp+1)} - \frac{(p+1)^2}{(pp+1)^2}$, ou $= y = \frac{(pp+1)\cdot(p+1)\cdot p - (p+1)^2}{(pp+1)^2} = \frac{p^4+p^3-p-1}{(pp+1)^2} = \frac{(p^3-1)\cdot(p+1)}{(pp+1)^2}$.

LEMME. *Soit* $a > b$, *si l'on multiplie la somme* $a + b$ *de deux quantités* a & b *par leur différence* $a - b$, *le produit sera* $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$, *& la demi-somme des facteurs donnera la racine* a *du plus grand quarré, la demi-différence de ces mêmes facteurs donnant la racine* b *du plus petit quarré.*

PROBLEME XXXI. *On demande trois nombres tels que le quarré de chacun de ces nombres ajouté à la somme des deux autres, donne un quarré.* Puisque $xx + 2x + 1$ est un quarré, si les trois nombres cherchés sont $x$, $2x$, $1$, le premier satisfera au problême. Pourque les autres aient les conditions requises, il est nécessaire que $4xx + x + 1$, & $3x + 1$ soient des nombres quarrés. Je retranche le quarré $3x + 1$ du quarré $4xx + x + 1$, il reste $4xx - 2x = (4x - 2)\cdot x$. La demi somme de ses facteurs est $\frac{5x}{2} - 1$, la demi-différence étant $\frac{3x}{2} - 1$; donc (par le lemme précédent) $\frac{5x}{2} - 1$ est la racine de $4xx + x + 1$, & $\frac{3x}{2} - 1$, la racine de $3x + 1$. On aura donc $\frac{25xx}{4} - 5x + 1 = 4xx + x + 1$ (d'où l'on tire $25xx = 16xx + 24x$, ou $9x = 24$, $x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$), & $\frac{9xx}{4} - 3x + 1 = 3x + 1$; donc $9xx - 12x$

$+ 4 = 12x + 4$, $9x^2 = 24x$, $x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$. Ainsi les nombres cherchés sont $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{3}$, 1.

PROBLEME XXXII. *Titius achete deux especes de vins, le premier lui coûte huit louis la mesure, & le second cinq louis la mesure. La somme des louis dépensés est un nombre quarré qui, ajouté à 60, donne encore un nombre quarré, dont la racine est la somme des prix de l'un & de l'autre vin. Quel est le nombre total des mesures ?* Soit $x$ ce nombre ; par la nature du problême, $xx - 60$ est le nombre des louis dépensés, qui doit être un quarré. Si Titius n'avoit acheté avec cet argent que du vin à cinq louis la mesure, le nombre des mesures seroit $\frac{xx - 60}{5}$, nombre qui est certainement plus grand que $xx - 60 > 5x$. Il est visible aussi qu'en supposant que Titius n'eût acheté que du vin à huit louis la mesure, $\frac{xx - 60}{8}$ exprimeroit la nombre des mesures de ce vin, & il est aisé de voir que $xx - 60 < 8x$. Donc $xx - 5x > 60$, & $xx - 8x < 60$; donc (en ajoutant les quarrés de la moitié du coefficient de $x$) $x^2 - 5x + \frac{25}{4} > \frac{265}{4}$, $xx - 8x + 16 < 76$. Supposons que le premier quarré est plus grand que $\frac{289}{4}$, & que le second est plus petit que 64. Donc, en extrayant les racines, nous aurons $x - \frac{5}{2} > \frac{17}{2}$, $x - 4 < 8$ ; & partant $x > 11$, & $x < 12$. On auroit pu à la vérité trouver des limites moins étroites, mais celles-là suffisent pour notre objet.

Voyons maintenant de quelle maniere, en retenant les mêmes limites, $xx - 60$ peut être un quarré. Nous savons que $x$ doit être un des termes de la racine de ce quarré ; faisons l'autre $= y$, & supposons $xx - 60 = (y - x)^2$, ou $xx - 60 = x^2 - 2xy + yy$, ou $2xy = yy + 60$, ou $x = \frac{yy + 60}{2y}$, mais $x$ doit être $> 11$ & $< 12$ : donc $(y - 11)^2 > 121 - 60 = 61$. Je suppose $(y - 11)^2 > 64$, donc $y - 11 > 8$, & $y > 19$.

L'on a aussi $(y - 12)^2 < 144 - 60 = 84$ ; donc en supposant $(y - 12)^2 < 81$ ; l'on aura $y - 12 < 9$ & $y < 21$. Les valeurs de $y$ se trouvant entre 19 & 21, voyons si la supposition de $y = 20$ résout le problême. On aura donc $xx - 60 = (20 - x)^2 = x^2 - 40x + 400$, ou $x = \frac{460}{40} = 11\frac{1}{2}$ ; ainsi le nombre total des mesures sera $11\frac{1}{2} = \frac{23}{2}$. Si du quar-

ré de ce nombre l'on retranche 60 $= \frac{240}{4}$, il reste $\frac{289}{4}$, quarré de $\frac{17}{2}$ : ainſi le nombre des louis dépenſés eſt $= 72\frac{1}{4}$.

Pour trouver le nombre des meſures de chaque eſpece de vin, je ſuppoſe que $z$ exprime le nombre des meſures de la ſeconde eſpece ; il eſt viſible que $5z$ ſera le prix du vin à 5 louis la meſure, & que $11\frac{1}{2} - z$ ſera le nombre des meſures de l'autre, dont le prix eſt $92 - 8z$ & par conſéquent le prix de tout le vin ſera $92 - 3z$ ; donc $92 - 3z = 72\frac{1}{4}$ ; d'où l'on tire $3z = 19\frac{3}{4}$ & $z = 6\frac{7}{12}$, nombre des meſures au plus bas prix. Donc $11\frac{1}{2} - 6\frac{7}{12} = 4\frac{11}{12}$ ſera le nombre des meſures de l'autre vin.

PROBLEME XXXIII. *Trouver deux nombres* x & y, *dont la ſomme ſoit à celle de leurs quarrés, comme* a : b. Par la nature du problême $x + y : xx + yy :: a : b$ ; ainſi l'on a l'équation $bx + by = axx + ayy$. Je fais $y = xz$, & j'ai $bx + bxz = axx + axxzz$ ; d'où l'on tire $b + bz = ax + axzz$, & $x = \frac{b + bz}{a + azz}$. Ainſi en prenant pour $z$ tel nombre rationel que l'on voudra, l'on aura une valeur rationelle de $x$, & de $y = xz$. Si, *par exemple*, a eſt $= 1$, $b = 4$ & $z = 4$, on aura $x = 4$ & $y = 16$.

PROBLEME XXXIV. *Trouver deux nombres* x & y, *tels qu'en ajoutant le quarré de l'un avec le produit du quarré de l'autre par un nombre donné* a, *poſitif ou négatif, la ſomme ſoit un nombre quarré* $= bb$. L'on aura $xx + ayy = bb$. Suppoſant $x = zy - b$, & $xx = (zy - b)^2$, nous aurons $(zy - b)^2 + ay^2 = bb$, ou $zzyy - 2bzy + bb + ayy = bb$. En effaçant $bb$ de part & d'autre, tranſpoſant, diviſant par $y$, & enſuite par $a + zz$, il vient $y = \frac{2bz}{a + zz}$. Mais $x^2 = bb - ay^2$ ; donc $x = \pm \frac{b \cdot (a - zz)}{a + zz}$. Ainſi en prenant pour $z$ un nombre rationel quelconque, on aura auſſi pour $x$ & $y$ des nombres rationels. Ce problême renferme comme un cas particulier celui dans lequel on demanderoit deux nombres quarrés, dont la différence fût un quarré donné : car il ſuffit de ſuppoſer $a = -1$ ; il renferme encore le Problême (IV).

PROBLEME XXXV. *Trouver deux nombres rationels* x & y, *tels que ſi, du quarré du premier, l'on retranche celui du ſecond multiplié par un nombre quarré* bb, *il reſte un nombre donné* a. Par la nature du problême $xx - bbyy = a$. Si l'on

ſuppoſe $x = z - by$, notre équation deviendra en ſubſtituant la valeur de $x$ & réduiſant, $zz - 2bzy = a$; ainſi l'on aura $y = \frac{zz - a}{2bz}$, $x = \frac{zz + a}{2z}$, & quelque nombre rationel qu'on ſubſtitue à la place de $z$, il en réſultera des valeurs de $x$ & de $y$ qui réſoudront le problême.

PROBLEME XXXVI. *a, b, c, d, e, f étant des nombres entiers & rationels, on demande des nombres rationels* t & u, *qui ſatisfaſſent à cette équation* att + btu + dt = — cuu — eu — f. Regardant $t$ comme la ſeule quantité inconnue, & réſolvant cette équation par la méthode du ſecond degré, il vient $t = \frac{-(bu+d) \pm \sqrt{[(bu+d)^2 - 4a(cuu+eu+f)]}}{2a}$.

Pour que $t$ ſoit un nombre rationel, il eſt néceſſaire que la quantité ſous le ſigne ſoit un quarré parfait : or cette quantité étant développée devient $bbuu + 2bdu + dd - 4acuu - 4aeu - 4af$. Faiſons pour abréger, $bb - 4ac = g$, $2bd - 4ae = h$, $dd - 4af = m$, & nous aurons $t = \frac{-(bu+d) \pm \sqrt{(guu+hu+m)}}{2a}$. Suppoſons maintenant que $guu + hu + m$ eſt $= xx$, pour avoir $guu + hu = xx - m$, $uu + \frac{h}{g}u = \frac{xx-m}{g}$, $uu + \frac{h}{g}u + \frac{hh}{4gg} = \frac{xx-m}{g} + \frac{hh}{4gg} = \frac{4gxx + hh - 4gm}{4gg}$, & $u = \frac{-h \pm \sqrt{[4g(xx-m)+hh]}}{2g} = \frac{-h \pm \sqrt{(Axx+B)}}{2g}$, en faiſant $4g = A$ & $-4gm + hh = B$. Si nous ſuppoſons maintenant $yy = Axx + B$, la queſtion ſe réduira à trouver pour $y$ & $x$ des nombres rationels qui ſatisfaſſent à cette derniere équation ; car, en remontant, on trouvera enſuite facilement des nombres rationels pour $u$ & $t$. Or il eſt facile de réſoudre dans une infinité de cas l'équation $y = \sqrt{(Axx+B)}$ en nombres entiers.

Si B ſeul eſt un nombre quarré, on employera la méthode du Problême XXXIV. Si A ſeul eſt quarré, on fera uſage de la méthode du Problême XXXV.

PROBLEME XXXVII. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(aa + bx + cxx + dx^3)}$ *dans laquelle le premier terme eſt le quarré d'un nombre* a. Si $b$, $c$, $d$ étoient o en même tems, la formule deviendroit $\sqrt{aa} = a$ ; ainſi ce cas n'a aucune difficulté.

Nous ne nous propoſons pas de parcourir tous les cas dans leſquels cette formule peut devenir rationelle, il ſuffira pour notre objet de parler de quelques-uns. Suppoſons que $a^2 = 1$, $b = 2$, $c = -1$, & $d = 1$ ; donc $1 + 2x - xx + x^3$ doit être un quarré. Le premier terme étant un quarré, je choiſis pour la racine cherchée une quantité telle que les deux premiers termes puiſſent s'évanouir. Soit donc cette racine cherchée $= 1 + x$, on aura $1 + 2x - x^2 + x^3 = 1 + 2x + x^2$, ou les deux premiers termes diſparoiſſent ; de maniere que l'on a $xx = -xx + x^3$, ou $2xx = x^3$, ou en diviſant par $xx$, $2 = x$. Ainſi la formule devient $\sqrt{(1 + 4 - 4 + 8)} = \sqrt{9} = 3$.

Pour faire un quarré de la formule $4 + 6x - 5xx + 3x^3$ dont le premier terme eſt un quarré, je ſuppoſerai la racine cherchée $= 2 + px$ pour avoir $4 + 6x - 5xx + 3x^3 = 4 + 4px + ppxx$. Pour que les deux premiers termes diſparoiſſent de part & d'autre, il eſt néceſſaire que $6x = 4px$, ou que $6 = 4p$ ; donc $p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Ainſi l'on aura l'équation $-5xx + 3x^3 = \frac{9}{4}xx$, ou $3x^3 = \frac{29}{4}x^2$, & $x = \frac{29}{12}$. Ainſi $\sqrt{(4 + 6x - 5xx + 3x^2)} = 2 + \frac{3}{2}x$.

Il y a une autre méthode dont on peut faire uſage, lorſque le premier terme de la quantité ſous le ſigne eſt un quarré : elle conſiſte à donner trois termes à la racine cherchée, qu'on peut faire $= a + gx + hxx$ ; de maniere que dans l'équation les premiers termes s'évanouiſſent.

Soit, *par exemple*, la formule $\sqrt{(1 - 4x + 6xx - 5x^3)}$. Je ſuppoſe cette quantité $= 1 - 2x + hxx$ pour avoir l'équation $1 - 4x + 6xx - 5x^3 = 1 - 4x + 4xx + 2hxx - 4hx^3 + hhx^4$. Les deux premiers termes ſe détruiſent de deux côtés ; & pour faire diſparoître $xx$, il ſuffit de ſuppoſer $6xx = 4xx + 2hxx = (4 + 2h)xx$, ou $6 = 4 + 2h$, & $2h = 2$ ou $h = 1$ ; par ce moyen l'on trouve $-5x^3 = -4x^3 + x^4$, ou $-5 = -4 + x$, ou $+4 - 5 = x$, ou $x = -1$ *.

La forme $\sqrt{(1 + x^3)}$ deviendra un quarré, en faiſant $x = 0$, ou bien $x = 2$. La formule $\sqrt{(1 + 3x^3)}$ devient rationelle ſi $x = 0$, ou ſi $x = 1$, ou ſi $x = 2$. Maintenant 1 étant une des valeurs qui ſatisfont, ſuppoſons $x$ égal à cette valeur augmentée de $y$, pour avoir $x = 1 + y$ & $1 + 3x^3 = 4 + 9y +$

* Ces méthodes ſuppoſent que $b$ & $c$ ne ſont pas 0.

$9yy + 3y^3$. Que la racine de cette nouvelle formule ſoit ſuppoſée $2 + py$, de maniere que $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + ppyy$; il faudra ſuppoſer $9 = 4p$, ou $p = \frac{9}{4}$, & alors l'on aura $9 + 3y = pp = \frac{81}{16}$, ou $y = -\frac{21}{16}$. Ainſi $x$ ſera $= -\frac{1}{16}$; & $\sqrt{(1 + 3x^3)} = \pm\frac{61}{64}$. En ſuppoſant $x = -\frac{1}{16} + z$, nous aurions une nouvelle valeur, &c. Cependant la méthode que l'on vient d'employer dans ce dernier cas eſt encore fort défectueuſe.

Si l'on vouloit rendre rationelle la forme $\sqrt{(1 - x - xx + x^3)}$ il ſuffiroit de faire $x = pp - 1$, en donnant à $p$ telles valeurs rationelles que l'on voudra. Si $p = 3$, notre formule donnera 21.

Pour rendre rationelle la forme $\sqrt{(cx^2 + dx^3)}$, il eſt néceſſaire que $cxx + dx^3 = x^2(c + dx)$ ſoit un quarré; mais $x^2$ eſt un quarré : donc $c + dx$ doit auſſi être un quarré. Si donc on fait $c + dx = pp$, on aura $x = \frac{pp - c}{d}$, valeur qui qui réſoudra toujours la queſtion.

PROBLEME XXXVIII. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(aa + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4)}$ *dans laquelle le premier terme eſt un nombre quarré*, b, c, d, e, *étant des nombres réels, & non* o. Nous ferons cette forme $= a + px + qxx$, nous déterminerons enſuite $p$ & $q$, de maniere qu'il ne reſte que deux termes dans la quantité ſous le ſigne; ce qui fera trouver une valeur rationelle de $x$. Nous aurons donc $aa + bx + cxx + dx^3 + ex^4 = aa + 2apx + (2aq + pp)xx + 2pqx^3 + qqx^4$. Les premiers termes diſparoiſſent d'eux-mêmes; les ſeconds diſparoîtront en faiſant $b = 2ap$ & $p = \frac{b}{2a}$. Pour faire diſparoître $cx^2$, il faudra ſuppoſer $c = 2aq + pp$, ou $q = \frac{c - pp}{2a}$. Cela poſé, on aura $dx^3 + ex^4 = 2pqx^3 + qqx^4$; donc en diviſant par $x^3$, $d + ex = 2pq + qqx$, équation qui donne $x = \frac{d - 2pq}{qq - e}$, ou (en changeant les ſignes du numérateur & du dénominateur) $x = \frac{2pq - d}{e - qq}$.

PROBLEME XXXIX. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3 + ggx^4)}$ *dans laquelle* gg *eſt un nombre quarré.* Suppoſant cette quantité $= q + px + gx^2$, on aura $a + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = qq + 2pqx + ppxx + (2gq + pp)$

$\times xx + 2gpx^3 + ggx^4$. Les cinquiémes termes ſe détruiſant d'eux-mêmes, & il faut faire enſorte que les quatriémes diſparoiſſent auſſi; ce qu'on obtiendra en ſuppoſant $2gp = d$, ou $p = \frac{d}{2g}$. Il faut encore faire diſparoître $cx^2$, en faiſant $2gq + pp = c$, ou $q = \frac{c - pp}{2g}$. Les deux premiers termes donneront alors l'équation $a + bx = qq + 2pqx$; d'où il eſt facile de tirer $x = \frac{qq - a}{b - 2pq}$.

PROBLEME XL. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(aa + bx + cxx + dx^3 + ggx^4)}$. Comme le premier terme eſt un quarré, nous pourrions employer la méthode qui convient à ce cas, & parce que le coefficient du cinquiéme terme eſt auſſi un quarré, nous pourrions nous ſervir de la méthode du problême précédent; de cette maniere nous trouverions deux valeurs de $x$, dont chacune réſoudroit le problême. L'on peut auſſi ſuppoſer la quantité donnée égale à $a + px + gxx$, en déterminant $p$ de maniere que les quatriémes termes diſparoiſſent dans l'équation $aa + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = aa + 2apx + (pp + 2ag)\,xx + 2gpx^3 + ggx^4$, dans laquelle $(pp + 2ag)\,xx$ eſt conſidéré comme un ſeul terme. Mais il eſt viſible qu'en faiſant $p = \frac{d}{2g}$, les quatriémes termes diſparoiſſent; & puiſque les premiers & les derniers ſe détruiſent d'eux-mêmes, on aura en diviſant par $x$, $b + cx = 2ap + 2agx + ppx$, équation d'où l'on tire $x = \frac{b - 2ap}{2ag + pp - c}$. Comme le quarré $aa$ ſe trouve ſeul dans la formule, je veux dire ſans que $a$ s'y trouve ſeul, on pourra ſuppoſer que ſa racine a le ſigne $-$, & écrire $-a$ au lieu de $a$; ainſi l'on a auſſi $x = \frac{b + 2ap}{pp - 2ag - c}$.

PROBLEME XLI. *Trouver une valeur de* $x$ *qui puiſſe rendre* $a + ex^4$ *un quarré parfait.* Je ſuppoſe qu'en faiſant $x = h$, on ſatisfait au problême, & qu'on a l'équation $a + eh^4 = kk$. Si l'on veut trouver d'autres valeurs de $x$ qui aient la propriété demandée, on ſuppoſera $x = h + y$, de maniere que la forme $a + eh^4 + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4$ ſoit un quarré; donc en ſubſtituant la valeur de $a + eh^4$, la forme $kk$

$+ 4ehhyy + 4ehy^3 + ey^4$ ſera un quarré. Or cette derniere forme eſt la premiere des trois eſpeces que nous avons réſolues ; ainſi en procédant par la méthode qui convient à ce cas, ſuppoſant la racine cherchée $= k + py + qyy$; & faiſant les opérations néceſſaires, nous trouverons $p = \frac{2eh^3}{k}$, & $6ehh = 2kq + pp$, ou $q = \frac{6ehh - pp}{2k} = \frac{3ehhkk - 2ee h^6}{k^3} = \frac{ehh(3kk - 2eh^4)}{k^3}$; ou parce que $eh^4 = kk - a$, $q = \frac{ehh(kk + 2a)}{k^3}$. On trouvera auſſi $y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e}$.

Si l'on demandoit donc de rendre rationelle la forme $\sqrt{(2x^4 - 1)}$, nous aurions ici $a = -1$, $e = 2$, & il eſt viſible qu'en ſuppoſant $h = 1$, cette forme donneroit 1; donc $k = 1$, & $kk = 1$, $p = 4$, $q = -2$, $y = 12$, & $x = h + y = 13$; ainſi l'on auroit $\sqrt{(2x^4 - 1)} = \sqrt{(57121)} = 239$. Regardant maintenant ceci comme le cas connu, & faiſant $h = 13$ & $k = 239$, on trouveroit une nouvelle valeur de $x$ qui ſatisferoit ; & ainſi de ſuite.

PROBLEME XLII. *Rendre rationelle la formule* $\sqrt[3]{(a + bx)}$. Je fais $\sqrt[3]{(a + bx)} = p$, pour avoir $a + bx = p^3$, ou $bx = p^3 - a$, & $x = \frac{p^3 - a}{b}$.

PROBLEME XLIII. *Rendre rationelle la formule* $\sqrt[3]{(a^3 + bx + cx^2 + dx^3)}$ *dans laquelle le premier terme eſt un cube.* Je fais cette quantité $= a + px$; donc $a^3 + bx + cx^2 + dx^3 = a^3 + 3a^2px + 3ap^2xx + p^3x^3$. Comme les premiers termes ſe détruiſent, il faut déterminer $p$ de maniere à faire diſparoître les ſeconds termes, ce qui arrivera ſi $3aap = b$, ou ſi $p = \frac{b}{3aa}$. L'on aura donc $cx^2 + dx^3 = 3ap^2x^2 + p^3x^3$, & en diviſant par $xx$, $c + dx = 3app + p^3x$; ainſi $x = \frac{c - 3app}{p^3 - d}$.

PROBLEME XLIV. *Trouver la valeur de* x *qui peut rendre rationelle la formule* $\sqrt[3]{(a + bx + cx^2 + g^3x^3)}$ *dans laquelle*

*laquelle le coefficient du dernier terme eſt un cube.* Faiſant cette quantité $= p + gx$, pour avoir $a + bx + cxx + g^3x^3 = p^3 + 3p^2gx + 3pg^2x^2 + g^3x^3$, je vois que les derniers termes des deux membres de cette équation ſe détruiſent d'eux-mêmes ; & pour déterminer $p$ de maniere que les pénultiémes ſe détruiſent auſſi, je fais $3pg^2 = c$, ou $p = \frac{c}{3g^2}$. Maintenant puiſque les termes reſtans donnent $a + bx = p^3 + 3p^2gx$, l'on aura $x = \frac{a - p^3}{3gpp - b}$.

Si le premier terme $a$ avoit été $= 0$, on auroit pu faire $\sqrt{(bx + cx^2 + g^3x^3)} = gx$, pour avoir $bx + cxx + g^3x^3 = g^3x^3$, ou $bx = -cx^2 + g^3x^3 - g^3x^3 = -cx^2$, & $b = -cx$ ou $x = -\frac{b}{c}$.

PROBLEME XLV. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt[3]{(a^3 + bx + cxx + g^3x^3)}$ *dans laquelle le premier & le dernier termes ſont des cubes.* Il eſt viſible qu'on peut la traiter comme l'une & comme l'autre des deux eſpeces qu'on a réſolvées dans les deux problêmes précédens. On peut auſſi faire la racine cherchée $= a + gx$, pour avoir $a^3 + bx + cx^2 + g^3x^3 = a^3 + 3a^2gx + 3ag^2x^2 + g^3x^3$, équation dans laquelle les premiers & les derniers termes des deux membres ſe détruiſent d'eux-mêmes, puiſqu'ils ſont égaux & qu'ils ont les mêmes ſignes. Donc $bx + cxx = 3aagx + 3agg xx$, ou $b + cx = 3aag + 3ag^2x$ ; d'où l'on tire $x = \frac{b - 3aag}{3agg - c}$.

PROBLEME XLVI. *Quelle valeur de* x *peut rendre rationelle la forme* $\sqrt[3]{(3 + 3x^3)}$ ? Il eſt clair que cela arrivera ſi on fait $x = 2$, & l'on aura alors $\sqrt[3]{(3 + 3x^3)} = 3$. Pour avoir une nouvelle valeur de $x$ qui réſolve le problême, je fais $x = h + y$ ou en faiſant $h = 2$, $x = 2 + y$, pour avoir $3 + 3x^3 = 27 + 36y + 18yy + 3y^3$, & comme 27 eſt un cube, cette formule eſt de la même eſpece que celle que nous avons déja traitée. Faiſons ſa racine $= 3 + py$, dont le cube eſt $27 + 27py + 9ppyy + p^3y^3 = 27 + 36y + 18yy + 3y^3$. Les premiers termes ſe détruiſent mutuellement, & il faut faire enſorte que les ſeconds diſparoiſſent de même, ce qu'on obtiendra en ſuppoſant $27p = 36$, ou $p = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$. L'on aura mainte-

nant $9ppyy + p^3y^3 = 18yy + 3y^3$, ou $9pp + p^3y = 18 + 3y$, ou $p^3y - 3y = 18 - 9pp$, ou $y = \frac{18 - 9pp}{p^3 - 3} = -\frac{14}{17}$; donc $x = -\frac{20}{17}$, & $\sqrt[3]{(3 + 3x^3)} = 3 + py = -\frac{21}{17}$: cette ſolution fournira une nouvelle valeur, & ainſi de ſuite.

PROBLEME XLVII. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt[3]{(a \cdot (b + cx)^2)}$. Faiſant cette quantité $= \frac{b + cx}{q}$, on aura l'équation $a \cdot (b + cx)^2 = \frac{(b + cx)^3}{q^3}$; d'où l'on tire (en diviſant par $(b + cx)^2$ l'équation $a = \frac{b + cx}{q^3}$. Donc $aq^3 = b + cx$, $aq^3 - b = cx$, & $x = \frac{aq^3 - b}{c}$, valeur dans laquelle $q$ eſt un nombre arbitraire.

Si l'on demandoit la valeur de $x$ qui peut rendre rationelle la forme $\sqrt[3]{(2xx - 5)}$, on n'auroit qu'à ſuppoſer $x = 4$, & l'on auroit $2xx - 5 = 27$, dont la racine cube eſt 3.

PROBLEME XLVIII. a & b *étant des nombres inégaux, on demande un troiſieme nombre* x *tel que ſon cube ajouté à la ſomme des cubes de* a & *de* b *donne un cube parfait.* Par la nature du problême $a^3 + b^3 + x^3$ doit être un cube; or il eſt viſible que cela aura lieu, ſi l'on ſuppoſe $x = -a$: car alors $a^3 + b^3 + x^3 = a^3 + b^3 - a^3 = b^3$, cube de $b$. Pour trouver une autre valeur de $x$ qui ſatisfaſſe, je fais $x = y - a$. Subſtituant la valeur de $x^3$ que donne cette ſuppoſition, la formule $a^3 + b^3 + x^3$ devient $b^3 + 3a^2y - 3ayy + y^3$, formule dans laquelle le premier terme eſt un cube auſſi-bien que le dernier. Pour réſoudre celle-ci, je fais ſa racine $= b + py$, afin d'avoir $b^3 + 3aay - 3ayy + y^3 = b^3 + 3b^2py + 3bp^2yy + p^3y^3$. Les premiers termes ſe détruiſent d'eux-mêmes, & les ſeconds diſparoîtront, ſi l'on fait $3aa = 3bbp$, ou $p = \frac{aa}{bb}$. L'on aura donc $-3ayy + y^3 = 3bppy + p^3y^3$, ou $y - 3a = 3bpp + p^3y = \frac{3a^4}{b^3} + \frac{a^6}{b^6} \cdot y$, équation qui, multipliée par $b^6$, donne $b^6y - 3ab^6 = 3a^4b^3 + a^6y$, & $y =$

$\frac{3a^4b^3+3ab^6}{b^6-a^6} = \frac{3ab^3(a^3+b^3)}{b^6-a^6} = \frac{3ab^3(a^3+b^3)}{(b^3+a^3).(b^3-a^3)}$
$= \frac{3ab^3}{b^3-a^3}$; donc $x = y-a = a\left(\frac{2b^3+a^3}{b^3-a^3}\right)$. Ainsi les deux cubes $a^3$ & $b^3$ étant donnés, nous connoissons la racine du cube cherché; or cette racine sera positive en supposant $b > a$.

PROBLEME XLIX. *Trouver deux nombres entiers & positifs* x & y, *tels que leur somme soit égale au quarré du second.* Par la nature du problême, nous aurons $x+y = y^2$, $x = y^2-y = y\cdot(y-1)$; ainsi $x = y\cdot(y-1)$. Si donc l'on prend pour $y$ un nombre quelconque entier & positif plus grand que 1, on trouvera une valeur de $x$ qui resoudra le problême. Soit, *par exemple*, $y = 5$, nous aurons $x = 5\cdot(5-1) = 5\times 4 = 20$. Or $x+y = 20+5$ est $= 25$ quarré de 5. Mais on ne peut pas supposer $y = 1$, parce que $x = y\cdot(y-1)$, seroit alors $= 1\cdot(1-1) = 1\times 0 = 0$.

PROBLEME L. *Trouver deux nombres* x & y *tels que la somme* $x^2+y^2$ *de leurs quarrés soit égale au cube* $y^3$ *du second.* Par la nature du problême $x^2+y^2 = y^3$ ou $x^2 = y^3+y^2 = yy\cdot(y-1)$, & $x = y\cdot\sqrt{(y-1)}$. Si donc on prend pour $y$ un nombre quarré quelconque augmenté de l'unité, le problême sera résolu, & la valeur de $x$ sera rationelle. Soit, *par exemple*, $y = 9+1 = 10$, nous aurons $x = 10\cdot\sqrt{(9)} = 10\cdot 3 = 30$, & $x^2+y^2 = 900+100 = 1000$, cube de $y$ ou de 10.

PROBLEME LI. *Trouver deux nombres* x & y *tels que la somme de leurs cubes soit égale à la quatrieme puissance du second.* Par la nature du problême nous avons $x^3+y^3 = y^4$, ou $x^3 = y^4-y^3 = y^3\cdot(y-1)$, & enfin $x = y\cdot\sqrt[3]{(y-1)}$. Ainsi en prenant pour $y$ un nombre cube quelconque augmenté de l'unité, le radical $\sqrt[3]{(y-1)}$ donnera un nombre rationel, & la valeur de $x$ sera aussi rationelle. Soit $y = 9$, $y-1$ sera $= 8$, & $\sqrt[3]{(y-1)} = 2$; donc $x = 9\cdot 2 = 18$. Ainsi en ajoutant le cube de 18 avec celui de 9, on aura la quatrieme puissance de 9; ce qu'il est facile de vérifier

PROBLEME LII. *On demande deux nombres* x & y *tels que la somme de leurs puissances du degré* m, *soit égale à la puissance du degré* m + 1 *de* y. L'on aura $x^m+y^m = y^{m+1}$,

$x^m = y^{m+1} - y^m = y^m \cdot (y-1)$, & $x = y \cdot \sqrt[m]{(y-1)}$. Si donc on prend pour $y$ une puiſſance parfaite du degré $m$ & qu'on lui ajoute l'unité, le problême ſera réſolu. Si $m = 5$, & $y = 32 + 1 = 33$ (32 eſt la cinquieme puiſſance de 2), on aura $x = 33 \cdot \sqrt[5]{33-1} = 33 \cdot \sqrt[5]{32} = 33 \cdot 2 = 66$, & la ſomme des cinquiémes puiſſances de 66 & de 33 ſera égale à la ſixieme puiſſance de ce dernier nombre.

*DesEquations du ſecond degré à pluſieurs inconnues.*

69. Lorſqu'on a deux équations & deux inconnues, ſi dans l'une de ces équations une des inconnues ne paſſe pas le premier degré, on en prendra la valeur, qu'on ſubſtituera dans l'autre équation, & l'on aura une équation à une ſeule inconnue. *Exemple*, ſoient les équations $dx - y^2 = a$, $x^2 + y^2 = b$. De la premiere je tire $x = \frac{a+y^2}{d}$, ſubſtituant cette valeur dans la ſeconde, l'on a $\frac{a^2+2ay^2+y^4}{d^2} + y^2 = b$, ou $y^4 + 2ay^2 + ddy^2 + aa = bd^2$, équation à une ſeule inconnue, mais qui eſt du quatriéme degré. Si les deux inconnues ſe trouvent élevées au quarré dans chaque équation, prenez dans chaque équation la valeur du quarré d'une des inconnues; & égalant ces valeurs, vous aurez une nouvelle équation, de laquelle on tirera aiſément la valeur d'une des inconnues. Cette valeur étant ſubſtituée dans l'une ou l'autre des équations données, il en réſultera une équation qui ne contiendra qu'une inconnue.

Soyent les équations

$$x^2 + axy + bx = cy^2 + dy + l.$$

$$x^2 + fxy + gx = hy^2 + iy + k.$$

La premiere donne $x^2 = cy^2 + dy + l - axy - bx$, & la ſeconde donne $x^2 = hy^2 + iy +$

$k - fxy - gx$. Egalant ces deux valeurs de $x^2$, & faiſant paſſer tous les termes affectés de $x$ dans le premier membre de l'équation, on aura $fxy + gx - axy - bx = hy^2 - cy^2 - dy + iy - l + k$, & en diviſant par le multiplicateur de $x$, il vient $x = \frac{(h-c)\times y^2 + (i-d)\times y + k - l}{fy + g - ay - b}$. quantité que je fais $= p$, & qui ne contient point $x$. Subſtituant cette valeur dans l'une des équations données dans la premiere, *par exemple*, j'ai $p^2 + apy + bp = cy^2 + dy + l$, équation où $x$ ne ſe trouve point. En mettant au lieu de $p^2$ & de $p$, leurs valeurs en $y$ & conſtantes, on aura l'équation cherchée, dans laquelle $y$ ne montera tout au plus qu'au quatriéme degré, comme on s'en convaincra aiſément par l'opération.

Si les équations ſurpaſſent le ſecond degré, voici une méthode générale qu'on pourra ſuivre. En ſuppoſant que tous les termes du ſecond membre d'une équation ſoyent tranſpoſés dans le premier, toute équation à deux inconnues $x$ & $y$ pourra être miſe ſous cette forme $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots + p = 0$. Si $x^{m-2}$, *par exemple*, ne ſe trouvoit dans aucun terme, on ſuppoſeroit le coefficient $c$ de ce terme $= 0$. Les coefficients $a$, $b$, $c$ peuvent repréſenter des fonctions de $y$ ou des conſtantes (nous entendons par fonction de $y$ une expreſſion dans laquelle entre $y$ de quelle maniere que ce ſoit). Cela poſé, ſoient les deux équations

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots + p = 0$$
$$a'x^m + b'x^{m-1} + c'x^{m-2} \ldots + p' = 0$$

deſquelles on veut chaſſer $x$. Suppoſons-les du même degré, on multipliera la premiere par $a'$, & la ſeconde par $a$; retranchant le ſecond produit

du premier, il eſt évident que $x^m$ ne ſe trouvera pas dans la nouvelle équation, qui ſera par conſéquent tout au plus du degré $m - 1$. Multipliant la premiere par $a'x + b'$, & la ſeconde par $ax + b$, & retranchant encore le ſecond produit du premier, il en réſultera une nouvelle équation du même degré, par rapport à $x$, que celle qu'on vient de trouver. Multipliant de même la premiere par $a'x^3 + b'x + c'$, & la ſeconde par $ax^2 + bx + c$; & retranchant encore le ſecond produit du premier, il en réſultera une troiſiéme équation du même degré par rapport à $x$, & continuant ainſi juſqu'à ce que le multiplicateur ſoit devenu du degré $m - 1$, on aura $m - 1$ équations du même degré $m - 1$ par rapport à $x$, & conſidérant dans ces équations les quantités $x^{m-1}$, $x^{m-2}$, $x^{m-3}$, &c. comme des inconnues ſimples, on déterminera les valeurs de ces inconnues. Subſtituant donc ces valeurs dans la derniere équation, on aura une équation qui contiendra $x$ linéaire & dont il ſera aiſé d'avoir la valeur. Cette valeur étant ſubſtituée dans la premiere ou dans la ſeconde équation, on aura une équation qui ne contiendra que la ſeule inconnue $y$ avec des quantités connues. Si dans la premiere équation $x$ étoit du degré $m$, & dans l'autre du degré $n$, on multiplieroit la ſeconde par $x^{m-n}$, & alors les deux équations ſe trouveroient du même dégré par rapport à $x$; ainſi l'on pourroit s'y prendre comme nous venons de le dire.

Si l'on avoit trois équations & trois inconnues $x$, $y$ & $z$, on négligeroit d'abord une des inconnues, $z$, *par exemple*, qu'on regarderoit comme connue, & par le moyen de deux premieres équations propoſées on parviendroit à une équation (que j'appelle-

rai B) qui ne contiendroit que l'inconnue négligée & une des autres, $x$, *par exemple.* Par le moyen de la premiere & de la troiſiéme ou bien encore par le moyen de la ſeconde & de la troiſiéme, on trouveroit une autre équation (que je nommerai D) qui ne contiendroit que les mêmes deux inconnues $x$ & $z$. Et par le moyen des équations B & D, on parviendroit à une équation qui ne contiendroit qu'une ſeule inconnue. Sil'on avoit quatre équations & quatre inconnues; par le moyen des deux premieres en négligeant d'abord deux inconnues, on parviendroit à une équation qui ne contiendroit que $x$ & les deux inconnues négligées; par le moyen de la premiere & de la troiſiéme, on parviendroit à une ſeconde équation qui ne contiendroit que $x$ & les inconnues négligées; enfin par le moyen de la premiere & de la derniere, on parviendroit à une autre équation qui auroit les mêmes conditions. L'on auroit donc trois équations & trois inconnues, cas que nous venons de réſoudre, & ainſi des autres.

PROBLÊME I. *Trouver deux nombres* x *&* y *dont la ſomme* $x+y$ *ſoit* $=1=a$, *& la ſomme des quarrés* $x^2+y^2=25=b^2$. Par la premiere condition $x+y=a$; donc en prenant le quarré de part & d'autre, $x^2+2xy+y^2=a^2$. De cette équation retranchant la ſeconde, il vient $2xy=a^2-b^2$. Retranchant cette derniere équation de la ſeconde, on trouve $x^2-2xy+y^2=2b^2-a^2$; & en prenant la racine quarrée de chaque membre, $x-y=\pm\sqrt{(2b^2-a^2)}$. Cette derniere équation étant ajoutée à la premiere & enſuite ſouſtraite, il vient dans le premier cas, $x=\frac{a\pm\sqrt{(2b^2-a^2)}}{2}=\frac{1\pm7}{2}$ ou $x=+4$, & $x=-3$, & dans le ſecond cas

$y = \frac{a \mp \sqrt{(2b^2 - a^2)}}{2} = \frac{1 \mp 7}{2}$ ou $y = -3$, & $y = +4$; c'eſt-à-dire, que ſi $x = 4$, $y$ ſera $= -3$, & réciproquement.

PROBLÊME II. *On demande deux nombres poſitifs* x & y, *dont la ſomme des quarrés ſoit* 274 *& dont le produit donne* 105. Par la nature du Problême $xx + yy = 274$, & $xy = 105$ ou $2xy = 210$. Si l'on ajoute cette derniere équation à la premiere, & qu'enſuite on l'en retranche, on aura $xx + 2xy + yy = 484$, & $xx - 2xy + yy = 64$, équation que je déſignerai par (A). L'avant derniere équation que nous venons de trouver, donne en prenant les racines, $x + y = \pm 22$; mais en prenant les racines dans l'équation A, on trouve $x - y = \pm 8$. Donc en nous en tenant aux racines poſitives, $x + y = 22$, & $x - y = 8$; donc $x + y + x - y = 30$ ou $2x = 30$, & $x = 15$. Mais $x + y - x + y = 22 - 8$, ou $2y = 14$, & $y = 7$. Les racines négatives donnent $x = -15$ & $y = -7$; mais ces valeurs ne peuvent réſoudre le Problême.

PROBLÊME III. *On demande deux nombres poſitifs* x & y, *dont la ſomme des quarrés ſoit donnée &* $= b$, *& dont le produit ſoit* $= a$. On aura donc les deux équations ſuivantes $xx + yy = b$, $xy = a$. Si l'on ajoute la premiere à la ſeconde multipliée par 2, on aura $xx + 2xy + yy = b + 2a$, & par conſéquent $x + y = \sqrt{(b + 2a)}$. Si de la premiere équation nous retranchons le double de la ſeconde, il viendra $xx - 2xy + yy = b - 2a$, d'où l'on tire $x - y = \sqrt{(b - 2a)}$; donc $x + y + x - y$ ou $2x = \sqrt{(b + 2a)} + \sqrt{(b - 2a)}$ ou $x = \frac{1}{2}\sqrt{(b + 2a)} + \frac{1}{2}\sqrt{(b - 2a)}$. L'on a auſſi $x + y - x + y$ ou $2y = \sqrt{(b + 2a)}$

$-\sqrt{(b-2a)}$, & $y=\frac{1}{2}\sqrt{(b+2a)}-\frac{1}{2}\sqrt{(b-2a)}$. Si $b<2a$ le Problême eſt impoſſible, parce que $b$ & $a$ étant des nombres poſitifs par la nature du Problême, $x$ & $y$ doivent être dans ce cas imaginaires.

PROBLÊME IV. *On demande deux nombres tels que leur ſomme, leur produit, & la différence de leurs quarrés ſoient égaux entr'eux.* Soit $x$ le plus grand, $y$ le plus petit nombre. Par la nature du Problême $x+y=xx-yy=(x+y)\cdot(x-y)$; donc, en diviſant par $x+y$, $1=x-y$ & $x=y+1$; donc $x+y=2y+1$, & $xx-yy=2y+1$. D'un autre côté le produit $xy$ ou $yy+y$ devant être égal à la même quantité, on a l'équation $yy+y=2y+1$, ou $yy-y=1$, ou $yy-y+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, $y-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{(\frac{5}{4})}$, & $y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

PROBLÊME V. *Trouver deux nombres tels qu'il y ait égalité entre leur produit, leur ſomme & la ſomme de leurs quarrés.* Je fais l'un des nombres cherchés $=x+y$, & l'autre $=x-y$. Leur ſomme ſera $2x$, leur produit ſera $xx-yy$, & la ſomme de leurs quarrés ſera $2xx+2yy$. Par la nature du Problême, on a $2x=xx-yy$ ou $yy=xx-2x$. Subſtituant cette valeur de $yy$ dans $2xx+2yy$, & comparant le réſultat $4xx-4x$ avec $2x$, on aura $2x=4xx-4x$, d'où l'on tire $x=\frac{3}{2}$; donc $yy=-\frac{3}{4}$, & $y=\pm\frac{\sqrt{(-3)}}{2}$; donc les nombres cherchés ſont $x+y=\frac{3+\sqrt{(-3)}}{2}$ & $x-y=\frac{3-\sqrt{(-3)}}{2}$; & quoique ces nombres ſoient imaginaires, ils réſolvent cependant le Problême.

REMARQUE. Dans le premier Problême,

pour avoir la valeur de $x$, nous avons ajouté l'équation $x - y = \pm \sqrt{(2b^2 - a^2)}$ avec l'équation $x + y = a$. Au contraire nous l'avons ſouſtraite pour avoir la valeur de $y$, parce que dans le premier cas les ſignes de $y$ dans les deux équations ſont différents, & comme d'ailleurs leurs coefficients ſont les mêmes, il eſt viſible que l'inconnue $y$ ne doit plus ſe trouver dans le réſultat; de même dans le ſecond cas, $x$ ne doit point ſe trouver dans le réſultat, parce que $-x$ doit détruire $+x$. Donc pour faire diſparoître une inconnue quand on a deux équations à deux inconnues qui ont les mêmes coefficients dans ces deux équations, il faut ajouter les deux équations ſi l'inconnue qu'on veut faire diſparoître a différents ſignes dans les deux équations. Mais il faut ſouſtraire une équation de l'autre, lorſque l'inconnue qu'on veut faire diſparoître a le même ſigne dans les deux équations. Si l'on avoit les deux équations $ax + by = c$, $dx - gy = f$ dans leſquelles les inconnues $x$ & $y$ n'ont pas le même coefficient, on pourroit néanmoins faire diſparoître telle des deux inconnues qu'on voudroit. Suppoſons, *par exemple*, qu'on voulût faire diſparoître $y$, on multiplieroit tous les termes de la ſeconde par le coefficient $b$ de $y$ dans la premiere, & tous les termes de la premiere par le coefficient $g$ de $y$ dans la ſeconde, & l'on auroit les deux équations $agx + bgy = gc$, $bdx - bgy = bf$; ajoutant maintenant ces deux équations, l'on trouveroit $agx + bdx = gc + bf$, équation qui ne contient que l'inconnue $x$. Si l'on avoit voulu faire évanouir $x$, on auroit multiplié tous les termes de la ſeconde par $a$, & tous ceux de la premiere par $d$; retranchant enſuite le ſecond réſultat du premier, l'on

auroit eu une équation qui n'auroit contenu que la ſeule inconnue $y$. Si l'on vouloit appliquer cette méthode à trois équations & trois inconnues, en négligeant d'abord une de ces inconnues, l'on parviendroit, par le moyen de la premiere & de la ſeconde équation, à une équation qui ne contiendroit que l'inconnue négligée & l'une des deux autres, $x$, *par exemple.* Par le moyen de la premiere & de la troiſiéme on parviendroit auſſi à une ſeconde équation qui aurait les mêmes conditions; l'on auroit donc deux équations & deux inconnues, ce qui donne le cas que nous venons de traiter. Si l'on avoit quatre équations & quatre inconnues, en négligeant d'abord deux inconnues, on trouveroit, par le moyen des deux premieres, une équation qui ne contiendroit que les deux inconnues négligées & l'une des deux autres, $x$, *par exemple.* Par le moyen de la premiere & de la troiſiéme, l'on trouveroit une autre équation de la même eſpece, & par le moyen de la premiere & de la quatriéme, l'on parviendroit à une troiſiéme équation qui auroit les mêmes conditions; on auroit donc trois équations & trois inconnues, ce qui eſt le cas précédent. Si l'on avoit cinq équations & cinq inconnues, en négligeant d'abord trois de ces inconnues, on parviendroit à quatre équations & quatre inconnues, ce qui donne le cas que nous venons de traiter, & ainſi des autres.

### *Des Equations à deux termes.*

70. Soit l'équation $ax^m = b$, à laquelle on peut facilement rapporter toutes les équations à deux termes & à une ſeule inconnue. Donc en diviſant, $x^m = \frac{b}{a}$ ou $x^m = c$ (en ſuppoſant $\frac{b}{a} = c$);

donc en prenant la racine $m$ de part & d'autre, $x = \sqrt[m]{c}$. Si $m$ eſt pair, cette racine aura le double ſigne $\pm$ : ſi, *par exemple*, $m$ eſt $= 4$, $x$ ſera $= \pm\sqrt[4]{c}$, & ſi l'on ſuppoſe $c = 16$, on aura $x = \pm\sqrt[4]{(16)} = \pm 2$. Outre ces deux racines il y en a encore deux autres, mais imaginaires. Si $c$ étoit $= -8$, on auroit $x = \pm\sqrt[4]{(-8)}$, dont toutes les racines ſont imaginaires. Si [illegible]toit $3$, l'on auroit $x = \sqrt[3]{(-8)} = -2$; & outre cette racine il y en auroit encore deux autres, mais imaginaires. Tout cela ſe comprendra mieux par la ſuite.

En général ſi l'on a l'équation $x^m = b$, on aura $l \cdot x^m = l \cdot b$ * ou $m\,l \cdot x = l \cdot b$ ou $l \cdot x = \frac{l \cdot b}{m}$; c'eſt-à-dire, que le logarithme de $x$ eſt égal à celui de $b$ diviſé par $m$. Cherchant donc $\frac{l \cdot b}{m}$ dans les tables, on connoîtra $l \cdot x$, & par conſéquent on connoîtra $x$; ſi $\frac{l \cdot b}{m}$ ne ſe trouve pas dans les tables, on cherchera par la méthode dont nous avons parlé en traitant des logarithmes, à quel nombre il répond, & ce nombre ſera $= x$.

PROBLÊME I. *Je vous donnerai, dit un pere à ſon fils, les écus que j'ai dans ma bourſe, ſi vous devinez combien il y en a; le quarré de ce nombre multiplié par le quart du même nombre, donne* 432.

* En déſignant le logarithme de $x^m$ par $l \cdot x^m$ ou par $m\,l \cdot x$; car le logarithme de la puiſſance $m$ d'un nombre eſt égal au produit de l'expoſant $m$ par le logarithme de ce nombre. Voyez ce qu'on a dit ci-deſſus ſur les logarithmes.

Soit $x$ ce nombre, l'on aura, par la nature du Problême, $xx \times \frac{x}{4} = 432$. Ainſi $\frac{x^3}{4} = 432$, $x^3 = 1728$, & $\sqrt[3]{x^3} = x = 12$. Donc le nombre des écus étoit 12.

PROBLÊME II. *On demande un nombre* x *tel qu'en diviſant la quatriéme puiſſance par ſa moitié & ajoutant* $14 + \frac{1}{4}$ *au quotient, le reſultat donne* 100. Diviſant $x^4$ par $\frac{x}{2}$, j'ai $2x^3$, & par la nature du Problême $2x^3 + 14 + \frac{1}{4} = 100$; donc $2x^3 = 100 - 14 - \frac{1}{4} = \frac{343}{4}$, $x^3 = \frac{343}{8}$ & $x = \sqrt[3]{(\frac{343}{8})} = \frac{7}{2}$; ainſi le nombre cherché eſt $x = \frac{7}{2}$.

PROBLÊME III. *Quelques Négociants ayant formé un capital, pour lequel chacun a contribué cent fois autant d'écus qu'il y a d'Aſſociés, envoient un Facteur à la Martinique pour faire valoir ce fonds. Ce Facteur gagne pour chaque centaine d'écus deux fois autant d'écus qu'il y a d'intéreſſés & ſon gain eſt de 2662 écus, on demande le nombre* x *des Aſſociés.* Puiſque chaque Négociant a fourni $100x$ écus, le capital entier étoit $100xx$; & parce que le profit étoit de $2x$ pour cent, on trouvera ce que rapportoit le capital en faiſant $100 : 2x :: 100xx : \frac{2x \cdot 100xx}{100} = 2x^3$. Mais ce profit eſt $= 2662$; donc $2x^3 = 2662$, $x^3 = 1331$ & $x = \sqrt[3]{(1331)} = 11$; ainſi le nombre des Aſſociés étoit 11.

PROBLÊME IV. *Un Payſan échange des lapins domeſtiques contre des poules, à raiſon de deux lapins pour trois poules; ces poules pondent chacune un tiers autant d'œufs qu'il y a de poules. Le Payſan vend tous ſes œufs au marché, en donnant neuf œufs pour autant de ſols que chaque*

*poule a pondu d'œufs, & il reçoit 3 liv. 12 ſols; combien de lapins a-t-il échangé?* Soit $x$ le nombre des lapins cherché; celui des poules que le Payſan a reçues en échange ſera $\frac{3x}{2}$, & chaque poule pondant $\frac{x}{2}$, le nombre des œufs ſera $\frac{3xx}{4}$. Mais 9 œufs ſe vendent pour $\frac{x}{2}$ ſols; donc l'argent que $\frac{3xx}{4}$ œufs produiſent eſt $=\frac{x^3}{24}$; ainſi $\frac{x^3}{24} = 3$ liv. 12 ſols $=$ 72 ſ., $x^3 = 24 \times 72 = 8 \cdot 8 \cdot 27$, & $x = \sqrt{(8 \cdot 8 \cdot 27)} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. C'eſt pourquoi le Payſan a donné 12 lapins & a reçu 18 poules.

*Des équations plus élevées que le ſecond degré & qui peuvent néanmoins ſe réſoudre à la maniere de celles du ſecond.*

71. Ces équations ne doivent renfermer que deux puiſſances de $x$, mais dont l'expoſant de l'une ſoit double de celui de l'autre; ainſi elles peuvent ſe réduire à cette formule $ax^{2m} + bx^m = c$ ou en diviſant par $a$, faiſant $\frac{b}{a} = 2d$ & $\frac{c}{a} = g$, à celle-ci $x^{2m} + 2dx^m = g$. Ajoutant de part & d'autre le quarré de la moitié du coefficient de $x^m$, on aura $x^{2m} + 2dx^m + d^2 = g + d^2$, & prenant les racines quarrées de part & d'autre, $x^m + d = \pm \sqrt{(g + d^2)}$, & en tranſpoſant, $x^m = -d \pm \sqrt{(g + d^2)}$, & prenant la racine $m$ de part & d'autre, $x = \sqrt[m]{(-d \pm \sqrt{g+d^2})}$. Si $m$ eſt pair, il peut y avoir juſqu'à quatre racines réelles, & le premier radical doit avoir le ſigne $\pm$; ſi $m$ eſt im-

pair, le radical $\sqrt[m]{\ }$ ne peut avoir qu'un seul signe. Si $g$ est négatif & plus grand que $dd$, toutes les racines seront imaginaires, quelque soit $m$, pair ou impair.

PROBLÊME. *Trouver la racine* m *de la quantité* $a^m + b$, b *étant supposé fort petit en comparaison de* $a^m$. Il est aisé de voir que la racine cherchée est $a + x$, $x$ étant une quantité qu'il s'agit de trouver. Elevant $a + x$ à la puissance $m$, nous avons $a^m + ma^{m-1}x + m \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot a^{m-2}x^2 + \&c. = a^m + b$. Je néglige les termes ultérieurs, parce que se trouvant multipliés par des puissances de la fraction $x$ (qui doit évidemment être assez petite) plus élevées que le quarré, ils doivent être fort petits. Retranchant de chacun des membres de l'équation, la quantité $a^m$ & divisant par $m \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot a^{m-2}$, l'on a $x^2 + \frac{2ax}{m-1} = + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}}$, ajoutant de part & d'autre le quarré de la moitié du coefficient de $x$, il vient $x^2 + \frac{2ax}{m-1} + \frac{a^2}{(m-1)^2} = + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}} + \frac{aa}{(m-1)^2}$. Prenant les racines de part & d'autre, l'on a $x + \frac{a}{m-1} = \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}}\right)}$, & enfin $x = -\frac{a}{m-1} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}}\right)}$; nous ne nous servons pas du signe — du radical, parce qu'il est inutile ici. Donc $\sqrt[m]{(a^m + b)} = a +$

$x = a - \frac{a}{m-1} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2b}{m\cdot(m-1)\cdot a^{m-2}}\right)}$, & en réduisant, $\sqrt[m]{(a^m + b)} = \frac{(m-2)}{m-1} \times a + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2b}{m\cdot(m-1)\cdot a^{m-2}}\right)}$. Si la quantité $b$ avoit le signe —, de maniere qu'on eût $a^m - b$, on donneroit le signe — au terme $\frac{2b}{m\cdot(m-1)\cdot a^{m-2}}$ qui se trouve sous le radical, & l'on auroit $\sqrt[m]{(a^m - b)} = \frac{(m-2)}{m-1} \times a + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} - \frac{2b}{m\cdot(m-1)\cdot a^{m-2}}\right)}$.

COROLLAIRE. Si on suppose successivement $m = 3, 4, 5, 6, 7$ &c. on aura les formules suivantes :

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{1\cdot a^2}{4} \pm \frac{b}{3a}\right)}$$

$$\sqrt[4]{(a^4 \pm b)} = \frac{2\cdot a}{3} + \sqrt{\left(\frac{1\cdot a^2}{9} \pm \frac{b}{6aa}\right)}$$

$$\sqrt[5]{(a^5 \pm b)} = \frac{3\cdot a}{4} + \sqrt{\left(\frac{1\cdot aa}{16} \pm \frac{b}{10a^3}\right)}$$

$$\sqrt[6]{(a^6 \pm b)} = \frac{4\cdot a}{5} + \sqrt{\left(\frac{1\cdot aa}{25} \pm \frac{b}{15a^4}\right)}$$

$$\sqrt[7]{(a^7 \pm b)} = \frac{5\cdot a}{6} + \sqrt{\left(\frac{1\cdot aa}{36} \pm \frac{b}{21a^5}\right)}$$

&c.

On peut voir maintenant pourquoi nous avons supposé que le radical avoit seulement le signe +, parce que nous ne cherchons que les racines positives de la quantité $a^m \pm b$ ; mais en prenant le radical en —, il est visible que la premiere formule deviendroit une quantité négative, en supposant $b$ positif. Pour

Pour faire l'application des formules que nous venons de trouver, ſuppoſons qu'on demande la racine cube de 28. Je prends le plus grand cube contenu dans ce nombre, & je le ſuppoſe $= a^3$ & le reſte $= b$, de ſorte que j'ai $27 + 1 = a^3 + b$, & la premiere formule devient $\frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{9}{4} + \frac{1}{9})} =$ (en réduiſant au même dénominateur) $\frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{85}{36})}$; prenant enſuite la plus grande racine du numérateur avec une ſeule décimale, & la diviſant par la racine 6 du dénominateur, l'on aura la racine cherchée $= \frac{3}{2} + \frac{9}{6} + \frac{2}{60} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{30} = 3 + 0{\cdot}03$ à-peu-près. En général on peut chercher par les logarithmes la racine approchée du nombre propoſé & la faire $= a$, élevant enſuite $a$ à la puiſſance $m$ & retranchant $a^m$ de la quantité propoſée, le reſte donnera $b$. Subſtituant enſuite la valeur de $a$ & de $b$ dans la formule générale, il ſera aiſé d'en déduire la racine cherchée à peu de choſe près, en prenant, par le moyen des décimales, la racine quarrée de la quantité qui ſe trouvera ſous le ſigne radical.

### *Des Equations de tous les degrés.*

72. Dans ce que nous allons dire des équations de tous les degrés, nous ſuppoſerons que le ſecond membre eſt $= 0$, c'eſt-à-dire, qu'on a fait paſſer tous les termes dans le premier membre. Cela poſé, ſoit propoſé de trouver une équation, dans laquelle $x$ ſoit indifféremment $= 2$ ou $= 3$. On aura donc les deux équations $x = 2$, $x = 3$ ou, en faiſant paſſer tout dans le premier membre, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$; & en multipliant ces équations l'une par l'autre, le premier membre par

le premier & le ſecond par le ſecond, $(x-2)\times(x-3)=0$, ou $x^2-5x+6=0$. Dans cette équation $x$ eſt $=2$, & $x=3$. Si l'on a $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, en multipliant ces trois équations l'une par l'autre, il viendra $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$. De la formation précédente, il ſuit premiérement qu'une équation a autant de racines que le plus haut expoſant de l'inconnue contient d'unités. Secondement, que ſi à la place de l'inconnue on ſubſtitue ſa valeur, la ſomme de tous les termes ſe réduira à 0. En effet, puiſque l'équation ci-deſſus réſulte de $(x-a)\times(x-b)\times(x-c)$, ſi à la place de $x$ je mets ſa valeur $a$ dans le premier facteur $x-a$, pour avoir $a-a=0$, l'on aura $0\times(x-b)\times(x-c)=0$, comme il eſt évident. Troiſiémement, que le coefficient du ſecond terme d'une équation eſt égal à la ſomme des racines de l'équation, priſes avec un ſigne contraire. Car les racines de l'équation précédente ſont $x=a$, $x=b$, $x=c$. En effet l'équation $x-a=0$, donne en tranſpoſant $x=a$; de même les équations $x-b=0$, $x-c=0$ donnent $x=b$, & $x=c$; or le coefficient du ſecond terme de notre équation eſt $-(a+b+c)=-a-b-c$. Quatriémement, que le coefficient du troiſiéme terme d'une équation eſt égal à la ſomme des produits des racines multipliées deux à deux. Si l'équation étoit plus élevée, on trouveroit que le coefficient du quatriéme terme ſeroit égal à la ſomme des produits des racines priſes trois à trois, mais avec un ſigne contraire; que le coefficient du cinquiéme terme ſeroit égal à la ſomme des produits des racines priſes quatre à quatre; &c. Mais le dernier terme eſt le produit de toutes les racines

prises avec un signe contraire. Cinquiémement, si le second terme manque, c'est une marque qu'il y a des racines négatives & des racines positives, & que la somme de unes est égale à la somme des autres; si le troisiéme terme manque, la somme des produits des racines positives, combinées avec les négatives, se réduit à 0; &c. Mais si le dernier terme manque, il y a une racine $= 0$, & l'on peut abaisser l'équation en divisant les deux membres par $x = 0$. Ainsi l'équation $x^4 + a x^3 + b x^2 + c x = 0$ devient, en divisant par $x$, $x^3 + a x^2 + b x + c = 0$. Sixiémement, que les valeurs de l'inconnue se trouvent parmi les diviseurs du dernier terme, de sorte qu'en substituant dans l'équation, à la place de $x$, chaque diviseur du dernier terme, d'abord avec le signe $+$, ensuite avec le signe $-$, on sera sûr d'avoir une des racines lorsque la substitution d'un de ces diviseurs rendra la somme de tous les termes $= 0$. Ainsi substituant $b$ à la place de $x$ dans l'équation $x^3 - (a+b+c) x^2 + (ab + ac + bc) x - abc = 0$, je trouve $b^3 - ab^2 - b^3 - cb^2 + ab^2 + acb + cb^2 - abc = 0$; mais si j'avois substitué $-b$ au lieu de $+b$, la somme de tous les termes ne se feroit pas réduite à 0.

En multipliant les unes par les autres, les trois équations $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 5 = 0$, l'on aura l'équation $x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0$, où l'on peut remarquer qu'il y a un changement de signe du second au troisiéme terme, & une racine positive $x = 2$, deux successions des mêmes signes, puisque le premier & le second terme ont le signe $+$, le troisiéme & le quatriéme le signe $-$; mais il y a deux racines négatives. En général il il y autant de racines négatives qu'il y a de succes-

ſions du même ſigne, & autant de poſitives qu'il y a de changemens de ſigne d'un terme à l'autre.

En effet, ſi toutes les racines ſont poſitives, elles entreront dans les équations compoſantes avec le ſigné —. Si, *par exemple*, les racines ſont $+b$, $+c$, &c. les équations compoſantes ſeront $x-b=0$, $x-c=0$, &c. & dans le produit de toutes ces équations, il ne pourra y avoir de termes négatifs que le ſecond & ceux où les racines ſe trouveront être multipliées les unes par les autres en nombre impair, ce qui n'arrive qu'aux places paires, ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus; ainſi les termes ſeront alternativement poſitifs & négatifs.

Si toutes les racines ſont négatives, elles entreront dans les équations compoſantes avec le ſigne $+$ : or il eſt clair que le produit de ces équations aura toús ſes termes poſitifs.

Enfin ſoient les racines les unes poſitives, les autres négatives, comme $+a$, $-b$, &c. & les équations compoſantes $x-a=0$, $x+b=0$, &c. & ſuppoſons d'abord qu'il n'y en ait que deux, l'équation compoſée ſera $xx-ax-ab=0$, $+bx$ dans laquelle ſi on ſuppoſe $a>b$, le premier terme ſera poſitif, & les deux autres négatifs, & il y aura un changement de ſigne & une répétition du même ſigne; & ſi on ſuppoſe $a<b$, les deux premiers termes ſeront poſitifs & le troiſieme négatif, & il y aura de même un changement de ſigne & une répétition du même ſigne. Si $a=b$, l'équation ſe réduira à $xx \pm 0 \cdot x - ab = 0$; & quelque ſigne qu'on donne à zéro, il y aura toujours un changement de ſigne & une répétition du même ſigne, comme il y a une racine poſitive & une négative.

Supposons maintenant qu'il y ait trois racines, deux positives & une négative, & que les équations composantes soient $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, l'équation composée sera

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + abx + abc \\ \quad - bx^2 - acx \\ \quad + cx^2 - bcx \end{array}\right\} = 0$$

dans laquelle, si on suppose $a + b > c$, le second terme sera négatif, & quelque signe qu'on donne au troisiéme, il y aura deux changemens de signe & une répétition du même signe; & si on suppose $a + b < c$, le second terme sera positif & le troisiéme négatif, & il y aura encore deux changemens de signe & une répétition du même signe. Enfin si $a + b = c$, le second terme sera $\pm 0$, mais le troisiéme sera négatif, & quelque signe qu'on donne au second, il y aura toujours deux changemens de signe & une répétition du même signe, comme il y a deux racines positives & une négative.

On trouveroit par un raisonnement semblable que s'il y avoit deux racines négatives & une positive, & que les équations composantes fussent $x - a = 0$, $x + b = 0$, $x + c = 0$, le produit auroit un seul changement de signe & deux répétitions du même signe. Ce que nous venons de dire a également lieu pour les équations plus élevées; de sorte qu'en général il y a autant de racines positives qu'il y a de changemens de signes dans deux termes consécutifs, & autant de racines négatives qu'il y a de répétitions du même signe dans deux termes consécutifs. Mais nous reprendrons cette matiere dans le Calcul Différentiel.

D'où il suit qu'à la simple inspection d'une équation on peut juger combien elle a de racines néga

tives, si l'on sait d'ailleurs que toutes ses racines sont réelles.

Il est aisé de voir que si toutes les racines étoient négatives, tous les termes auroient le signe +; car ils résulteroient du produit de plusieurs quantités qui auroient toutes le signe +. Le dernier terme auroit aussi le signe + si le nombre des racines positives de l'équation étoit pair; car un nombre pair de signes − multipliés les uns par les autres donne +. Mais le dernier terme auroit le signe −, si le nombre des racines positives étoit impair, puisqu'un nombre impair de signe − multipliés les uns par les autres donne nécessairement −. Mais parce que, ainsi qu'il sera aisé de le conclure de ce que nous dirons dans la suite, les facteurs imaginaires ne se trouvant dans les équations qu'en nombre pair, & que le produit de deux de ces facteurs a nécessairement le dernier terme positif, dans une équation quelconque dont le dernier terme est négatif, il y a au moins une racine positive.

Ce que nous venons de dire sur les changemens de signe & les successions des mêmes signes, ne peut avoir lieu que lorsqu'il n'y a point de racines imaginaires, lesquelles se trouvent toujours en nombre pair dans une équation délivrée de radicaux. En effet, si l'on multiplie l'une par l'autre, les deux équations $\left.\begin{matrix} x - \sqrt{-a^2} = 0 \\ x + \sqrt{-a^2} = 0 \end{matrix}\right\}$ on aura l'équation $x^2 + a^2 = 0$, qui aura nécessairement ses racines imaginaires. Mais si l'on multiplioit $x - \sqrt{-a^2} = 0$ par $x - \sqrt{-a^2} = 0$, l'équation qui en résulteroit, contiendroit nécessairement un radical, ainsi qu'il est aisé de le voir en exécutant l'opération. Il en seroit de même en multipliant l'une par l'autre, les deux équations $x + \sqrt{-aa} = 0$, $x + \sqrt{-aa}$

$= o$ ou $x + a\sqrt{-1} = o$ & $x + a\sqrt{-1} = o$. De même si la valeur de $x$ est une quantité réelle $-a$ jointe à une imaginaire $-b\sqrt{-1}$, pour que l'équation ne soit point affectée de quelque radical, il faut que l'équation $x + a + b\cdot\sqrt{-1} = o$, soit multipliée par $x + a - b\sqrt{-1} = o$; de maniere que la quantité réelle ait le même signe &, la quantité imaginaire différens signes dans les deux facteurs. Toutes les quantités imaginaires peuvent se réduire à la forme $M + N\sqrt{-1}$, en supposant $M = o$, lorsque la quantité imaginaire se trouve seule : ainsi que nous la démontrerons dans la seconde partie de ce Cours. Mais nous supposerons dans la suite les équations délivrées de radicaux.

Il suit de ce que nous venons de dire, qu'une équation d'un degré impair, doit avoir au moins une racine réelle, puisque les racines imaginaires ne peuvent se trouver dans une équation qu'en nombre pair. Donc une équation du troisieme degré, doit avoir au moins une racine réelle ; de plus dans une équation du troisieme degré qui n'a point de second terme, & dont le troisieme est positif ( nous prenons pour troisieme terme celui qui le seroit, si le second ne manquoit pas ), il y a nécessairement deux racines imaginaires. En effet soit l'équation $x^3 + (ab + ac + bc)\,x + abc = o$. Puisque le second terme manque, la somme des racines $+a + b + c$ est $= o$; donc en transposant, $b = -a - c$. Substituant cette valeur de $b$ dans le coefficient de $x$, l'on aura $+(-aa - ac - ac - cc + ac) = (-aa - cc - ac)$; or cette quantité ne peut être positive : car le quarré de $a + c$ doit toujours être une quantité positive, en

ſuppoſant même $c > a$. Donc $(a - c)^2 = a^2 - 2ac + c^2$ eſt une quantité poſitive, & par conſéquent $a^2 + c^2 > 2ac$, donc $-a^2 - c^2 - ac$ eſt une quantité négative. Donc puiſque dans l'équation dont nous venons de parler, cette quantité eſt ſuppoſée poſitive, il doit y avoir deux racines imaginaires *. Donc $c$ & $a$ ne ſont pas des quantités réelles, mais au moins l'une des deux eſt imaginaire, & parmi les trois $a$, $b$, $c$, il y en a deux imaginaires.

73. PROBLEME. *Délivrer une équation de ſes radicaux.* Pour faire évanouir les radicaux d'une équation, on mettra à la place de chaque radical une inconnue, & l'on aura premieremnt une nouvelle équation qui ne contiendra plus de radicaux, ſecondement de plus autant d'équations à deux termes qu'il y avoit de radicaux dans l'équation propoſée, & en élevant chacun des membres de ces équations à la puiſſance indiquée par l'expoſant du radical correſpondant, il n'y aura plus qu'à chaſſer de ces équations délivrées des radicaux les inconnues introduites. Soit, *par exemple*, l'équation $x - \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{d} = 0$. Ayant fait $\sqrt[3]{a} = y$, $\sqrt[3]{d} = p$, on aura $x - y - p = 0$ ou $x = y + p$; $a = y^3$; $d = p^3$. De la premiere équation je tire $y = x - p$, ſubſtituant cette valeur de $y$ dans $a = y^3$ il vient $x^3 - 3x^2p + 3xp^2 - p^3 = a$, de laquelle il ne s'agit plus que chaſſer $p$. Si dans cette équation, à la place de $p^3$, je ſubſtitue ſa valeur

* Si l'on ſuppoſe $a = 2 + 5\sqrt{-1}$, $c = 2 - 5\sqrt{-1}$, l'on aura $-aa - cc - ac = 37$. En ſuppoſant $a = 2 + 5\sqrt{-1}$ & $c = -4$, l'on aura $-aa - cc - ac = 13$.

$d$ prise de l'équation $d = p^3$, elle devient $x^3 - 3x^2p + 3xp^2 - d = a$, de laquelle je tire $p^2 = \frac{d + a - x^3 + 3x^2p}{3x}$. Multipliant les deux membres de celle-ci par $p$, & mettant $d$ à la place de $p^3$, j'ai $d = \frac{pd + pa - px^3 + 3x^2pp}{3x}$, d'où je tire en en multipliant, transposant & divisant, $p^2 = \frac{3dx - pd - pa + px^3}{3x^2}$. Egalant ces deux valeurs de $p^2$, je tire du résultat l'équation $p = \frac{x^4 + 2dx - ax}{a + d + 2x^3}$, substituant cette valeur de $p$ dans l'équation $x^3 - 3x^2p + 3xp^2 - p^3 = a$, j'ai enfin l'équation

$$\left.\begin{array}{r} x^9 - 3dx^6 + 3a^2x^3 - a^3 \\ - 3ax^6 + 3d^2x^3 - 3a^2d \\ - 21adx^3 - 3ad^2 \\ - d^3 \end{array}\right\} = 0,$$

équation qui ne contient d'autre inconnue que la proposée. On se tireroit de la même maniere de quelque équation qu'on eût; mais il y a des cas où il est inutile d'avoir recours à la méthode précédente. Si, *par exemple*, l'on avoit l'équation $x + a - \sqrt[3]{(b + \sqrt[3]{x})} = 0$, on auroit en transposant, $x + a = \sqrt[3]{(b + \sqrt[3]{x})}$, élevant au quarré, $x^2 + 2ax + a^2 = b + \sqrt[3]{x}$; transposant $b$ dans le premier membre, il vient $x^2 + 2ax + a^2 - b = \sqrt[3]{x}$. On voit bien qu'en élevant l'un & l'autre membre à la troisiéme puissance, il en résulteroit une équation sans radicaux.

74. PROBLEME. *Délivrer une équation de son se-*

*cond terme.* Soit l'équation $x^n + a x^{n-1} \cdots + \&c. = 0$. Supposons $x = y + p$; substituant cette valeur à la place de $x$, on aura

$$\left.\begin{array}{l} y^n + p\,n\,y^{n-1} + p^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1) \cdot y^{n-2} + \&c. \\ + a\ y^{n-1} + p \cdot (n-1) \cdot a \cdot y^{n-2} + \&c. \\ + \&c. \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on suppose $p\,n + a = 0$, ou $p\,n = -a$ ou $p = -\frac{a}{n}$, c'est-à-dire, si l'on suppose $x$ égal à une nouvelle inconnue $y$ jointe à la quantité $p$, $p$ étant égal au coefficient du second terme pris avec un signe contraire & divisé par le degré de l'équation, on aura une nouvelle équation délivrée du second terme. Si l'on supposoit $= 0$ la somme de toutes les quantité qui multiplient $y^{n-2}$, en cherchant la valeur de $p$ que donneroitcette supposition, on auroit une équation sans troisieme terme. On peut voir maintenant comment il faudroit s'y prendre pour avoir une équation sans quatrieme terme, sans cinquieme terme, &c.

75. PROBLEME. *Délivrer une équation des fractions qu'elle peut contenir.* Il suffit de supposer l'inconnue $x = \frac{y}{n}$, $n$ étant supposée divisible par tous les dénominateurs des fractions qui se trouvent dans l'équation. Soit, *par exemple*, l'équation $x^3 + \frac{a}{b} x^2 + \frac{c}{d} x + \frac{g}{f} = 0$. En supposant $x = \frac{y}{n}$, on aura $\frac{y^3}{n^3} + \frac{a y^2}{b n^2} + \frac{c y}{d n} + \frac{g}{f} = 0$, & en multipliant par $n^3$, il viendra $y^3 + \frac{n a}{b} y^2 + \frac{n^2 c}{d} y + \frac{n^3 g}{f} = 0$. Si l'on suppose $n = bdf$, l'é-

quation précédente deviendra $y^3 + adfy^2 + b^2f^2dcy + b^3d^3f^2g = o$, équation ſans fractions. Il ſuffit donc dans tous les cas de ſuppoſer $n =$ au produit des dénominateurs de toutes les fractions, ou même à une quantité diviſible par tous ces dénominateurs, lorſqu'ils ne ſont pas premiers entr'eux.

76. PROBLEME. *Délivrer le premier terme d'une équation de ſon coefficient.* Soit l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = o$, en diviſant par le coefficient $a$ du premier terme, l'on aura $x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = o$; & en faiſant évanouir les fractions, en ſuppoſant $x = \frac{y}{a}$, l'on aura $y^3 + by^2 + acy + a^2d = o$, équation dans laquelle le premier terme n'a plus de coefficient. Donc pour délivrer une équation d'un coefficient qui affecte le premier terme, il ſuffit de ſuppoſer l'inconnue égale à une autre inconnue diviſée par ce coefficient.

77. PROBLEME. *Changer les racines poſitives d'une équation en négatives & réciproquement.* Pour changer les racines poſitives en négatives & réciproquement, il ſuffit de changer les ſignes des termes où ſe trouvent les puiſſances impaires de $x$ : en effet il eſt évident que l'on changera les ſignes des racines de l'équation, en mettant $-x$ au lieu de $+x$; or ce changement ne peut affecter que les termes dans leſquels $x$ a un expoſant impair ; donc, &c.

78. PROBLEME. *Changer les racines d'une équation ſans les connoître, ſoit en les augmentant ou en les diminuant d'une quantité donnée, ſoit en les multi-*

*pliant ou en les diviſant par une quantité donnée, ſoit en faiſant qu'elles ſoient à ce qu'elles étoient dans un rapport donné.*

REGLE. I°. Pour augmenter les racines d'une équation d'une quantité donnée, on ſubſtituera à l'inconnue une autre inconnue moins la quantité donnée. *Par exemple*, pour les augmenter de la quantité $a$, on mettra $y - a$ à la place de l'inconnue $x$, & les puiſſances de $y - a$ à la place des mêmes puiſſances de $x$; car la premiere inconnue $x$ repréſente les racines de l'équation propoſée, & la ſeconde inconnue $y$ repréſente celles de l'équation transformée : or cette ſeconde inconnue $y$ eſt égale à la premiere $x$ plus la quantité $a$, puiſqu'on a mis $y - a$ pour $x$, ce qui ſuppoſe $y = x + a$; donc les racines de la transformée ſont celles de la propoſée, augmentées de la quantité $a$.

II°. Par la même raiſon, s'il falloit diminuer les racines d'une équation d'une quantité donnée $a$, on n'auroit qu'à ſubſtituer à ſon inconnue $x$ une autre inconnue $y$ plus la quantité donnée $a$, parce que $y + a$ mis à la place de $x$ ſuppoſe $y = x - a$.

III°. Pour multiplier les racines d'une équation par une quantité $a$, on ſubſtituera à l'inconnue une autre inconnue diviſée par $a$, comme $\frac{y}{a}$, *par exemple*, parce que $\frac{y}{a} = x$, donne $y = a\,x$.

IV°. Pour diviſer les racines d'une équation par une quantité $a$, on ſubſtituera à la place de l'inconnue une autre inconnue multipliée par $a$, *par exemple*, $ay$ à la place de $x$, parce que $ay = x$ donne $y = \frac{x}{a}$.

V°. Pour faire que les racines d'une équation ſoient à ce qu'elles étoient dans un rapport donné, *par exemple*, dans le rapport de $b$ à $c$, on ſubſtituera à la place de l'inconnue une autre inconnue multipliée par $\frac{c}{b}$ : ainſi à la place de $x$ on mettra $\frac{cy}{b}$, parce que la proportion $b : c :: y : x$ donne $x = \frac{cy}{b}$.

REMARQUES. On peut dans les transformations dont on vient de parler, laiſſer la même inconnue, parce qu'il eſt indifférent d'exprimer une quantité inconnue par une lettre ou par une autre, & on ne l'a changée dans la regle que pour faire mieux comprendre l'effet de la tranſformation ; il faut ſeulement faire ſur l'inconnue de l'équation ce qu'on feroit relativement à une nouvelle inconnue. *Par exemple*, on mettra $x - a$ à la place de $x$, lorſqu'on voudra augmenter les racines de la quantité $a$, on y mettra $x + a$, lorſqu'on voudra les diminuer de la quantité $a$, &c. Cette méthode abrégera même différentes opérations, comme celles de la multiplication & de la diviſion des racines, leſquelles ſe réduiront à multiplier ou à diviſer le ſecond terme de l'équation propoſée par la quantité donnée, le troiſieme terme par le quarré de cette quantité, le quatrieme terme par le cube de la même quantité, &c. Ce qu'on comprendra mieux par un exemple.

Soit l'équation propoſée $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, dont on veut multiplier les racines par $a$ ; il faudroit en changeant l'inconnue mettre $\frac{y}{a}$ à la place de $x$, ce qui donneroit $\frac{y^3}{a^3} - \frac{py^2}{a^2}$

$+\frac{qy}{a} - r = 0$ ; & comme il convient d'ôter les fractions, & ſur tout celle du premier terme, il faudroit multiplier tous les termes de la transformée par $a^3$, ce qui donneroit $y^3 - apy^2 + a^2qy - a^3r = 0$ ; ce qu'on auroit trouvé plus ſimplement en laiſſant l'inconnue $x$, & multipliant le ſecond terme par $a$, le troiſiéme par $a^2$, & le quatrieme terme par $a^3$, puiſqu'on auroit $x^3 - apx^2 + a^2qx - a^3r = 0$, qui eſt la même que la précédente, ſi ce n'eſt que l'inconnue eſt ici déſignée par la lettre $x$.

De même ſi l'on veut diviſer les racines de la même équation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ par $a$, il faudra en changeant l'inconnue mettre $ay$ pour $x$, ce qui donnera $a^3y^3 - a^2py^2 + aqy - r = 0$ ; mais parce qu'il faut délivrer le premier terme d'un coefficient différent de l'unité, il faudra encore diviſer tous les termes de la transformée par $a^3$, ce qui donnera $y^3 - \frac{py^2}{a} + \frac{qy}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$, ce qu'on auroit trouvé plus ſimplement en laiſſant la même inconnue, & diviſant le ſecond terme par $a$, le troiſieme par $a^2$ & le quatrieme par $a^3$, puiſqu'on auroit eu $x^3 - \frac{px^2}{a} + \frac{qx}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$, la même que la précédente.

On peut auſſi demander de trouver les limites des racines d'une équation, c'eſt-à-dire, une quantité plus grande qu'aucune de ſes racines poſitives, & une autre quantité plus petite qu'aucune de ſes racines négatives.

Pour avoir les limites d'une équation, on fera

l'inconnue $x = z + p$, cette ſuppoſition fera trouver deux quantités, dont l'une ſera plus grande qu'aucune de ſes racines réelles, & l'autre plus petite. Pour le faire voir, ſoit l'équation $x^3 - x^2 - 57x + 105 = 0$. En faiſant $x = z + p$ l'on aura

$$\left.\begin{array}{llll} x^3 = & z^3 + 3pz^2 & + 3p^2z & + p^3 \\ -x^2 = & -z^2 & - 2pz & - p^2 \\ -57x = & & - 57z & - 57p \\ +105 = & & & + 105 \end{array}\right\} = 0 \text{ (A).}$$

Or il eſt viſible que toutes les racines de la tranſformée A ſeront négatives & que tous ſes termes auront le ſigne +, en faiſant $p = 10$ ; mais, parce que $x = z + p$, on a $x - 10 = z$ quantité négative ; donc $x < 10$ ; c'eſt-à-dire, que la plus grande racine poſitive eſt au-deſſous de 10. Mais on peut reſerrer davantage cette limite : car en faiſant $p = 8$ on trouve encore que tous les termes reſtent poſitifs. Si nous voulons reſerrer encore cette limite; en faiſant $p = 7$, nous aurons $z^3 + 20z^2 + 76z = 0$ ( car alors le dernier membre devient $343 - 49 - 399 + 105 = 0$ ), équation qui étant diviſible par $z = 0$, ou par $z - 0 = 0$, fait voir qu'une de ces racines eſt $= 0$. C'eſt pourquoi dans la propoſée la plus grande racine poſitive ſera $= z + p = 0 + 7 = 7$. Les deux autres racines ſont contenues dans l'équation du ſecond degré $z^2 + 20z + 76 = 0$, qui eſt facile à réſoudre.

Si l'on demandoit la limite des racines négatives de la même équation, on la trouveroit facilement, en ſuppoſant $p = -10$ dans la transformée A, parce que dans ce cas ſes termes auroient

alternativement les signes + & —, & par conséquent toutes ses racines seroient positives. Mais on peut encore reserrer davantage cette limite ; car en supposant $p = -8$, les mêmes signes auroient lieu. Donc $z = x - p = x + 8$ (dans la supposition que nous venons de faire) est une quantité positive, & $x = z + p$, est $> +8$, puisque pour avoir $x$ il faudroit ajouter une quantité positive à $-8$ ; donc $x$ ne peut pas être au-dessous de $-8$ qui est par conséquent la limite des racines négatives ; de sorte que $-8$ est une quantité plus petite qu'aucune des racines réelles de l'équation. Il est visible que nous regardons ici la quantité négative $-8$, non seulement comme plus petite que 0, mais encore comme plus petite que $-3$, $-5$ &c. & en général comme plus grande que toutes les autres quantités qui prises positivement seroient plus grandes que 8.

Soit l'équation $x^2 - 4x + 4 = 0$, qui par

$$\begin{array}{rrr} z^2 & +2pz & +p^2 = 0 \text{ (A)} \\ & -4z & -4p \\ & & +4 \end{array}$$

la supposition de $x = z + p$, devient la transformée A. Si dans cette derniere équation nous faisons $p = 3$, il est visible que tous ses termes seront positifs : ainsi 3 est la limite des racines positives. Si je fais $p = 2$, la transformée A devient $z^2 \pm 0 \cdot z \pm 0 = 0$. Car 0 peut toujours être supposé avoir le double signe $\pm$ ; donc $z = 0$, ce qui me fait connoître que les deux racines de la proposée sont chacune $= 2$. Car de $z^2 \pm 0 \cdot z = 0$, on tire (en divisant par $z = 0$) $z \pm 0 = 0$, & $z = 0$.

Si

Si en resserrant ainsi les limites, une même valeur de $p$ indiquoit en même tems une limite positive & une limite négative, ce seroit une marque que la proposée a toutes ses racines imaginaires; car entre la limite $b$ & la limite $b$ il ne peut y avoir aucune racine réelle excepté 0. Mais dans ce cas la proposée seroit divisible par $x = 0$, & contiendroit $x$ dans son dernier terme, ce que nous ne supposons pas. Soit l'équation $x^2 - 4x + 20 = 0$, si on fait $x = z + p$ & $p = 2$, la transformée devient $z^2 \pm 0 \cdot z + 16 = 0$, & l'on obtient un ordre de signes qui indique la limite des racines négatives, & en même tems celle des positives. Il n'y a donc aucune racine réelle entre les limites $+2$ & $+2$. En effet la proposée contient deux racines imaginaires, désignées par l'équation $x = 2 \pm \sqrt{-16}$.

$$\begin{array}{lll} z^2 + 2pz + p^2 = 0 & (A) \\ -4z - 4p \\ +20 \end{array}$$

Si l'on proposoit de rendre toutes les racines d'une équation positives; voici une regle qu'on pourroit suivre.

Regle I°. Si toutes les racines étoient négatives, ce qu'on connoîtroit à ce que tous les termes seroient positifs, on changeroit les signes des termes pairs, suivant ce qu'on a dit ci-dessus.

II°. S'il y a quelque racine positive, ce qu'on connoîtra à ce qu'il y aura quelque terme négatif, on prendra le plus grand des coefficiens négatifs, y comprenant le dernier terme, & ayant rendu ce coefficient positif, & l'ayant augmenté de l'unité, on mettra à la place de l'inconnue ce coefficient ainsi changé moins une inconnue.

Exemple. Soit l'équation proposée $x^3 + 3x^2 - 24 = 0$, dont les racines sont $-2$, $+3$,

— 4. On prendra son plus grand coefficient négatif — 24, & le rendant positif & lui ajoutant l'unité, on aura 25, dont on ôtera une inconnue, & & on mettra $25 - y$ à la place de la premiere inconnue, ce qui donnera après les opérations ordinaires $y^3 - 78y^2 + 2015y - 17226 = 0$, dont les racines sont 27, 22, 29,

DEMONSTRATION. Soit l'équation proposée $x^3 - px^2 - qx - r = 0$, dans laquelle $-p$ soit le plus grand coefficient négatif, si on y met $p + 1 - y$ à la place de $x$, on aura

$$\begin{array}{llll} (p+1)^3 & -3(p+1)^2 y & +3(p+1)y^2 & -y^3 = 0 \\ -p(p+1)^2 & +2p(p+1)y & -py^2 & \\ -q(p+1) & +qy & & \\ -r & & & \end{array}$$

Et en changeant tous les signes pour avoir le premier terme positif,

$$\begin{array}{llll} y^3 & -3(p+1)y^2 & +3(p+1)^2 y & -(p+1)^3 = 0 \\ & +py^2 & -2p(p+1)y & +p(p+1)^2 \\ & & -qy & +q(p+1) \\ & & & +r \end{array}$$

Or si on considere chaque terme de cette transformée, on verra qu'en conséquence de ce que $p$ est le plus grand coefficient, sa premiere partie est plus grande que toutes les autres parties ensemble; ainsi dans le dernier terme, qui est le seul pour lequel on pourroit craindre le contraire, on verra que $(p+1)^3 = (p+1) \times (p+1)^2$ contient $(p+1)^2$ une fois de plus que $p \times (p+1)^2$, & que l'excès $(p+1) \times (p+1)$ surpasse la par-

tie ſuivante $q \times (p+1)$, au moins de l'excès $p+1$, lequel eſt plus grand que $r$ par la ſuppoſition; donc la premiere partie de ce dernier terme ſurpaſſe tout le reſte & donne ſon ſigne à la ſomme de toutes ſes parties; & comme il en eſt de même des autres termes, tous les termes de la transformée auront les mêmes ſignes que les termes de la premiere ligne, leſquels ſont alternativement poſitifs & négatifs, & par conſéquent ſes racines ſeront toutes poſitives.

Il eſt facile de voir qu'il en ſeroit de même ſi $-q$ ou $-r$ étoit le plus grand coefficient négatif, ou encore s'il y avoit quelque coefficient poſitif plus grand que les autres; car ſuppoſant que l'équation eſt $x^3 - px^2 + qx + r = 0$, d'abord $+r$ ne pourra déranger la ſucceſſion alternative des ſignes de $(p+1-y)^3$, parce que $r$ aura le même ſigne que $(p+1)^3$, & $+q$ ne pourra pas non plus la déranger, parce que multipliant $p+1-y$, ou ſa puiſſance quelconque, il n'en changera pas les ſignes.

Cette opération augmente toutes les racines négatives de la quantité $p+1$, mais en même tems elle change les poſitives en négatives, & les négatives en poſitives; car $p+1-y=x$ donne $y=p+1-x$, qui revient à $p+1+x$, lorſque $x$ eſt négatif; ainſi l'on voit dans l'exemple qu'on a pris que la racine $-2$ devient $27=25+2$, que la racine $+3$ devient $22=25-3$, & que la racine $-4$ devient $29=25+4$.

D'où ſuit que le plus grand coefficient négatif rendu poſitif & augmenté de l'unité ſurpaſſe chacune des racines poſitives, puiſque diminué de chacune de ces racines, il a encore une valeur poſitive.

79. Passons maintenant à la recherche des racines réelles & commensurables des équations. Selon ce que nous avons dit ci-dessus (72), on trouve les racines d'une équation en substituant successivement avec le signe + & — chacun des diviseurs du dernier terme à la place de l'inconnue: ceux de ces diviseurs qui rendent toute l'équation $= 0$ sont racines de l'équation. Il n'est pas moins évident qu'on trouvera ces mêmes racines en divisant l'équation par l'inconnue $\pm$ un des diviseurs du dernier terme, & le diviseur qui, joint à l'inconnue, divise exactement l'équation, est une des racines de l'équation, pourvu qu'on prenne ce diviseur avec un signe contraire. Soit l'équation $x^3 - 5x + 7x - 3 = 0$, les diviseurs du dernier terme 3, qu'on trouvera par la méthode ci-dessus (29), sont 1 & 3 qu'il faut joindre à $x$ avec le signe + & —: ainsi l'on peut tenter la division par les quatre facteurs $x + 1$, $x + 3$, $x - 1$, $x - 3$. Les deux premiers facteurs ne peuvent diviser exactement l'équation; mais la division réussit par le facteur $x - 1 = 0$, & le quotient $x^2 - 4x + 3 = 0$ est encore divisible par $x - 1$, le dernier quotient donnant $x - 3 = 0$; donc les racines de l'équation sont $x = 1$, $x = 1$, $x = 3$.

On pourroit faire une objection contre la méthode précédente, qu'il est bon de résoudre: si les racines d'une équation étoient fractionnaires, comme le dernier terme peut avoir un nombre infini de diviseurs fractionnaires, comment pourroit-on s'y prendre pour trouver ceux qui doivent réussir? Il est aisé de voir qu'une équation telle que $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + c = 0$, dont le premier terme est sans coefficient, & dont aucun

des autres termes n'eſt fractionnaire, ne ſauroit avoir aucune racine fractionnaire. En effet, ſuppoſons $x = \frac{d}{p}$, fraction irréductible, c'eſt-à-dire, telle que $d$ & $p$ n'ayent aucun diviſeur commun. Subſtituant cette valeur de $x$ dans l'équation ci-deſſus, on aura $\frac{d^m}{p^m} + a\frac{d^{m-1}}{p^{m-1}} + b\frac{d^{m-2}}{p^{m-2}} \cdots + c = 0$. En multipliant toute l'équation par $p^{m-1}$ & tranſpoſant, on aura $\frac{d^m}{p} = -(ad^{m-1} + bpd^{m-2} + \&c \cdots + cp^{m-1})$, nombre entier comme il eſt évident; donc $\frac{d^m}{p}$ ſeroit un nombre entier; donc $d^m$ ſeroit exactement diviſible par $p$; mais $d$ & $p$ n'ayant aucun diviſeur commun, ſont premiers entr'eux. Donc en élevant $d$ à une puiſſance quelconque, ce nombre ſera compoſé d'un nombre premier avec $p$, pris un nombre de fois déſigné par un nombre premier encore avec $p$; donc $d^m$ ſera premier par rapport à $p$; donc $\frac{d^m}{p}$ ne peut être un nombre entier; donc, &c. Soit $d = 3$, $p = 2$, $m = 3$, on aura $\frac{d}{p} = \frac{3}{2}$ & $\frac{d^m}{p} = \frac{27}{2}$. Or il eſt viſible que 27 n'eſt pas exactement diviſible par 2*.

80. La méthode précédente a cet inconvénient, que lorſque le dernier terme a beaucoup de diviſeurs, la multiplicité des calculs qu'il faudroit faire pour trouver ceux qui doivent réuſſir, pourroit décourager le plus laborieux Analyſte. Il eſt donc

* C'eſt auſſi une conſéquence de ce que nous avons dit ci-deſſus (38).

à-propos de chercher quelque méthode propre à diminuer le travail du Calculateur. On a remarqué qu'en faisant dans une équation dont l'inconnue est $x$ & $x + a$ un diviseur, qu'en faisant, dis-je, $x$ égal à un nombre donné, à 1, *par-exemple*, la quantité dans laquelle l'équation se change par cette supposition de $x = 1$, est divisible par ce nombre $+a$, c'est-à-dire, ici par $1 + a$. En effet, soit l'équation $x^2 - x - 6 = 0$, dont un des diviseurs est $x + 2$. Si l'on fait $x = 5$, la quantité $25 - 5 - 6 = 14$, dans laquelle se change cette équation par la supposition de $x = 5$, est divisible par $5 + 2 = 7$. De cette observation il suit qu'en supposant $x = 0$, le dernier terme de l'équation sera divisible par $a$. Si l'on fait successivement $x = 1, 2, 3$, &c. $-1, -2, -3$, &c. Le nombre dans lequel se changera l'équation dans ces différentes suppositions, sera divisible par $1 + a$, $2 + a$, $3 + a$, &c. $-1 + a$, $-2 + a$, $-3 + a$, &c. Mais les nombres $3 + a$, $2 + a$, $1 + a$, $a$, $-1 + a$, $-2 + a$, $-3 + a$ sont en progression arithmétique, & celui qui résulte de la supposition de $x = 1$ surpasse d'une unité celui qui vient de la supposition de $x = 0$, tandis que celui-ci surpasse d'une unité celui que donne la supposition de $x = -1$. Donc on peut rejetter les diviseurs qui n'ont pas cette condition, ce qui épargne beaucoup de tentatives inutiles.

EXEMPLE. Soit l'équation $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| $x = 2$ | 20 | 1, 2, 5, 4, 10, 20 | 5 | $-1$ |
| $x = 1$ | 8 | 1, 2, 4, 8 | 4 | $-2$ |
| $x = 0$ | 6 | 1, 2, 3, 6 | 3 | $-3$ |
| $x = -1$ | 16 | | | $-4$ |
| $x = -2$ | 16 | 1, 2, 4, 8, 16 | 2 | |

Ayant écrit dans la colonne A les valeurs que je veux donner à $x$, j'écris dans la colonne B les nombres dans lesquels se change succeſſivement l'équation par les ſuppoſitions correſpondantes de $x$ (ici on néglige les ſignes de ces nombres *); J'écris auſſi en C les diviſeurs de la colonne B. Parmi les diviſeurs de 6 qui vient par la ſuppoſition de $x = 0$, je cherche s'il y en a quelqu'un qui ſoit ſurpaſſé de l'unité par ceux qui viennent de la ſuppoſition de $x = 1$, & qui ſurpaſſe en même tems de l'unité quelqu'un de ceux que donne la ſuppoſition de $x = -1$. En prenant ces diviſeurs ſoit en + ſoit en —, je trouve que + 3 & — 3 ont cette condition; car on trouve 4 dans les diviſeurs de 8, & 2 parmi les diviſeurs de 16. De même en prenant ces diviſeurs avec le ſigne —, je trouve — 2 dans les diviſeurs de 8, & — 4 parmi ceux de 16; donc + 3 & — 3 ont les conditions requiſes. Si vous voulez vous aſſurer ſi l'un des deux ne doit pas être rejetté, il n'y a qu'à remarquer qu'en ſuppoſant $x = 2$, il faut trouver parmi les diviſeurs de 20 que donne cette ſuppoſition, le nombre 5, qui ſurpaſſe de 1 le nombre 4 que donne la ſuppoſition de $x = 1$, & le nombre — 1 qui ſurpaſſe auſſi de 1 le diviſeur — 2 venu de la même ſuppoſition de $x = 1$. Or 1 & 5 ſont des diviſeurs de 20, donc juſqu'ici on n'a pas de raiſon de rejetter + 3 ni — 3; de ſorte que nous avons les progreſſions arithmétiques D & E, dont les termes correſpondans à $x = 0$ ſont des diviſeurs à eſſayer. Mais en ſuppoſant $x =$

* Parce que ſi + $a$ peut diviſer exactement + $a d$, + $a$ diviſera — $a d$, de même — $a$ diviſera + $a d$ & — $a d$.

— 2, il faudra trouver parmi les diviſeurs de 16 que donne cette ſuppoſition, à l'égard de + 3, le diviſeur 1 plus petit d'une unité que 2, provenant de la ſuppoſition de $x = -1$, & — 5 pour le ſecond diviſeur — 3; mais 5 n'eſt pas un diviſeur de 16; donc — 3 doit être rejetté. On ne peut donc tenter la diviſion que par le facteur $x + 3$, elle réuſſit & donne pour quotient $x^2 - 5x + 2 = 0$; donc $x + 3 = 0$, ou $x = -3$; donc — 3 eſt une des racines de l'équation. Si l'on trouvoit un trop grand nombre de diviſeurs, l'on pourroit eſſayer de le diminuer par des nouvelles ſuppoſitions de $x = 3$, $x = 4$, $x = -3$, $x = -4$, &c. ſur quoi l'on peut remarquer que cette méthode fait véritablement connoître les diviſeurs qui peuvent réuſſir, mais qu'il ne s'enſuit pas que les diviſeurs que la méthode fait trouver doivent réuſſir, parce qu'il peut ſe faire que l'équation n'ait que des racines imaginaires, ou incommenſurables.

Soit maintenant l'équation $x^4 + 2x^3 - 13 \cdot x^2 - 14x + 24 = 0$, on trouvera par la méthode précédente que les diviſeurs de cette équation ſont $x - 1$, $x - 3$, $x + 2$, $x + 4$; ainſi les quatre racines de l'équation ſont $x = 1$, $x = 3$, $x = -2$, $x = -4$. Toutes les fois que l'équation ſe réduit à 0 par la ſuppoſition d'une valeur de $x$, comme cela arrive ici par la ſuppoſition de $x = 1$, de $x = 3$, de $x = -2$, de $x = -4$, on eſt sûr que ces valeurs de $x$ ſont des racines de l'équation (72); on peut donc ſubſtituer ſucceſſivement à la place de $x$ tous les diviſeurs du dernier terme pris en + & en —, ceux de ces diviſeurs qui rendront l'équation = 0, ſeront des racines de l'équation.

PROBLEME. *Le nombre de louis d'or de Titius surpasse de* 18 *le nombre des louis d'or d'Alexandre, mais en multipliant la somme de ces nombres par la différence de leurs cubes, le produit est* 275 184 *: on demande le nombre des louis de Titius & d'Alexandre.* Soit $x$ le nombre des louis d'Alexandre, celui de Titius sera $x + 18$. La différence des cubes de ces nombres est $54xx+972x+5832=54(xx+18x+108)$. Si l'on multiplie cette quantité par la somme $2x + 18 = 2(x+9)$, le produit $108.(x^3 + 27xx + 270x + 972)$ doit être $= 275184$. Donc, en divisant par 108, on aura $x^3 + 27xx + 270x + 972 = 2548$, ou $x^3 + 27xx + 270x - 1576 = 0$. Les diviseurs de 1576 sont 1, 2, 4, 8, &c. Si on essaye le diviseur $x - 4$, on trouvera pour quotient $xx + 31x + 394 = 0$, dont les racines sont imaginaires; ainsi Alexandre avoit 4 louis, & Titius 22.

PROBLEME. *Quelques Négocians établissent un fonds, pour lequel chacun fournit dix fois autant de louis d'or qu'ils sont d'Associés, ils gagnent sur chaque centaine de louis d'or autant de louis & 6 de plus qu'ils sont d'Associés, le profit total est de* 392 *louis ; on demande le nombre des Associés.* Soit $x$ le nombre cherché; chaque Associé aura donc fourni $10x$ louis & tous ensemble $10xx$ louis. Par la nature du problême, ils gagnent $x+6$ louis sur chaque centaine de louis; ainsi en faisant 100 : $x+6$ :: $10xx : \frac{10x^3 + 60xx}{100} = \frac{x^3 + 6xx}{10}$, on aura le gain total. Mais ce gain est $= 392$ louis; donc $\frac{x^3+6xx}{10} = 392$, $x^3+6xx=3920$. En faisant $x = 2z$, divisant par 8 & transposant, il vient $z^3 + 3zz - 490 = 0$. Les diviseurs de 490 sont 1, 2, 5, 7, 10, &c. Si l'on divise la derniere équation par $z - 7$, la division réussit & donne $zz + 10z + 70 = 0$, équation dont les racines sont imaginaires. Donc $z = 7$, & $x = 2z = 14$. Ainsi il y avoit quatorze Associés.

Si le premier terme de l'équation a un coefficient, & qu'on ne veuille pas l'en délivrer, on prendra les diviseurs du dernier terme, & encore tous ceux du premier coefficient, & on formera des fractions de chacun des diviseurs du dernier terme divisé par chacun des diviseurs du premier coefficient, auxquelles on donnera successivement les signes + & —, & celles de ces fractions, qui, substituées à l'inconnue, donneront un

réſultat égal à zero, ſeront autant de racines de l'équation.

EXEMPLE. Soit l'équation $24x^3 - 46x^2 + 29x - 6 = 0$. Les diviſeurs du dernier terme ſont 1, 2, 3, 6, ceux du premier coefficient ſont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. diviſant chacun des diviſeurs de 6 par ceux de 24, on a les fractions ſuivantes.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \quad \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{6}{1};$$

& les ſubſtituant ſucceſſivement à l'inconnue avec le ſigne + & —, on trouvera que $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ réduiſent tout à zero; ainſi ces fractions ſeront les trois racines de l'équation propoſée.

Il eſt clair que le premier terme d'une équation ne peut avoir de coefficient différent de l'unité, ſi aucune des valeurs de l'inconnue n'eſt une fraction, parce que cette inconnue n'auroit que l'unité pour coefficient dans les équations compoſantes; mais ſi quelqu'une de ces valeurs eſt une fraction, l'équation compoſante qui contient cette valeur, étant délivrée de ſon dénominateur, l'inconnue de cette équation ſera multipliée par un coefficient différent de l'unité, & ce coefficient en donnera un au premier terme de l'équation compoſée; ainſi les équations compoſantes étant $x - a = 0, x - \frac{m}{n} = 0$, cette derniere étant délivrée de ſon dénominateur, devient $nx - m = 0$; & le produit des deux équations eſt $nxx - anx - mx + am = 0$. On eſt donc aſſuré que lorſque le premier terme d'une équation a un coefficient autre que l'unité quelqu'une des valeurs de l'inconnue eſt une fraction dont le numérateur eſt un diviſeur du dernier terme, & le dénominateur eſt un diviſeur du premier coefficient; ainſi ayant formé toutes les fractions qu'on peut faire de cette maniere avec les diviſeurs du dernier terme & du premier coefficient, on n'a plus qu'à chercher celles qui, miſes à la place de l'inconnue, réduiſent tout à zero.

AUTRE MANIERE. On ſuppoſera l'inconnue ſucceſſivement égale à 1, 0, — 1, ou ſi l'on veut, à 2, 1, 0, — 1, — 2; & l'on prendra les réſultats & leurs diviſeurs, qu'on écrira comme on a dit ci-deſſus. Enſuite prenant un terme dans chaque ſuite, & leur donnant l'un ou l'autre ſigne, on y cherchera des progreſſions arithmétiques dont la différence ſoit un diviſeur du premier coefficient, & on eſſayera ſi, en multipliant l'inconnue par cette différence, & ajoutant au produit le terme de la progreſſion qui vient de la ſuppoſition

de $x = 0$, avec l'un ou l'autre ſigne, la ſomme diviſe exactement l'équation propoſée; parce qu'alors le dernier terme de cette ſomme pris avec un ſigne contraire, & diviſé par le coefficient de l'inconnue, ſera une racine commenſurable de l'équation propoſée.

*Par exemple.* L'équation étant la même que deſſus, ſi on fait ſucceſſivement l'inconnue égale à 1, 0, —1, les réſultats ſeront —1, —6, —105; dont les diviſeurs ſont ceux qu'on voit dans la table ci-deſſous. Et ſi on prend un de ces diviſeurs dans chaque ſuite, leur donnant ſucceſſivement l'un & l'autre ſigne, on trouvera bien-tôt les progreſſions —1, +1, +3; —1, +2, +5; —1, +3, +7, dont les différences ſont 2, 3; 4, diviſeurs du premier coefficient. On multipliera donc l'inconnue par chacune de ces différences, on ajoutera au produit le terme de la même progreſſion, qui répond à la ſuppoſition de $x = 0$, mais avec un ſigne contraire, ce qui donnera les trois binomes $2x - 1$, $3x - 2$, $4x - 3$, & on eſſayera ſi ces quantités diviſent également l'équation propoſée; & comme on trouvera qu'elles la diviſent, on conclura que $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ſont les racines de cette équation.

*EXEMPLE.*

Equation propoſée $24x^3 - 46x^2 + 29x - 6 = 0$.

| *Suppoſitions.* | *Réſultats.* | *Diviſeurs des Réſultats.* |
|---|---|---|
| $x = 1$ · | $+1$ · | $\pm 1$ · |
| $x = 0$ · | $-6$ · | $\pm 1 \cdot \pm 2 \cdot \pm 3 \cdot \pm 6$. |
| $x = -1$ · | $-105$ · | $\pm 1 \cdot \pm 3 \cdot \pm 5 \cdot \pm 7 \cdot \pm 15 \cdot \pm 21 \cdot \pm 35 \cdot \pm 105$. |

*Diviſeurs du premier Coefficient.*

1 · 2 · 3 · 4 · 6 · 8 · 12 · 24.

La raiſon de cette opération eſt facile à concevoir. Soit $\frac{a}{n}$ une racine commenſurable d'une équation dont $n$ diviſe le premier coefficient, on aura $x = \frac{a}{n}$, & $nx - a = 0$ ſera une équation compoſante de la propoſée. Si donc on fait $x = 1$, tant dans la propoſée que dans $nx - a$, le réſultat ſera diviſible par $n - a$, ou par $a - n$; ſi on fait $x = 0$, le réſultat qui eſt le dernier terme de la propoſée, ſera diviſible par $a$, ſuivant ce qu'on a dit plus haut, & ſi on fait $x = -1$, le ré-

ſultat ſera diviſible par $-n-a$, ou par $a+n$ : or les trois diviſeurs $a-n, a, a+n$ font une progreſſion arithmétique dont la différence eſt $n$ diviſeur du premier coefficient. Donc ſi l'équation propoſée a une racine commenſurable, on eſt aſſuré que cette racine a pour numérateur un diviſeur du réſultat qui vient de la ſuppoſition de $x=0$, & qui fait avec un diviſeur de chacun des autres réſultats une progreſſion arithmétique, dont la différence eſt un diviſeur du premier coefficient, & que cette différence en eſt le dénominateur ; ainſi on ne doit eſſayer que les diviſeurs du dernier terme qui ont ces conditions. Il en ſeroit de même ſi on avoit encore fait $x=2$, $x=-2$, parce que l'équation compoſante ſe réduiroit par ces ſuppoſitions à $2n-a$, $-2n-a$ qui donneroient les diviſeurs $a-2n$, $a+2n$, leſquels ſeroient avec les autres une progreſſion de cinq termes, dont la différence ſeroit toujours $n$. En ſuivant la même méthode, on trouveroit un moindre nombre de ces progreſſions, & le choix des diviſeurs ſeroit plus facile.

AUTRE MANIERE. Soit l'équation $mx^3+ax^2+bx+c=0$, qu'on ſuppoſe contenir une racine rationelle repréſentée par le diviſeur $fx+g=0$ ou par l'équation $x+\frac{g}{f}=0$, qui diviſera la propoſée en délivrant ſon premier terme du coefficient $m$; l'on aura $x^3+\frac{a}{m}x^2+\frac{b}{m}x+\frac{c}{m}=0$. Il eſt viſible que $x+\frac{g}{f}$ ne ſauroit être un diviſeur de cette équation, à moins que $g$ ne ſoit un diviſeur de $c$ & $f$ un diviſeur de $m$.

Si le premier terme de la propoſée étoit ſans coefficient, on auroit $m=1$ & $f=1$, c'eſt-à-dire, que le diviſeur $x+\frac{g}{f}$ ſeroit $x+g$. Cela poſé, ſoit l'équation $3x^3-29x^2+4x+60=0$. En cherchant les limites des racines de l'équation $x^3-\frac{29}{3}x^2+\frac{60}{3}=0$, je trouve $-1$ & $10$; je cherche enſuite les diviſeurs du dernier terme 60 de la propoſée contenus entre ces limites, & je trouve $1, 2, 3, 4, 5, 6$, pour les diviſeurs poſitifs, & $-1$ pour les négatifs; car $-2$, $-3$ &c. ſont exclus par les limites trouvées. Je cherche de même les diviſeurs 1 & 3 de 3, & diviſant ceux de 60 par ceux de 3, j'ai $-1, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 3, 4, \frac{4}{3}, 5, \frac{5}{3}, 6$. Si donc la propoſée a quelque racine réelle, elle doit ſe trouver parmi ces

nombres. En tentant la divlſion par $x - \frac{1}{3} = 0$, ou par $3x - 5 = 0$, je trouve pour quotient $x^2 - 8x - 12 = 0$; ainſi l'une des racines de l'équation eſt repréſentée par $x = \frac{5}{3}$, & les deux autres ſe trouvent, en réſolvant l'équation du ſecond degré $x^2 - 8x - 12 = 0$. Si on veut encore diminuer le nombre des diviſeurs, on ſuppoſera $x = y - p$, il eſt viſible que chaque racine de la transformée ſera plus grande que $x$ de la quantité $p$, puiſque $x + p = y$. Ainſi ſi $a$ & $b$ ſont des limites de la propoſée, $a + p$ & $b + p$ ſeront des limites de la transformée. Si dans l'équation ci-deſſus nous ſuppoſons $x = y - 1$, 1 repréſentant l'indéterminée $p$, ce qui donnera $a + p = -1 + 1 = 0$, & $b + p = 10 + 1 = 11$, nous trouverons

$$\begin{array}{rrrrr} 3x^3 = & 3y^3 & - 9y^2 & + 9y & - 3 \\ - 29x^2 = & & - 29y^2 & + 58y & - 29 \\ + 4x = & & & 4y & - 4 \\ + 60 = & & & & + 60 \end{array}$$

La transformée ſera donc $3y^3 - 38y^2 + 71y + 24 = 0$ A. De laquelle ſi nous voulons chercher les racines par la méthode préſente, en nous contentant de prendre les diviſeurs de 24 qui ſont contenus entre 0 & 11, ſavoir, 1, 2, 3, 4, 6, 8, & les diviſant par 1 & 3 (facteurs de 3), nous aurons les nombres $1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 3, \frac{4}{3}, 4, 6, 8, \frac{8}{3}$, parmi leſquels doivent ſe trouver les racines réelles de l'équation A. Mais ſi dans la propoſée on ſuppoſe $x = y + 1$, la transformée deviendra $3y^3 - 20y^2 - 45y + 38 = 0$, dans laquelle les limites ſont 9 & $-2$. Prenant donc les diviſeurs de 38 qui tombent entre ces limites, ſavoir, $-1, 1, 2$, & les diviſant par 1 & par 3, les racines rationelles de la derniere réduite ſe trouveront parmi les nombres $-\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, 2$. Maintenant j'écris par ordre les nombres que je viens de trouver, & mettant dans la premiere ſérie horiſontale ceux parmi leſquels doit ſe trouver une racine réelle de l'équation dans laquelle $x = y + 1$, dans la ſeconde ceux qui ont rapport à l'équation propoſée, & dans la troiſieme ceux qu'a donnés la ſuppoſition de $x = y - 1$; il eſt viſible qu'aucun des nombres de la ſeconde ſuite ne peut être une racine de la propoſée, à moins que parmi ceux de la premiere ſérie, il ne s'en trouve quelqu'un qui réſulte de celui-ci en lui ajoutant $-1$, & que parmi ceux de la troiſieme il ne s'en

$$\begin{array}{ll} -\frac{1}{3} - 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, 2 & \\ -1 - \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3} & \\ 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3} & \end{array}$$

trouve auſſi quelqu'un qui en réſulte de la même maniere en lui ajoutant + 1, parce que ſi cette racine eſt $x$ dans la ſeconde, elle doit être $x - 1$ dans la premiere, & $x + 1$ dans la troiſieme ſérie. Or en examinant avec un peu d'attention ces trois ſéries, il eſt viſible que les ſeuls nombres qui ont la condition requiſe ſont compris dans les trois séries, dont la premiere a été priſe parmi les nombres de la premiere série ci-deſſus, la ſeconde parmi ceux de la ſeconde, & la troiſieme parmi ceux de la troiſieme. Si donc la propoſée $3x^3 - 29x^2 + 4x + 60 = 0$ a quelque racine rationelle, elle ne peut être que 2, ou 3, $\frac{5}{3}$; & alors cette équation ſera diviſible ou par $x - 2 = 0$, ou par $x - 3 = 0$, ou enfin par $3x - 5 = 0$. Ainſi les diviſeurs qu'on peut eſſayer ont été réduits par cette méthode à trois ſeulement, au lieu de douze qu'on avoit d'abord trouvés.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | $\frac{5}{3}$ |
| 2 | 3 | $\frac{7}{3}$ |
| 3 | 4 | $\frac{8}{3}$ |

81. Venons maintenant aux diviſeurs du ſecond degré. Suppoſons que $x^2 + bx + a$ eſt un diviſeur du ſecond degré dans une équation; en faiſant

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x = 2$ | $\cdot\ 4 +$ | $2b +$ | $a$, |
| $1$ | $\cdot\ 1 +$ | $b +$ | $a$, |
| $0$ | $\cdot$ | $+$ | $a$, |
| $-1$ | $\cdot\ 1 -$ | $b +$ | $a$, |
| $-2$ | $\cdot\ 4 -$ | $2b +$ | $a$, |
| &c. | | &c. | |

ce diviſeur deviendra ſucceſſivement égal aux quantités que l'on voit vis-à-vis des ſuppoſitions des valeurs de $x$, & la quantité dans laquelle ſe changera l'équation par ces ſuppoſitions, ſera diviſible par les diviſeurs correſpondants. Donc ſi de ces diviſeurs on ôte les quarrés des valeurs correſpondants de $x$, il en réſultera des quantités qui ſont évidemment en progreſſion arithmétique; donc il faudra rejetter les diviſeurs qui n'auront pas cette condition. Si l'on trouvoit un trop grand nombre de progreſſions, on tâcheroit de le diminuer, en faiſant de nouvelles ſuppoſitions de

$2b + a$
$b + a$
$+ a$
$- b + a$
$- 2b + a$

$x = -3$, $x = -4$ &c., $x = +3$ &c. ; & celles qui ne seroient pas détruites par ces nouvelles suppositions, donneroient des diviseurs qu'on pourroit essayer. Quand on aura trouvé une de ces progressions, on ôtera du terme qui répond à la supposition de $x = 1$, celui qui répond à la supposition de $x = 0$, & l'on aura $b$, & par conséquent le diviseur $x^2 + bx + a$ par lequel on tentera la division. Si l'on a trouvé plusieurs progressions différentes, on aura plusieurs diviseurs de la même forme, quoique $b$ ne soit pas la même quantité dans ces diviseurs. Soit, *par exemple*, l'équation $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5 = 0$. J'écris dans la colonne A les suppositions différentes de $x$, j'écris en B les nombres dans lesquels

| A | B | C |
|---|---|---|
| $x = 2$ | 133 | 1, 7, 19, 133 |
| 1 | 33 | 1, 3, 11, 33 |
| 0 | 5 | 1, 5 |
| $-1$ | 1 | 1 |
| $-2$ | 3 | 1, 3 |

| D | E |
|---|---|
| 4 | $-137, -23, -11, -5, -3, +3, +15, +129$ |
| 1 | $-34, -12, -4, -2, 0, +2, +10, +32$ |
| 0 | $-5, -1, +1, +5$ |
| 1 | $-2, 0$ |
| 4 | $-7, -5, -3, -1$ |

se change l'équation par ces suppositions de $x$, je mets en C les diviseurs de ces nombres, en D les quarrés des valeurs correspondantes de $x$, en E les diviseurs qui sont en C, mais pris avec les signes + & —, & desquels on a ôté les nombres correspondants de la colonne D. Après quoi je cherche

les progreſſions arithmétiques que peuvent donner les nombres des colonnes E; j'en trouve deux que j'écris, l'une en F & l'autre en G. Je ne fais pas de nouvelles ſuppoſitions pour tâcher d'exclure l'une des deux, parce que l'équation propoſée étant du quatriéme degré, elle doit avoir deux diviſeurs rationels du ſecond degré; ou n'en avoir aucun. Les nombres qui répondent à la ſuppoſition de $x = 0$, ſont 5 & 1. Si l'on ôte ces nombres de ceux qui dans leur colonne répondent à la ſuppoſition de $x = 1$, l'on aura $b = 5$ & $b = 1$; donc les diviſeurs par leſquels on peut tenter la diviſion, ſont $x^2 + 5x + 5$, $x^2 + x + 1$. Si l'on tente la diviſion par le premier, on trouvera le ſecond au quotient. Réſolvant maintenant les équations $x^2 + 5x + 5 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$ par la méthode du ſecond degré, on aura les quatre racines de l'équation propoſée.

| F | G |
|---|---|
| 15 | 3 |
| 10 | 2 |
| 5 | 1 |
| 0 | 0 |
| −5 | −1 |

Soit maintenant l'équation $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21 = 0$. En ſupoſant ſucceſſivement $x = 1$, on trouvera qu'il n'y a qu'un ſeul

| | |
|---|---|
| 0 | diviſeur $x^2 + 3x - 3$, par lequel |
| −1 | on puiſſe tenter la diviſion : elle |
| −2 | réuſſit & donne pour quotient $x^3 +$ |
| −3 | $5x - 7$. Il ſuffit donc de trouver |

les racines des deux équations $x^2 + 3x - 3 = 0$, $x^3 + 5x - 7 = 0$, pour avoir celles de l'équation propoſée.

82. Si l'équation étoit affectée de fractions, comme l'équation $x^2 + \frac{x}{6} - \frac{1}{3} = 0$, on l'en délivreroit en faiſant l'inconnue $x$ égale à une autre inconnue

inconnue $y$, diviſée par un nombre diviſible par tous les dénominateurs de l'équation, ainſi que nous l'avons dit ci-deſſus. Suppoſant donc $x = \frac{y}{6}$, j'aurai en ſubſtituant, multipliant & réduiſant, $y^2 + y - 12 = 0$. Les diviſeurs de cette équation ſont, par la méthode ci-deſſus (79), $y - 3$, $y + 4$, & partant les racines ſont 3 & $-4$. Mais $x = \frac{y}{6}$; donc les racines de la premiere équation ſe trouveront en diviſant celles de la ſeconde par le diviſeur 6 de $y$, ce qui donnera $x = \frac{3}{6}$ & $x = -\frac{4}{6}$, ou $x = \frac{1}{2}$ & $x = -\frac{2}{3}$. Si l'équation propoſée avoit un coefficient au premier terme, on ſuppoſeroit $x$ égal à une nouvelle inconnue diviſée par ce coefficient, & l'équation qui en réſulteroit n'ayant pas de coefficient au premier terme, on en chercheroit les racines, & diviſant ces racines par le coefficient du premier terme de l'équation propoſée, on auroit les racines cherchées. Ainſi ſi j'avois l'équation $6x^2 + x - 2 = 0$. Faiſant $x = \frac{y}{6}$, on trouveroit l'équation $y^2 + y - 12 = 0$, & diviſant les racines de cette derniere par 6, l'on auroit toutes les racines cherchées. Mais ſi l'équation que l'on trouve en faiſant diſparoître le coefficient du premier terme, ou les dénominateurs des équations qui contiennent des coefficients fractionnaires, n'avoit point de racines commenſurables, on ſeroit sûr que l'équation propoſée n'en a pas non plus, puiſqu'une racine commenſurable étant diviſée ou multipliée par une quantité commenſurable, ne ſauroit devenir incommenſurable. Si les coeffi-

cients de l'équation proposée étoient algébriques, tels que ceux de l'équation $x^2 + ax - b = 0$ *, il faudroit, puisque $a$ & $b$ sont censés connus, exprimer ces coefficients en nombres; ainsi supposant $a = 1$ & $b = 12$, on auroit l'équation $x^2 + x - 12 = 0$, dont les racines sont $x = 3$, $x = -4$.

## *De la résolution des Equations par le moyen des diviseurs d'un ordre quelconque.*

83. Soit l'équation $x^4 + ax^3 + (aa - ab)x^2 - aabx - a^3b = 0$, qu'on veut diviser en deux facteurs du second degré. Je prends deux équations quarrées $xx + yx + u = 0$, $xx + sx + z = 0$, de la multiplication desquelles je suppose que résulte la proposée; $y$, $u$, $s$, $z$ étant des quantités indéterminées qu'on déterminera dans la suite du calcul. Les ayant multipliées l'une par l'autre, il vient

$$\begin{aligned} x^4 &+ yx^3 + ux^2 + usx + zu = 0 \\ &+ sx^3 + syx^2 + zyx \\ &+ zx^2 \end{aligned} \qquad (A)$$

On comparera l'équation A avec la proposée en égalant tous les termes de celle-ci avec leurs correspondans dans la proposée; la comparaison des deux seconds termes donne $s + y = a$, ou $s = a - y$; la comparaison des derniers termes fait voir que $z = -\frac{a^3b}{u}$; celle des quatrièmes termes fournit l'équation $yz + su = -a^2b$. Substituez dans celle-ci les valeurs trouvées de $s$ & de $z$, & vous aurez $y = \frac{au^2 + abu}{uu + a^3b}$; mais l'équation $z = -\frac{a^3b}{u}$ fait connoître que $u$ est un diviseur du dernier terme $-a^3b$. Comme les équations supposées sont du second degré, je cherche tous

* A cause de $b = x^0 b$, $b$ est le coefficient de $x^0$.

les diviſeurs du ſecond ordre de $a^3 b$, ſavoir $\pm ab$, $\pm aa$, $\pm a\sqrt{ab}$, & commençant par le premier, je ſuppoſe $u = ab$, ce qui donne $y = \frac{2ab}{a+b}$. Ainſi l'une des équations ſuppoſées deviendra $xx + \frac{2abx}{a+b} + ab = 0$; mais parce qu'elle ne peut pas diviſer exactement la propoſée, je conclus que le diviſeur $ab$ eſt inutile. C'eſt pourquoi prenant le diviſeur $-ab$, & ſuppoſant $u = -ab$, ce qui donne $y = 0$, la premiere équation ſuppoſée devient $xx - ab = 0$, qui diviſe exactement la propoſée, & donne pour quotient $x^2 + ax + aa = 0$. Si aucun des diviſeurs ne pouvoit réuſſir, la propoſée ſeroit irréductible du moins par cette méthode.

Si on veut éviter les diviſions, on ſubſtituera une des valeurs de $u$ (priſe parmi les diviſeurs du dernier terme) dans $y, ſ, \zeta$, & ces valeurs étant miſes dans les trinomes quadratiques, ſi leur produit rend la propoſée, le problême ſera réſolu; ſi cela n'arrive pas, il faut employer une autre valeur de $u$. Soit, *par exemple*, l'équation $x^4 + 2bx^3 + bbx^2 - a^3 b = 0$. Comparant cette équation avec la transformée A, on trouve $ſ + y = 2b$, $u + ſy + \zeta = bb$, $\zeta y + ſu = 0$ (parce que le quatrieme terme manque dans la propoſée), $\zeta u = -a^3 b$. La premiere donne $ſ = 2b - y$, la derniere fait voir que $\zeta = -\frac{a^3 b}{u}$. Ces valeurs ſubſtituées dans la troiſieme donnent $-\frac{a^3 by}{u} + 2bu - uy = 0$, ou $y = \frac{2bu^2}{a^3 b + uu}$. Comme $u$ doit être un diviſeur de $-a^3 b$, ſi on prend les diviſeurs du ſecond degré $\pm a^2$, $\pm ab$, $\pm a\sqrt{ab}$, on voit facilement que les deux premiers ſont inutiles, parce qu'étant ſubſtitués dans la ſeconde équation $u + ſy + \zeta = bb$, elle ne devient pas identique. Mais en examinant $a\sqrt{ab}$ que je fais $= u$, je trouve $y = b$, $\zeta = -a\sqrt{ab}$, $ſ = b$. Ces valeurs étant ſubſtituées dans la ſeconde équation la rendent identique, puiſqu'elle devient $a\sqrt{ab} + bb - a\sqrt{ab} = bb$, ou $bb = bb$. Ainſi les trinomes $xx + bx + a\sqrt{ab} = 0$, $xx + bx - a\sqrt{ab} = 0$, ſont les diviſeurs cherchés (on auroit trouvé les mêmes trinomes en ſuppoſant $u = -a\sqrt{ab}$), qui multipliés l'un par l'autre rendront la propoſée.

Soit maintenant l'équation du cinquieme degré $x^5 - 4a \cdot x^4 + 6a^2 x^3 - 8a^3 x^2 + 5a^4 x - a^5 = 0$, qu'on propose de diviser en deux facteurs l'un du second, l'autre du troisieme degré. Je prends les deux équations auxiliaires $xx + yx + u = 0$, $x^3 + txx + sx + z = 0$, dont le produit

$$\begin{aligned} x^5 &+ yx^4 + ux^3 + tux^2 + sux + zu = 0 \\ &+ tx^4 + tyx^3 + syx^2 + zyx \\ &+ sx^3 + zx^2 \end{aligned}$$

doit rendre la proposée. La comparaison des termes donne les cinq équations suivantes $y + t = -4a$, $u + ty + s = 6a^2$, $tu + sy + z = -8a^3$, $su + zy = 5a^4$, $zu = -a^5$. Par la premiere on a $t = -4a - y$; par la derniere $z = -\frac{a^5}{u}$; par la quatrieme $s = \frac{5a^4 - zy}{u} = \frac{5a^4}{u} + \frac{a^5 y}{uu}$. Substituant ces valeurs dans la seconde il vient $u - 4ay - yy + \frac{5a}{u} + \frac{a^5 y}{u \cdot u} = 6a^2$, ou $yy + 4ay - \frac{a^5 y}{uu} = -6aa + u + \frac{5a^4}{u}$. Parce que $u$ doit être un diviseur du second ordre de $a^5$, prenons pour $u$ le diviseur $\pm aa$. Si nous supposons $u = aa$, la derniere équation devient $yy + 3ay = 0$, d'où l'on tire $y = 0$, & $y = -3a$. Si nous supposons $y = 0$, nous aurons $t = -4a$, $s = 5a$, $z = -a^3$. Ces valeurs étant substituées dans la troisieme équation dont on n'a fait aucun usage, il vient $-4a^3 - a^3 = -8a^3$, équation qui n'est pas identique; donc on ne peut pas faire $y = 0$. Mais en faisant $y = -3a$, on trouve $t = -a$, $s = 2aa$, $z = -a^3$. Ces valeurs substituées dans la troisiéme donnent $-8a^3 = -8a^3$, équation identique. C'est pourquoi substituant ces valeurs dans les équations auxiliaires, on trouvera $xx - 3ax + aa = 0$, $x^3 - ax^2 + 2aax - a^3 = 0$, qui multipliées l'une par l'autre rendent la proposée.

Soit encore l'équation $x^6 - 13ax^5 + 45a^2 x^4 - 71a^3 x^3 + 57a^4 x^2 - 16a^5 x + 2a^6 = 0$, qu'on propose de résoudre en deux, l'une du second, l'autre du quatriéme degré.

Je prends les deux équations auxiliaires $xx + yx + u = 0$, $x^4 + px^3 + tx^2 + sx + z = 0$, qui étant multipliées l'une par l'autre donnent

$$x^6 + px^5 + tx^4 + sx^3 + zx^2 + zyx + zu = 0$$
$$+ yx^5 + pyx^4 + tyx^3 + syx^2 + sux$$
$$+ ux^4 + pux^3 + tux^2.$$

Comparant celle-ci avec la proposée, j'ai les six équations $p + y = -13a$, $t + py + u = 45a^2$, $s + ty + pu = -71a^3$, $z + sy + tu = 57a^4$, $zy + su = -16a^5$, $zu = 2a^6$. Par la premiere on a $p = -13a - y$, par la derniere $z = \frac{2a^6}{u}$. La valeur de $p$ étant substituée dans la seconde, il vient $t = 45aa + 13ay + yy - u$. Mettant la valeur de $z$ dans la cinquiéme, on trouve $s = -\frac{2a^6 y}{uu} - \frac{16a^5}{u}$. En substituant ces valeurs trouvées dans la quatriéme, on aura

$$y^2 = \frac{-16a^5uy + 13au^3y + 2a^6u - 57a^4u^2 + 45a^2u^3 - u^4}{u^3 - 2a^6} = 0 \text{ (B)}.$$

Puisque $u$ doit diviser $2a^6$, & que les diviseurs quarrés les plus simples de cette quantité sont $\pm aa$, $\pm 2aa$, $\pm aa\sqrt{2}$, on peut supposer $u$ égal à quelqu'une de ces quantités. Or en prenant $aa$ ou $-aa$ pour $u$, on ne réussit pas; mais en faisant $u = 2aa$, l'équation B devient $y^2 + 15ay + 22aa = 0$; d'où l'on tire $y = -10 \cdot a$ & $y = -2a$ : la premiere racine est inutile, mais la seconde donne $p = -11a$, $t = 21a^2$, $s = -7a^3$, $z = a^4$. Ces valeurs étant substituées dans la troisieme équation, dont nous n'avons pas encore fait usage, la rendent identique, & donnent $-71a^3 = -71a^3$. Ainsi les équations auxiliaires dans lesquelles la proposée peut se réduire, sont $xx - 2ax + 2aa = 0$, & $x^4 - 11ax^3 + 21a^2x^2 - 7a^3x + a^4 = 0$.

On peut remarquer que si l'on se fût servi de la troisieme équation, au lieu d'employer la quatrieme, on auroit trouvé l'équation cubique $2y^3 + 26ay^2 + 81a^2y + 74a^3 = 0$, au lieu d'une équation du second degré qui est bien plus aisée à

réſoudre; ainſi le choix des équations qu'on emploie, peut diminuer la difficulté du calcul. Les racines de cette équation cubique ſont $y = -2a$, $y = -\frac{11a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{47}$, dont la premiere réuſſiroit; car elle donneroit des valeurs de $p$, $t$, &c. qui tendroient la quatriéme équation identique.

Si on avoit à réſoudre une équation du ſeptieme degré en deux autres, l'une du troiſieme, l'autre du quatrieme degré, il eſt viſible qu'il faudroit employer deux équations auxiliaires, l'une du troiſieme, l'autre du quatrieme degré, & en général pour réduire une équation de l'ordre $m$ en deux autres, l'une de l'ordre $m - n$, & l'autre de l'ordre $n$, il faut ſe ſervir de deux équations auxiliaires, dont l'une ſoit du degré $m - n$, & l'autre du degré $n$; mais il eſt aiſé de ſentir que la difficulté augmente à proportion que $m$ eſt plus grand, puiſqu'on a toujours un nombre $m$ d'indéterminées, dont on ne peut ſouvent trouver la valeur que par le moyen de pluſieurs équations très-compliquées.

Mais quoiqu'il y ait pluſieurs équations irréductibles par les méthodes connues, néanmoins toutes les fois que la propoſée eſt *convertible*, elle peut ſe décompoſer en pluſieurs du ſecond degré. J'appelle équation convertible une équation de degré pair, dont l'expoſant ſoit $m$ (nombre pair) dans le premier terme qui doit être $x^m$ ſans autre coefficient que l'unité, le dernier terme étant une conſtante que je nomme $a^m$. Chaque terme placé entre le dernier & celui du milieu, & diviſé par un facteur convenable de $a^m$, doit avoir le même ſigne & le même coefficient que le terme correſpondant placé entre celui du milieu & le premier. Ainſi les équations $x^4 + bx^3 + ccx^2 + a^2bx + a^4 = 0$, $x^6 - bx^5 + c^3x^3 - a^4bx + a^6 = 0$ ſont convertibles. Car en diviſant l'avant-dernier terme de la premiere par le facteur $a^2$ de $a^4$, il vient $+bx$ qui a le même ſigne & le même coefficient que le ſecond terme, & en diviſant (dans la ſeconde équation) le terme $-a^4bx$ par $a^4$, facteur de $a^6$, il vient $-bx$, qui a le même ſigne & le même coefficient que le terme correſpondant $-bx^5$.

Pour réſoudre ces ſortes d'équations, on prendra une formule du ſecond degré $xx + nx + a^2 = 0$, dans laquelle $n$ eſt une quantité qu'on doit déterminer; on formera enſuite une équation convertible d'un degré inférieur de deux unités; de ma-

niere que ſon premier terme ſoit $x^{m-2}$ & ſon dernier terme $= a^{m-2}$, & dont les coefficiens des autres termes ſoient indéterminés. Après avoir multiplié ces deux équations l'une par l'autre, on comparera les termes du produit avec ceux de la propoſée juſqu'au terme du milieu inclusivement; car la comparaiſon des autres donne les mêmes équations que les premiers. Ayant chaſſé toutes les indéterminées, excepté $m$, il en réſultera une équation entre $m$ & des conſtantes; & les valeurs de $m$ qu'on en tirera, étant ſubſtituées dans le trinome $xx + mx + aa = o$, donneront les équations du ſecond degré, dans leſquelles la propoſée pourra ſe réſoudre.

EXEMPLE I. Soit l'équation convertible $x^4 + 2bx^3 + 2aabx + a^4 = o$, je forme l'équation convertible inférieure de deux degrés, c'eſt-à-dire, $xx + hx + aa = o$, que je multiplie par le trinome $xx + mx + aa = o$, afin d'avoir l'équation convertible

$$x^4 + hx^3 + 2a^2x^2 + a^2mx + a^4 = o.$$
$$+ mx^3 + mhx^2 + a^2hx$$

La comparaiſon des termes donne les deux équations $m + h = 2b$, $2aa + mh = o$. Subſtituant dans la ſeconde la valeur de $h$ priſe dans la premiere, il vient $2aa + 2bm - mm = o$, ou $mm - 2bm = 2aa$, dont les racines ſont $m = b \pm \sqrt{(2aa + bb)}$. Subſtituant ces valeurs dans le trinome, on trouve les équations $xx + bx + x\sqrt{(2aa + bb)} + aa = o$, $xx + bx - x\sqrt{(2aa + bb)} + aa = o$, qui ſont les facteurs de la propoſée.

EXEMPLE II. Soit l'équation $x^6 + a^6 = o$. Je forme l'équation convertible du quatriéme degré $x^4 + px^3 + tx^2 + a^2px + a^4 = o$, qui étant multipliée par le trinome $xx + mx + aa = o$, donne

$$x^6 + px^5 + tx^4 + a^2px^3 + a^4x^2 + a^4mx + a^6 = o$$
$$+ mx^5 + mpx^4 + mtx^3 + a^2mpx^2 + a^4px$$
$$+ a^2x^4 + a^2px^3 + a^2tx^2$$

Ayant comparé le ſecond, le troiſieme & le quatrieme termes de celle-ci avec les correſpondans de la propoſée, je trouve les trois équations $m + p = o$, $t + mp + a^2 = o$, $2a^2p$

$+ mp = 0$ Par la premiere $p = -m$, cette valeur étant ſubſtituée dans les deux autres, il vient $t - mm + aa = 0$, $-\frac{1}{2}am + mt = 0$. Par la premiere de celles-ci, $t = mm - aa$; donc, en ſubſtituant dans la derniere $m^3 - \frac{3}{4}a^2m = 0$ qui donne trois valeurs de $m$, ſavoir, $m = 0$, $m = a\sqrt{3}$, $m = -a\sqrt{3}$. Ces valeurs miſes dans le trinôme général $xx + mx + aa = 0$, donnent les équations du ſecond degré dans leſquelles on peut réſoudre la propoſée, c'eſt-à-dire, $xx + aa = 0$, $xx + ax\sqrt{3} + aa = 0$, $xx - ax\sqrt{3} + aa = 0$.

84. Lorſque les racines de l'équation ne ſont pas commenſurables, on ne peut pas les trouver par la méthode des diviſeurs; mais on peut au moins les avoir par approximation. Pour cela nous ſuppoſerons qu'on ait déja une valeur de la racine approchée ſeulement juſqu'à ſa dixiéme partie près. Voyons donc comment on peut parvenir à cette premiere approximation. Soit l'équation $x^2 - 10x + 22 = 0$; je ſubſtitue dans cette équation à la place de $x$ pluſieurs nombres tant poſitifs que négatifs, juſqu'à ce que deux ſubſtitutions conſécutives me donnent deux réſultats de ſigne contraire. Lorſque j'en ai rencontré deux de cette nature, j'en conclus que la valeur de $x$ eſt entre les deux nombres qui ont donné ces réſultats. Si dans l'équation propoſée je ſubſtitue $-1$, $-2$, $-3$, &c. à la place de $x$, je trouve toujours des réſultats poſitifs. De même les réſultats que donnent les nombres $1$, $2$, $3$, ſont encore poſitifs; mais en ſubſtituant $4$ à la place de $x$, j'ai un réſultat négatif. Ainſi une des racines eſt entre les nombres $3$ & $4$, qui different de plus de la dixiéme partie de l'un d'entre eux. Je prends la moitié de leur ſomme, & ſuppoſant $x = 3 + \frac{1}{2}$, je trouve pour réſultat une quantité négative; donc la racine eſt entre $3$ & $3 + \frac{1}{2}$. Prenant la moitié de leur ſomme $3 + \frac{1}{4}$ pour $x$,

l'équation se réduit à $\frac{1}{16}$, quantité positive ; donc cette racine est entre $3+\frac{1}{4}$ & $3+\frac{1}{2}$, & ces deux nombres différant de $\frac{1}{4}$, quantité plus petite que la dixiéme partie de l'un d'entre eux, je prends la moitié de leur somme $3+\frac{1}{8}$, & je suppose $x=3+\frac{1}{8}+d$, ou $x=3\cdot 3+d$ (en prenant en décimales approchées la valeur de la fraction). Substituant cette valeur de $x$ dans l'équation, & négligeant le quarré de $d$ (parce que $d$ étant fort petit, son quarré doit l'être davantage), j'ai $-0\cdot 11-3\cdot 4d=0$, ou $d=0\cdot\frac{11}{-3\cdot 4}=-0\cdot 032$, en ne poussant la division que jusqu'à deux chiffres significatifs seulement. En général on ne la pousse que jusqu'à autant de chiffres significatifs, y compris le premier qu'on trouve, qu'il y a de places entre celui-ci & le premier chiffre de la valeur approchée de $x$. Ici il y a deux places entre 3, qui est le premier chiffre significatif du quotient, & 3, premier chiffre de la valeur approchée de $x$ ; donc on a la valeur approchée de $x$ en faisant $x=3\cdot 3-0\cdot 032=3\cdot 268$. Si l'on vouloit approcher davantage de la véritable valeur de $x$, on supposeroit $x=3\cdot 268+d$, & en s'y prenant comme nous venons de le faire, on auroit une valeur bien plus approchée de $x$, & ainsi de suite. Si l'on veut avoir l'autre racine de l'équation, on divisera cette équation par $x-3\cdot 268$, le quotient fera connoître l'autre racine. Si le quotient étoit du second degré, on pourroit trouver les racines résultantes par la méthode du second degré. Mais on s'y prendroit comme nous venons de le faire, si le quotient étoit d'un degré plus élevé, en négligeant toujours les puissances de $d$ au-dessus du premier degré.

Si l'on avoit l'équation $x^3-12x-14=0$,

dont une des racines approchées eſt $3 \cdot 925$, on la diviſeroit par $x - 3 \cdot 925 = 0$, le quotient $x^2 + 3 \cdot 925x + 3 \cdot 4056 = 0$ (il y a un reſte $0 \cdot 633$ qu'on peut négliger), contiendroit les autres racines qui ſont, l'une $-2 \cdot 6225$, & l'autre $-1 \cdot 3025$. On les auroit auſſi trouvées en cherchant dans la propoſée les limites entre leſquelles ces racines étoient contenues, comme on a fait pour la premiere racine.

REMARQUE. La méthode que nous venons d'expoſer, ſuppoſe qu'on puiſſe trouver deux nombres qui, ſubſtitués à la place de $x$, donnent deux réſultats de ſigne contraire, & que la racine ſe trouve entre ces deux réſultats. Or il eſt facile de voir que cela eſt poſſible. Car ſoit la plus petite valeur de $x = a$, celle qui eſt immédiatement plus grande $= d$. Dans ce cas $x - a$ & $x - d$ ſont des facteurs de l'équation propoſée. Si au lieu de $x$ on ſubſtitue un nombre plus petit que $a$, le facteur $x - a$ deviendra négatif, & poſitif, ſi on ſubſtitue un nombre plus grand que $a$ (en ſuppoſant ce nombre plus petit cependant que $d$). Le produit des autres facteurs ne changeant point de ſigne, il eſt clair que le changement de ſigne du facteur $x - a$, occaſionnera un changement de ſigne dans le produit total. On démontreroit la même choſe ſi le plus petit facteur étoit $x + a$, en ſubſtituant des nombres négatifs à la place de $x$.

AUTRE METHODE. Ayant trouvé par la méthode précédente, ou de quelqu'autre maniere, deux limites qui ne different entr'elles que de l'unité, on ſuppoſera que la racine cherchée eſt égale à la plus grande limite moins une quantité indéterminée, ou à la moindre limite plus une quantité indéterminée. On ſubſtituera cette valeur dans l'équation donnée, & négligeant les termes du réſultat, où l'indéterminée eſt au-

deſſus du premier degré, on tirera de la comparaiſon des autres termes la valeur de l'indéterminée, ce qu'on réitérera, juſqu'à ce qu'on ait trouvé une racine aſſez approchée.

Soit, *par exemple*, l'équation $x^3 - 15x + 10 = 0$. Suppoſant $x$ ſucceſſivement égal à 1, 2, 3, on trouve des réſultats négatifs dont le dernier eſt $-8$; mais en ſuppoſant $x = 4$, on trouve le réſultat poſitif $+14$. Ainſi il eſt évident qu'une des racines de la propoſée eſt entre 3 & 4. Je ſuppoſe donc $x = 3 + d$, pour avoir

$$\begin{aligned} x^3 &= 27 + 27d + 9d^2 + d^3 \\ -15x &= -45 - 15d \\ +10 &= \quad +10 \end{aligned}$$

C'eſt pourquoi en écrivant l'équation dans un ordre renverſé, il viendra $0 = -8 + 12d + 9d^2 + d^3$ (A); mais $d$ étant moindre que l'unité, $d^2$ & $d^3$ ſont encore beaucoup moindres; négligeant donc les deux derniers termes de cette équation, il vient $0 = -8 + 12d$, ou $12d = 8$, & $d = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0 \cdot 6$ à-peu-près, & par conſéquent $x = 3 \cdot 6$. Pour avoir une valeur plus exacte, on ſuppoſera $x = 3 \cdot 6 + p$, ce qui donnera la transformée $0 = 2 \cdot 656 + 23 \cdot 88p + 10 \cdot 8p + p^3$. D'où en négligeant les deux derniers termes pour la même raiſon que ci deſſus, on tirera $23 \cdot 88p = -2 \cdot 656$, ou $p = \frac{-2 \cdot 656}{23 \cdot 88} = -0 \cdot 111$; & ajoutant cette fraction à la premiere valeur trouvée, on aura $x = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 111 = 3 \cdot 489$, racine plus approchée que la premiere.

On peut encore faire ces approximations d'une autre maniere, en ſe contentant de corriger la valeur de la premiere indéterminée, ſans remonter à la propoſée. *Par exemple*, dans l'équation ci deſſus, après avoir trouvé $d = 0 \cdot 6$, je corrige cette valeur de $d$ en ſuppoſant $d = 0 \cdot 6 + p$, & je ſubſtitue $0 \cdot 6 + p$ à la place de $d$ dans l'équation A, d'où j'ai tiré cette valeur de $d^3$, pour avoir $0 = +2 \cdot 656 + 23 \cdot 88p + 10 \cdot 8p^2 + p^3$ (B); d'où en négligeant les deux derniers termes, & opérant comme ci-devant, on tire $p = -0 \cdot 111$, & par conſéquent $x = 3 \cdot 489$. Pour approcher davantage, on ſuppoſeroit $p = -0 \cdot 111 + t$; & ſubſtituant cette valeur dans l'équation B, on auroit la valeur de $t$, & ainſi de ſuite.

Si l'équation étoit littérale, on en trouveroit les racines approchées par la même méthode, pourvu qu'on pût ſubſtituer des nombres exacts, ou approchés à la place des lettres. Si, *par exemple*, dans l'équation $x^3 - afx + ab = 0$, on ſait que les trois quantités $a$, $f$, $b$ ſont entr'elles comme les nombres 5, 3, 2, on pourra leur ſubſtituer ces nombres, & changer la propoſée en $x^3 - 15x + 10 = 0$; & ayant trouvé, comme on vient de le faire, qu'une des valeurs approchées de $x$ eſt $3 \cdot 489$, on diroit qu'une racine approchée de la propoſée eſt égale à cette quantité, l'unité étant la cinquieme partie de $a$, ou le tiers de $f$, ou la moitié de $b$.

AUTRE METHODE. Pour faire comprendre cette autre méthode très-élégante, ſoit l'équation $o = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4$ &c. Il eſt viſible que ſi $y$ eſt une fraction fort petite, & que D & E ne ſurpaſſent pas de beaucoup les quantités A, B, C, les deux derniers termes ſeront extrêmement petits par rapport aux premiers, & l'on pourra changer l'équation en quelqu'une des ſuivantes

$$o = A + By$$
$$o = A + By + Cy^2$$
$$o = A + By + Cy^2 + Dy^3$$

Dans leſquelles la valeur de $y$ différera fort peu de la véritable. La premiere équation donne $y = -\frac{A}{B}$, la ſeconde peut ſe réſoudre facilement par la méthode du ſecond degré. Mais elle peut ſans erreur ſenſible être abbaiſſée au premier degré, en ſubſtituant dans ſon dernier terme la valeur de $y$, (& non pas de $y^2$) priſe de l'équation $y = -\frac{A}{B}$, ce qui donnera $o = A + By - \frac{A}{B}Cy$, ou $o = AB + BBy - ACy$, d'où l'on tire $y = \frac{AB}{AC - BB}$.

Pour faire connoître l'utilité & l'uſage de cette formule, ſoit l'équation $x^3 - 10x^2 - 130x + 850 = 0$, dont on trouvera facilement qu'une des racines approchées eſt $5 \cdot 5$. Suppoſons que la véritable racine eſt $5 \cdot 5 + y$, & ſubſti-

tuons cette valeur au lieu de $x$ dans la propoſée, elle deviendra, en négligeant les termes dans leſquels $y$ eſt au-deſſus du ſecond degré, $o = -1 \cdot 125 - 150 \cdot 75\, y + 6 \cdot 5y^2$. Comparant cette équation avec l'équation $o = A + By + Cy^2$, il vient $A = -1 \cdot 125$, $B = -150 \cdot 75y$, $C = 6 \cdot 5$; & $y = \frac{AB}{AC - BB} = \frac{169 \cdot 59171}{-227312 \cdot 875} = -0 \cdot 000713$. Ainſi $x = 5 \cdot 5 + y$ ſera $= 5 \cdot 5 - 0 \cdot 000713 = 5 \cdot 499287$ à très-peu près. Si on vouloit une racine plus exacte, on la trouveroit facilement, en ſuppoſant $x = 5 \cdot 499287 + y$, & répétant le même calcul.

Cette méthode eſt très-utile pour trouver la racine $3^e$, $4^e$, $5^e$, &c. d'un nombre qui n'en a pas d'exacte. Soit, *par exemple*, le nombre 30 dont on demande la racine cubique. La plus grande racine cubique de 30 en nombres entiers étant $= 3$, je ſuppoſe la véritable racine $= 3 + y$. Donc $30 = 27 + 27y + 9y^2$, en négligeant le dernier terme $y^3$; donc $o = -3 + 27y + 9y^2$, ce qui donne $A = -3$, $B = 27$, $C = 9$, & $y = \frac{AB}{AC - BB} = \frac{81}{756} = 0 \cdot 1071$; & la racine approchée de 30 ſera $= 3 \cdot 1071$. Si on vouloit avoir la racine quarrée de 2, il ſeroit bon de chercher une racine approchée, en prenant, *par exemple*, $\frac{7}{5}$ pour cette racine; ſuppoſant enſuite que la véritable racine eſt $\frac{7}{5} + y$, l'on aura 2 ou $\frac{50}{25} = \frac{49}{25} + \frac{14}{5}y + y^2$, ou $o = -1 + 70y + 25y^2$; d'où l'on tire $A = -1$, $B = 70$, $C = 25$, $y = \frac{AB}{AC - BB} = \frac{-70}{-4925} = \frac{70}{4925} = 0 \cdot 014213$ à-peu-près; donc (à cauſe de $\frac{7}{5} = 1 \cdot 4$) $\sqrt{2} = 1 \cdot 414213$ à très-peu près.

85. Si l'équation avoit toutes ſes racines égales deux à deux, comme ſi les facteurs d'une équation étoient $x-d, x-d, x-p, x-p$; de maniere qu'on eût $(x-d)^2 \times (x-p)^2 = o$, elle ne pourroit changer de ſigne quelque valeur qu'on mît pour $x$ : car que $x - a$ ſoit poſitif ou négatif, ſon quarré ſera néceſſairement poſitif. De même ſi les racines d'une équation ſont imaginaires deux à deux, quel-

ques nombres qu'on ſubſtitue à la place de $x$, on ne trouvera jamais deux réſultats de ſigne contraire, autrement la valeur de $x$ ſe trouveroit entre ces deux nombres, & par conſéquent ne ſeroit pas imaginaire. Il en ſeroit de même ſi les racines étoient en partie égales deux à deux & en partie imaginaires.

Il nous reſte donc à donner la méthode d'avoir les racines imaginaires & les racines égales d'une équation. A l'égard des premieres nous avons déja dit (72) qu'elles ſe trouvent toujours en nombre pair, & que ſi l'une eſt repréſentée par $a + b\sqrt{(-1)}$, l'autre ſera $= a - b\sqrt{-1}$, & par conſéquent les deux facteurs correſpondants ſeront $x - a - b\sqrt{(-1)}$, $x - a + b\sqrt{(-1)}$, dont le produit $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ ſera un facteur rationel du ſecond degré, qu'on trouvera par la méthode déja expliquée (81); après quoi, par la méthode du ſecond degré, on trouvera les racines de ce facteur ou de ces facteurs s'il y en a pluſieurs. *Par exemple*, étant donnée l'équation $x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0$, je trouve qu'elle a un facteur $x^2 + 2x + 10$ du ſecond degré & un facteur $x - 1$ du premier, lequel donne une des racines $= 1$. Réſolvant l'équation $x^2 + 2x + 10 = 0$, on trouve $x = -1 \pm \sqrt{(-9)}$; donc les deux racines que donnent le facteur du ſecond degré ſont imaginaires.

Pour avoir les racines égales d'une équation, multipliez chaque terme par l'expoſant de $x$ dans ce même terme & diminuez cet expoſant d'une unité, vous aurez une nouvelle équation, dont le plus grand commun diviſeur, avec la propoſée, contiendra les racines égales de celle-ci, mais élevées à une puiſſance moindre d'une unité: c'eſt-à-dire,

*par exemple*, que s'il y avoit trois racines égales dans la proposée, il n'y en aura que deux dans le commun diviseur. En effet $(x+a)^m = x^m + m\,x^{m-1}\,a +$ &c. $\cdots + a^m$. Donc multipliant chaque terme du second membre de cette équation par l'exposant correspondant de $x$ (en faisant attention que le dernier terme est censé multiplié par $x^0 = 1$, & qu'ainsi on doit multiplier ce terme par 0), & diminuant l'exposant de $x$ d'une unité, on aura $m\,x^{m-1} + m \times (m-1)\,x^{m-2}\,a$, &c. c'est-à-dire, $m\,(x^{m-1} + (m-1)\,x^{m-2}\,a + (m-1) \times \frac{m-2}{2}\,x^{m-3}\,a^2)$, ou $m\,(x+a)^{m-1}$. Mais le plus grand commun diviseur de cette quantité & de $(x+a)^m$, est $(x+a)^{m-1}$ qui contient une des racines égales de moins que $(x+a)^m = 0$. Si l'on avoit l'équation $(x+a)^m \times (x+d)^p = 0$, en développant les deux facteurs $(x+a)^m$, $(x+d)^p$ & multipliant les deux résultats l'un par l'autre, on trouveroit qu'en multipliant chaque terme du résultat par l'exposant de $x$, & diminuant cet exposant d'une unité, on trouveroit, dis-je, la quantité $m\,(x+a)^{m-1} \times (x+d)^p + p\,(x+a)^m \times (x+d)^{p-1}$, dont le commun diviseur, avec le premier membre de l'équation proposée, est $(x+a)^{m-1} \times (x+d)^{p-1}$, & ainsi de suite quel que soit le nombre des facteurs.

Soit, *par exemple*, l'équation $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$; pour en trouver les racines égales, je multiplie le premier terme par 3, le second par 2, le troisiéme par 1 & le dernier par 0, parce que celui-ci est censé multiplié par $x^0 = 1$, & j'ai en diminuant l'exposant de $x$ d'une unité, $3x^2 - 12x + 12 = 0$. Le plus grand commun diviseur de

ces deux quantités eſt, par la méthode ci-deſſus (31), $x^2 - 4x + 4 = 0$, qui doit contenir une des racines égales de moins que la propoſée. Pour trouver cette racine égale, je multiplie les termes de cette derniere équation par les expoſants correſpondants de $x$, ayant ſoin de diminuer d'une unité les mêmes expoſants; ce qui me donne $2x - 4 = 0$, dont le diviſeur commun avec $x^2 - 4x + 4$ eſt $x - 2$, qui contient encore une des racines égales de moins; donc diviſant le quotient par $x - 2$, le réſultat $x - 2$ fait voir que l'équation a deux racines chacune $= 2$. Diviſant l'équation par $(x - 2)^2$, le quotient $x - 2$ indique que les trois racines de l'équation ſont chacune $= 2$. On auroit trouvé de même ces racines en cherchant les diviſeurs rationels du premier degré de l'équation propoſée.

AUTRE METHODE. Soit l'équation $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$. Pour ſavoir ſi elle a deux racines égales, & quelles ſont ces racines, je ſuppoſe un diviſeur du ſecond degré $x^2 - 2fx + f^2 = 0$ qui contienne ces racines. Multipliant cette équation générale du ſecond degré par une autre $x - g = 0$ qui puiſſe donner un produit du même degré que la propoſée, je trouve $x^3 - 2fx^2 + f^2x - ffg = 0$
$- gx^2 + 2fgx$

Comparant celle-ci avec la propoſée, je vois que ces équations ne peuvent être égales comme elles doivent l'être, à moins que les mêmes puiſſances de l'inconnue n'aient les mêmes coefficiens, & que le dernier terme ne ſoit le même dans les deux équations. Donc je dois avoir $-2f - g = 3$. Maintenant, ſi par le moyen de ces équations je puis trouver la valeur de $f$, elle ſera une des racines égales de la propoſée, ſi je ne trouve aucune valeur pour $f$, la propoſée ne peut avoir des racines égales.

$f^2 + 2fg = -9$.
$-f^2 g = 5$.

La premiere de ces équations donne $g = -2f - 3$. Subſtituant cette valeur dans la ſeconde, j'ai $f^2 - 4f^2 - 6f$
$=$

$= -9$, ou $3f^2 + 6f = 9$, ou $f^2 + 2f = 3$. Mais la troiſieme équation devient (par la ſubſtitution de la valeur de $g$) $2f^3 + 3f^2 = 5$ (B.) Si on multiplie l'équation $f^2 + 2f = 3$ par $2f$, pour avoir $2f^3 + 4f^2 = 6f$, & qu'on en retranche l'équation B le premier membre du premier membre, le ſecond du ſecond, il viendra $f^2 = 6f - 5$. Retranchant celle-ci de $f^2 + 2f = 3$, on trouvera $2f = -6f + 8$, ou $8f = 8$, ou $f = 1$. Il y a donc dans la propoſée deux racines égales à l'unité, & déſignées par les équations ſimples $x - 1 = 0$, $x - 1 = 0$. La troiſieme racine eſt $x = -5$, elle réſulte de l'équation ſimple $x + 5 = 0$.

Soit encore l'équation $x^4 - 4x + 3 = 0$, dont on demande les racines égales, en ſuppoſant qu'elle en ait de telles. Je prends l'équation $xx - 2fx + ff = 0$, qui doit renfermer les racines cherchées. Je la multiplie par une autre équation générale du ſecond degré $xx - px + q = 0$, afin d'avoir l'équation A, du même degré que la propoſée

$$x^4 - 2fx^3 + f^2x^2 - f^2px + fq = 0 \text{ (A)}.$$
$$- px^3 + 2fpx^2$$
$$+ qx^2 - 2fqx$$

Si l'on ſuppoſe maintenant que l'équation A eſt la même que la propoſée dans laquelle le ſecond & le troiſieme termes manquent, nous aurons les équations qu'on voit ici.

I. $2f + p = 0$ III. $f^2p + 2fq = 4$
II. $f^2 + 2fp + q = 0$ IV. $f^2q = 3$.

La premiere de ces équations donne $p = -2f$. Cette valeur de $p$ étant ſubſtituée dans la ſeconde, on trouve $q = 3f^2$. De ces valeurs de $p$ & de $q$ ſubſtituées dans la troiſieme, on tire $-2f^3 + 6f^3 = 4$, ou $4f^3 = 4$, ou $f^3 = 1$. Si la quatrieme équation ne s'accordoit pas avec celle-ci, on concluroit que la propoſée n'a pas des racines égales; mais en ſubſtituant la valeur de $q$, la quatrieme devient $3f^4 = 3$, ou $f^4 = 1$, qui donne $f = 1$, tandis que l'équation $f^3 = 1$ donne auſſi $f = 1$. La propoſée a donc deux racines égales à l'unité.

86. Avant de paſſer plus loin, nous allons donner la méthode de trouver les racines des quantités de cette forme $A + \sqrt{B}$, A déſignant une quantité rationelle. Soit $p + q$ la racine quar-

rée de la quantité propoſée ; donc le quarré de cette quantité ſera $p^2 + 2pq + q^2 = A + \sqrt{B}$. Il eſt évident que ſoit qu'on ſuppoſe $p$ un radical, auſſi-bien que $q$, ſoit qu'on ſuppoſe que $q$ eſt ſeulement radical, il eſt, dis-je, évident que $p^2 + q^2$ ſera une quantité rationelle $= A$, & que $2pq$ ſera un radical quarré $= \sqrt{B}$, quantité que nous ferons $= b$, pour plus de ſimplicité; donc $p = \frac{b}{2q}$; mais à cauſe de $p^2 + q^2 = A$, on a en ſubſtituant dans cette derniere équation la valeur de $p$, $\frac{b^2}{4q^2} + q^2 = A$, ou en multipliant par $q^2$ & tranſpoſant, $q^4 - Aq^2 = -\frac{b^2}{4}$. Enfin réſolvant cette derniere équation par la méthode du ſecond degré, il vient $q^2 = \frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}$; donc $q = \pm\sqrt{[\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}]}$. Subſtituant cette valeur de $q$ dans l'équation $p^2 + q^2 = A$ ou $p^2 = A - q^2$, on a $p = \pm\sqrt{(A - q^2)}$, ou $p = \pm\sqrt{[\frac{1}{2}A \mp \sqrt{(A^2 - b^2)}]}$. Donc la racine cherchée $p + q = \pm\sqrt{[\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}]} \pm \sqrt{[\frac{1}{2}A \mp \sqrt{(A^2 - b^2)}]}$, ou $\pm\sqrt{[\frac{1}{2}A + \sqrt{(A^2 - b^2)}]} \pm \sqrt{[\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}]}$ : car cette expreſſion revient au même que celle qu'on trouveroit en prenant le ſigne ſupérieur de l'un & de l'autre radical $\sqrt{(A^2 - b^2)}$, ſeulement alors $p$ ſe changeroit en $q$ & réciproquement. Quant aux ſignes de $q$ & de $p$, il eſt aiſé de voir que ſi A & $b$ ont le ſigne $+$, $p$ & $q$ doivent être où tous les deux poſitifs ou tous les deux négatifs *. Mais ils doivent avoir

* A & $b$ ne peuvent être à la fois négatifs, parce que la racine cherchée ſeroit imaginaire.

des signes contraires si $b$ est négatif ; car $p+q$, ou $-p-q$ sont les racines de $p^2+2pq+q^2$, tandis que $p-q$, ou $q-p$ sont celles de $A-b=p^2-2pq+q^2$. Et de-là il suit que toutes les fois que la quantité $A+b$ aura une racine quarrée, $\sqrt{(A-b)}\times\sqrt{(A+b)}=\sqrt{(A^2-b^2)}=p^2-q^2$ sera une quantité commensurable, & qu'ainsi $p$ & $q$ seront tout au plus des radicaux simples.

Soit la quantité $d^2+c-2d\sqrt{c}$ dont on demande la racine. Faisant $A=d^2+c$, $b=-2d\sqrt{c}$, on a $\sqrt{(A^2-b^2)}=d^2-c$, $\sqrt{[\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-b^2)}]}=d$ & $\sqrt{[\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-b^2)}]}=\sqrt{c}$. Donc $p-q=d-\sqrt{c}$, racine cherchée. On donne le signe — à la quantité $q$, à cause du signe — du radical de la quantité proposée.

Soit maintenant proposé de trouver la racine de la quantité $5+2\sqrt{6}$. Puisque $A=5$, $b=2\sqrt{6}$, l'on aura $\sqrt{(A^2-b^2)}=1$, & la premiere partie de la formule deviendra $\sqrt{3}$, & la seconde $\sqrt{2}$ ; donc la racine cherchée est $\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$. On trouvera par la même méthode que la racine de $11-6\sqrt{2}=3-\sqrt{2}$. Mais si l'on vouloit avoir la racine de $1+\sqrt{3}$, on trouveroit $\sqrt{(A^2-b^2)}=\sqrt{-2}$, quantité imaginaire. Alors prenant la racine approchée de 3, & lui ajoutant 1, je prendrois ensuite la racine de cette somme, que j'aurois du moins par approximation.

Cherchons maintenant la racine cubique de la quantité $a+\sqrt{d}$, ou de $a+b$, $b$ étant un radical quarré & $a$ une quantité rationelle ; mais auparavant établissons le Lemme suivant.

LEMME. *Dans un Binome quelconque* $a+b$ *élevé à la puissance* $m$, *la différence du quarré de*

*la ſomme des termes qui occupent des rangs impairs au quarré de la ſomme des termes des rangs pairs eſt* $= (a^2 - b^2)^m$. On peut le vérifier aiſément.

Soit maintenant la racine cherchée $= (p + q) \times \sqrt[3]{x}$, $p$ étant rationel, $q$ un radical quarré, & $x$ un radical cube; car il eſt aiſé de voir que $p$ ne peut être un radical, parce que le cube de cette racine contiendroit plus d'un radical. Mais auſſi on voit que la racine peut contenir un radical cube qui affecteroit ſes deux termes. En élevant au cube la racine propoſée, on trouvera que la ſomme des termes de rang impair eſt rationelle, & par conſéquent $= a$, & celle des termes de rang pair irrationelle, & par conſéquent $= b$; donc retranchant le quarré de la ſeconde ſomme de celui de la premiere, on aura $a^2 - b^2 = p^6 x^2 - 3 p^4 x^2 q^2 + 3 p^2 x^2 q^4 - x^2 q^6$, ou en multipliant le tout par $x$ prenant la racine cube des deux membres, & diviſant enſuite par $x$, $p^2 - q^2 = \frac{\sqrt[3]{(a^2 - b^2) x}}{x}$; donc pour que $p^2 - q^2$ ſoit rationel, & par conſéquent pour que $a + \sqrt{d}$ ait une racine cubique, il faut que $\sqrt[3]{(a^2 - b^2) x}$ ſoit un cube exact, ce que l'on peut obtenir en prenant pour $x$ une quantité convenable; mais ſi $a^2 - b^2$ ſe trouve un cube parfait, on fera $x = 1$. Suppoſons $\frac{\sqrt[3]{(a^2 - b^2) x}}{x} = f$, nous aurons $p^2 - q^2 = f$, & $q^2 = p^2 - f$. Subſtituant cette valeur dans l'équation $a = p^3 x + 3 p q^2 x$ (qu'on trouve en égalant la ſomme des termes impairs du cube de la racine cherchée à la quantité rationelle $a$), il viendra en réduiſant

& tranſpoſant, $4p^3x - 3fpx - a = 0$. Afin donc que $p$ & $q^2$ ſoient rationels, il faut que la valeur de $p$ tirée de cette équation (en regardant $p$ comme l'inconnue), ſoit rationelle; on cherchera donc les diviſeurs commenſurables de cette équation, qui ne peut manquer d'en avoir ſi $p$ & $q^2$ peuvent être rationels, c'eſt-à-dire, ſi la quantité propoſée a une racine cubique.

Soit la quantité $20 + 12\sqrt{3}$, dont on demande la racine cubique. Egalant 20 à $a$, & $12\sqrt{3}$ à $b$, nous aurons $a^2 = 400$, $b^2 = 432$, $a^2 - b^2 = -32$ qui n'eſt pas un cube; mais ſi je multiplie cette quantité par $2 = x$, il viendra $-64$, cube de $-4$. J'aurai donc $\frac{\sqrt[3]{(a^2-b^2)x}}{x} = \frac{\sqrt[3]{(-64)}}{2} = -\frac{4}{2} = -2 = f$, & l'équation $4p^3x - 3fpx^2 - a = 0$ devient $8p^3 + 12p - 20 = 0$, ou en diviſant par 8 & réduiſant, $p^3 + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2} = 0$. Otant les fractions en ſuppoſant $p = \frac{y}{2}$ & réduiſant, l'on a $y^3 + 6y - 20 = 0$, dont le ſeul diviſeur rationel eſt $y - 2$ & le quotient $y^2 + 2y + 10 = 0$, dont les racines ſont imaginaires. Le diviſeur rationel donne $y = 2$ & par conſéquent $p = \frac{y}{2} = 1$, & parce que $f = -2$, l'équation $q^2 = p^2 - f$, devient $q^2 = 1 + 2 = 3$ & $q = \sqrt{3}$, & puiſque $x = 2$, $(p+q)\sqrt[3]{x}$ ſera $= (1+\sqrt{3}) \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt{3}$.

Soit propoſée maintenant la quantité $2 + \sqrt{5}$, dont on demande la racine cube. Nous aurons $a = 2$, $b = \sqrt{5}$, $a^2 - b^2 = 4 - 5 = -1$, cube

de $-1$ ; donc $x = 1$ & $f = -1$ ; donc notre équation devient $4p^3 + 3p - 2 = 0$, & en supposant $p = \frac{y}{4}$, on trouve cette autre équation $y^3 + 12y - 32 = 0$, qui n'a qu'un seul diviseur rationel $y - 2 = 0$, les racines du quotient $y^2 + 2y + 16 = 0$ étant imaginaires ; donc $y = 2$ & $p = \frac{y}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ; donc $q^2 = p^2 - f = \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{4}$ ; donc $q = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ; donc $(p+q) \times \sqrt[3]{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. On trouvera de même que la racine cube de $20 + 14\sqrt{2}$ est $2 + \sqrt{2}$.

Si l'on demandoit la racine cinquiéme de la quantité $a + \sqrt{d} = a + b$, je supposerois $\sqrt[5]{(a+b)} = (p+q)\sqrt[5]{x}$, $p$ étant rationel & $q$ un radical du second degré ; car il est évident que $p$ ne peut être un radical, autrement la cinquiéme puissance de $(p+q)\sqrt[5]{x}$, contiendroit plus d'un radical ; mais on voit aussi que les deux parties de la racine peuvent être multipliées par un radical du cinquiéme degré qui ne doit plus se trouver dans $a + b$. Elevant à la puissance cinquiéme la racine supposée ; la somme des termes de rang impair sera $= a$, celle des termes de rang pair étant $= b$, la différence des quarrés de la premiere & de la seconde somme sera $a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b) = (p^2 - q^2)^5 \times x^2$. Multipliant par $x^3$ l'on a $(p^2 - q^2)^5 \times x^5 = x^3 (a^2 - b^2)$, ou en prenant la racine cinquiéme, $(p^2 - q^2)\, x = \sqrt[5]{(x^3 a^2 - x^3 b^2)}$, & enfin $p^2 - q^2 = \frac{\sqrt[5]{(a^2 - b^2)\, x^3}}{x} = f$. Lorsque $a^2 - b^2$ sera

une cinquiéme puiſſance parfaite, l'on ſuppoſera $x = 1$. Dans le cas contraire on multipliera $a^2 - b^2$ par un multiplicateur propre à rendre cette quantité une cinquiéme puiſſance parfaite, & l'on aura $f$ en diviſant $\sqrt[5]{(a^2 - b^2)x^3}$ par la racine cube du multiplicateur $x^3$. De l'équation $p^2 - q^2 = f$, on tire $q^2 = p^2 - f$ & $q = \sqrt{(p^2 - f)}$. On connoîtra donc $q$, auſſi-tôt qu'on connoîtra $f$ & $p$. A l'égard de cette derniere quantité, on la trouvera en égalant à $a$ la ſomme des termes rationels de la cinquiéme puiſſance de la racine ſuppoſée. De cette égalité, en ſubſtituant la valeur de $q^2$ priſe dans l'équation, $q^2 = p^2 - f$, on déduira l'équation $16p^5x - 20p^3fx + 5pf^2x - a = 0$. Cette équation, après les ſubſtitutions des valeurs de $x$ & de $f$, étant changée en une autre, dont le coefficient du premier terme ſoit 1, fera connoître $p$ en s'y prenant à-peu-près de la même maniere que nous venons de le voir pour les racines cubiques.

Pour avoir la racine ſeptiéme de la quantité $a + \sqrt{d} = a + b$; ſuppoſant cette racine $= (p + q) \times \sqrt[7]{x}$, élevant cette racine à la ſeptiéme puiſſance, égalant la ſomme des termes de rang impair à la quantité $a$, & celle des termes de rang pair à la quantité $b$, ôtant le quarré de la derniere ſomme de celui de la premiere, nous aurons $(p^2 - q^2)^7 \times x^2 = a^2 - b^2$, multipliant par $x^5$ prenant les racines ſeptiémes & diviſant enſuite par $x$, l'on a $p^2 - q^2 = \frac{\sqrt[7]{x^5(a^2 - b^2)}}{x} = f$; donc $p^2 - q^2 = f$, ou $q^2 = p^2 - f$. Il eſt évident que cette équation fera connoître $q$, auſſi

tôt qu'on connoîtra $f$ & $p$. On connoîtra $f$ en cherchant la valeur de $x$, ce qu'on fera à-peu-près comme nous l'avons expliqué pour les racines troiſiéme & cinquiéme. A l'égard de $p$, ſi l'on égale la ſomme des termes de rang impair de la puiſſance ſeptiéme de $(p+q)\sqrt[7]{x}$ à la quantité $a$, en ſe ſouvenant de ſubſtituer $p^2-f$ à la place de $q^2$, on en déduira l'équation $63p^7x - 112p^5fx + 56p^3f^2x - 7pf^3x - a = 0$, qui fera connoître la valeur de $p$ en cherchant les diviſeurs rationels de l'équation qu'on trouvera en transformant celle-ci en une autre, dont le premier terme ſoit ſans coefficient. On trouvera de même pour la racine onziéme de $a+\sqrt{d} = a+b$, l'équation $\frac{\sqrt[11]{x^9(a^2-b^2)}}{x} = p^2 - q^2 = f$, & l'on connoîtra $p$ par le moyen de l'équation $1024p^{11}x - 2816p^9fx + 2816p^7f^2x - 1232p^5f^3x + 220p^3f^4x - 11pf^5x - a = 0$. On peut voir maintenant comment il faut s'y prendre pour avoir les racines 13^e, 17^e &c. dont les expoſants ſont des nombres premiers. Mais ſi l'expoſant de la racine n'étoit pas un nombre premier, qu'il fût 15, *par exemple*, ou 9, on prendroit d'abord la racine cube, & enſuite la racine cinquiéme, s'il s'agiſſoit de la racine 15^e, ou ſeulement la racine cube du réſultat, s'il n'étoit queſtion que de la racine 9^e. Si le premier réſultat n'avoit point de racine 5^e, on ſeroit sûr que la quantité propoſée n'a point de racine 15^e. De même ſi le ſecond réſultat n'avoit point de racine cubique, la quantité propoſée ne peut avoir de racine 9^e.

Si la quantité propoſée eſt de cette forme $\sqrt{a+}$

$\sqrt{d}$, on la multipliera par $\sqrt{a}$, le produit ſera de la forme ci-deſſus; mais il faudra diviſer la racine du produit par la racine du multiplicateur.

Pour avoir la racine $m$ de $(\sqrt{a}+\sqrt{d})\sqrt[n]{c}$, on multipliera cette quantité par $\sqrt{a}$, & on la diviſera par $\sqrt[n]{c}$, & l'on aura la quantité $a+b$ dont on prendra la racine $m$; mais on diviſera le réſultat par $\sqrt[2m]{a}$ & on le multipliera par $\sqrt[mn]{c}$. A l'égard de $p$, il doit avoir le ſigne de $a$, & $q$ celui de $b$.

87. Qu'il s'agiſſe d'extraire la racine quarrée de la quantité $A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}$ qui renferme une partie rationelle & trois radicaux du ſecond degré. Je ſuppoſe que la racine cherchée eſt $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$. Elevant cette quantité au quarré, on aura $p+q+r+2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$; ainſi en égalant la partie rationelle à $A$, & les parties radicales aux parties radicales de la quantité propoſée, nous pourrons former les quatre équations ſuivantes: $p+q+r=A$, $2\sqrt{pq}=\sqrt{B}$, $2\sqrt{pr}=\sqrt{C}$, $2\sqrt{qr}=\sqrt{D}$. Par la ſeconde $q=\frac{B}{4p}$, par la troiſieme $r=\frac{C}{4p}$, & par la quatriéme $r=\frac{D}{4q}$. Subſtituant dans la premiere les valeurs de $q$ & de $r$ données par la ſeconde & la troiſieme, il viendra $p+\frac{B}{4p}+\frac{C}{4p}=A$, ou $p^2+\frac{B}{4}+\frac{C}{4}=pA$, ou $pp-pA=\frac{-B-C}{4}$, ou $pp-pA+\frac{AA}{4}=\frac{AA-B-C}{4}$, $p-\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{(AA-B-C)}}{2}$; & enfin $p=\frac{A+\sqrt{(AA-B-C}}{2}$. Si $A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}$ eſt un quarré parfait, la quantité $\sqrt{(AA-B-C)}$ deviendra rationelle, parce que $AA-B-C=(p+q+r)^2-4pq-4pr=(p-q-r)^2$, ce qui donne $\sqrt{(AA-B-C)}=p-q-r$. Dès qu'on aura trouvé $p$, on aura $q$ par l'équation $q=\frac{B}{4p}$, & $r$ par

l'équation $r = \frac{C}{4p}$ ; mais, parce que $r$ eſt auſſi $= \frac{D}{4q}$, il eſt néceſſaire qu'après avoir déterminé $p, q, r$, on ait l'équation de condition $\frac{C}{4p} = \frac{D}{4q}$, afin que l'extraction de la racine ſoit poſſible.

Qu'on ſe propoſe d'extraire s'il eſt poſſible la racine quarrée de la quantité $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$. Faiſant $A = 10$, $B = 24$, $C = 40$, $D = 60$, nous trouverons $AA - B - C = 36$, & $p = \frac{A + \sqrt{(AA - B - C)}}{2} = 8$, $q = \frac{B}{4p} = \frac{1}{4}$, $r = \frac{C}{4p} = \frac{1}{4}$. D'un autre côté l'équation $\frac{C}{4p} = \frac{D}{4q}$, donne $5 = 80$, ce qui étant abſurde, on doit conclure que les nombres trouvés $p, q, r$ ne ſont pas les véritables. Faiſons une autre hypothèſe en ſuppoſant $A = 10$, $B = 40$, $D = 24$ & $C = 60$, nous aurons $AA - B - C = 0$, $p = \frac{A}{2} = 5$, $q = 2$ & $r = 3$. Alors $\frac{C}{4p} = 3 = \frac{D}{4q} = 3$ ; donc la racine quarrée de la quantité propoſée $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ eſt $= \pm (\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3})$.

On opérera ſemblablement pour les quantités de pareille nature, lorſque les racines quarrées devront contenir 4, 5, 6 ou un plus grand nombre de termes.

## *Des Equations du troiſiéme & du quatriéme degré.*

88. Soit une équation du troiſiéme degré $x^3 - 1 = 0$, cette équation étant diviſible par $x - 1 = 0$, & le quotient étant $x^2 + x + 1 = 0$, dont les racines ſont $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, l'on aura pour les trois racines cubiques de l'unité, $1$, $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$. On trouvera facilement que les quatre

racines de l'unité que fournit l'équation $x^4 - 1 = 0$, ſont $1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ : car l'équation $x^4 - 1 = 0$ eſt diviſible par $x^2 - 1 = 0$ & donne pour quotient $x^2 + 1 = 0$ ; or les racines de ces deux dernieres équations donnent les quatre racines ci-deſſus.

Cela poſé. Soit une équation du troiſiéme degré délivrée du ſecond terme ( ce qu'on peut toujours obtenir (74) ) $x^3 - 3ax - b = 0$. Suppoſons $x = m + n$ ; donc $x^3 = m^3 + 3mn(m+n) + n^3$, ou en ſubſtituant à la place de $m + n$ ſa valeur $x$ & tranſpoſant tout dans le premier membre, $x^3 - 3mnx - m^3 - n^3 = 0$. Comparant cette équation avec la propoſée terme à terme, l'on a $mn = a$, $m^3 + n^3 = b$. Mais l'équation $mn = a$, donne $n^3 = \frac{a^3}{m^3}$ ; donc en ſubſtituant cette valeur dans la derniere équation, $m^3 + \frac{a^3}{m^3} = b$. Multipliant par $m^3$ & tranſpoſant, $m^6 - bm^3 = -a^3$. Cette équation étant réſolue par la méthode du ſecond degré, donne $m^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^3\right)}$, & enfin $m = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$. Si dans l'équation $m^3 + n^3 = b$ au lieu de la valeur de $n$, on ſubſtitue celle de $m$ priſe de l'équation $mn = a$, on trouvera $n = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$ ; donc $x = m + n = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$

$+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$ *. De l'équation ci-dessus $m^3=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}-a^3\right)}$, on tire $m^3=1\times\left(\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)$; donc en prenant les racines cubiques de l'unité, & les multipliant par la valeur de $m$ on aura

$$m=1\times\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$$

$$m=\frac{-1+\sqrt{(-3)}}{2}\times\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$$

$$m=\frac{-1-\sqrt{(-3)}}{2}\times\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}.$$

Multipliant de même les valeurs de $n$ par les racines cubiques de l'unité; l'on aura les quantités qu'on voit ici :

$$n=1\times\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$$

$$n=\frac{-1+\sqrt{(-3)}}{2}\times\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$$

$$n=\frac{-1-\sqrt{(-3)}}{2}\times\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$$

* On donne le signe + à l'un des radicaux quarrés, & le signe — à l'autre, afin que le produit $mn$ soit $=a$ ou que $m^3\times n^3=a^3$, ce qui n'arriveroit pas si les deux radicaux quarrés avoient le même signe.

$$m+n=x=\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{4}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$$

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}\times\frac{[-1+\sqrt{(-3)}]}{2}$$

$$+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}\times\frac{[-1-\sqrt{(-3)}]}{2}$$

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{b}{4}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}\times\frac{[-1-\sqrt{(-3)}}{2}$$

$$+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}\times\frac{[-1+\sqrt{(-3)}]}{2}.$$

On n'a pas combiné d'autres valeurs de $m$ & de $n$, parce que leur produit $mn$ n'auroit pas donné $a$, ni $m^3\ n^3$ la quantité $a^3$.

De ces trois valeurs de $x$ la premiere eſt toujours réelle, mais les deux autres ſont imaginaires ſi $\frac{b^2}{4} > a^3$; elles ſont réelles ſi $\frac{b^2}{4}=a^3$, ou ſi $\frac{b^2}{4}<a^3$, c'eſt-à-dire, ſi la quantité $\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}-a^3\right)}$ eſt ou o, ou imaginaire. Pour le démontrer ſoit $\frac{b}{2}=p$, $\frac{b^2}{4}-a^3 = q$, quantité négative toutes les fois que $a^3 > \frac{b^2}{4}$.

Par la formule générale du binome de Newton *, $m = \sqrt[3]{(p + \sqrt{q})}$ ſera $p^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} p^{\frac{-2}{3}} \sqrt{q} - \frac{1}{9} p^{\frac{-5}{3}} q + \frac{1}{81} p^{\frac{-8}{3}} q \sqrt{q}$ &c., & $n = \sqrt[3]{(p - \sqrt{q})}$ ſera $p^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} p^{\frac{-2}{3}} \sqrt{q} - \frac{1}{9} p^{\frac{-5}{3}} q$ &c.; donc $x = m + n = 2p^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9} p^{\frac{-5}{3}}$ &c., quantité qui ne contient aucun radical. Donc la premiere racine eſt toujours réelle. La ſeconde racine peut être repréſentée par $m \times \frac{[-1+\sqrt{(-3)}]}{2} + n \times \frac{[-1-\sqrt{(-3)}]}{2} = \frac{(-m-n)}{2} + \frac{(m-n)}{2} \times \sqrt{(-3)}$. La premiere partie eſt évidemment rationelle; quant à la ſeconde, en retranchant la ſeconde ſérie de la premiere, vous trouverez $\frac{(m-n)}{2} = \frac{1}{3} p^{\frac{-2}{3}} \sqrt{q} + \frac{1}{81} p^{\frac{-8}{3}} q \sqrt{q}$ &c. dont tous les termes ſont affectés de $\sqrt{q}$. Mais $\sqrt{q} \times \sqrt{(-3)}$ eſt une quantité réelle ſi $q$ eſt une quantité négative, & imaginaire ſi $q$ eſt une quantité poſitive; donc la ſeconde racine eſt réelle dans le premier cas, & imaginaire dans le ſecond. La troiſiéme racine peut être repréſentée par $\frac{(-m-n)}{2} + \frac{(-m+n)}{2} \times \sqrt{(-3)}$, dont la premiere partie eſt réelle. A l'égard de la ſeconde, en ôtant la premiere ſérie trouvée ci-deſſus de la ſeconde, diviſant le réſultat par 2, & le multipliant par $\sqrt{(-3)}$, on verra de même que la quantité réſultante ſera réelle lorſque $q$ ſera négatif, & imaginaire ſi $q$ eſt poſitif.

* La formule $(a + b)^m = a^m + m\, a^{m-1} b +$ &c. s'appelle *le binome de Newton*, parce que ce grand Géométre en eſt l'Inventeur.

Si $q$ est 0, alors la seconde racine & la troisiéme sont représentées l'une & l'autre par $\frac{-m}{2}$; elles sont donc réelles dans ce cas.

Soit maintenant l'équation du troisiéme degré $y^3 + 3y^2 - 3y + 25 = 0$. Faisant évanouir le second terme, en supposant $y = x - 1$ (74), l'équation résultante $x^3 - 6x + 30 = 0$, étant comparée avec l'équation générale $x^3 - 3ax - b = 0$, donne $6 = 3a$ & $2 = a$, $b = -30$. Ces valeurs substituées dans $\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^3\right)}$, cette quantité devient $\sqrt{(217)}$, qui est une quantité réelle, donc il n'y a que la premiere valeur de $x$ qui soit réelle, & elle donne $x = \sqrt[3]{(-15 + \sqrt{217})} + \sqrt[3]{(-15 - \sqrt{217})}$; mais parce que $y = x - 1$, il faut, pour avoir les racines de la proposée, diminuer la valeur de $x$ de 1, & l'on aura $y = \sqrt[3]{(-15 + \sqrt{217})} + \sqrt[3]{(-15 - \sqrt{217})} - 1$ pour la seule valeur réelle de l'équation proposée.

PROBLEME I. *Quel est le nombre dont le cube est égal à six fois ce nombre plus 9 ?* Soit $x$ ce nombre; par la nature du Problême $x^3 = 6x + 9$. Comparant cette équation avec l'équation $x^3 - 3ax - b = 0$, ou $x^3 = 3ax + b$, on a $3a = 6$, ou $a = 2$ & $b = 9$. Substituant ces valeurs dans la formule $x = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$, on trouve $x = 3$. Tel est le nombre cherché.

PROBLEME II. *Quel eſt le nombre* x *dont la différence entre le cube & le triple de ce nombre eſt* 2 ? Par la nature du Problême $x^3 - 3x = 2$, ou $x^3 = 3x + 2$. Comparant cette équation avec l'équation $x^3 = 3ax + b$, on trouve $3a = 3$, $a = 1$, & $b = 2$. Donc la formule $x = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$ donnera $x = \sqrt[3]{\left(\frac{2+0}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{2-0}{2}\right)} = 1 + 1 = 2$.

PROBLEME III. *Quel eſt le nombre* x *dont le cube eſt égal à ſix fois ce nombre plus* 40 ? Nous aurons $a = 2$, $b = 40$, $x = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

PROBLEME IV. *Trouver trois nombres en proportion arithmétique continue, dont la différence* d *ſoit* $= 3$ *& le produit* p $= 28$. Soit $y$ le nombre du milieu ; le plus grand nombre ſera $y + d$, & le plus petit $y - d$. Le produit de ces trois nombres donne $y^3 - d^2 y = p$ ; donc $y^3 - d^2 y - p = 0$. Cette équation étant ſans ſecond terme, donne par ſa comparaiſon avec l'équation générale, $d^2 = 3a$, ou $a = \frac{d^2}{3}$, & $p = b$. Subſtituant les valeurs numériques de ces quantités dans la premiere valeur de $x$ trouvée ci-deſſus, on a $y$ ou $x$ (car ici l'un peut être mis à la place de l'autre) $= \sqrt[3]{[14 + \sqrt{(196 - 27)}]} + \sqrt[3]{[14 - \sqrt{(196 - 27)}]} = \sqrt[3]{(14 + 13)} + \sqrt[3]{(14 - 13)} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{1} = 3 + 1 = 4$. Donc $y = 4$, le plus grand nombre $y + d = 4 + 3 = 7$, & le plus petit $y - d = 1$.

Si l'on avoit une équation de cette forme $y^{3m} +$

$ay^{2m}$

$ay^{2m} + by^m + d = 0$, on la réduiroit à une équation du troiſiéme degré ſans ſecond terme, en ſuppoſant $y^m = x - \frac{a}{3}$; & ayant trouvé les racines de la réduite, on en retrancheroit $\frac{a}{3}$; les réſultats donneroient les valeurs de $y^m$, & les racines $m$ de ces réſultats donneroient les valeurs de $y$. Si cette équation n'avoit point de ſecond terme, on ſuppoſeroit ſeulement $y^m = x$, & l'on prendroit la racine $m$ de chaque valeur de $x$. On peut donc réſoudre toutes les équations qui n'ayant que quatre termes, ne contiennent que trois puiſſances de l'inconnue, dont les expoſans forment la progreſſion arithmétique $3m, 2m, m$. De même l'on peut réſoudre toutes les équations à trois termes qui ne contiennent que deux puiſſances de l'inconnue, mais dont l'expoſant de l'une eſt triple de celui de l'autre.

89. Soit maintenant une équation du quatriéme degré délivrée de ſon ſecond terme [ce qui eſt toujours poſſible (74)] $y^4 + ay^2 + by + c = 0$. Suppoſons que cette équation ſoit le produit des deux facteurs du ſecond degré $y^2 + xy + p = 0$, $y^2 - xy + q = 0$ *, leur produit donnera l'équation $y^4 + qy^2 + qxy + pq = 0$, qui étant comparée avec la $\begin{matrix} -x^2 - px \\ +p \end{matrix}$ **

* Le ſecond terme du ſecond facteur a le ſigne —, afin que le produit des deux facteurs donne une équation ſans ſecond terme, ce qui n'arriveroit pas ſi le ſecond terme des deux facteurs, qui d'ailleurs doit être le même, avoit les mêmes ſignes.

** Les quantités $(+q - x^2 + p)$ ſont cenſées multiplier $y^2$. De même $y$ eſt multiplié par $+qx - px$.

proposée, donne $q+p-x^2=a$, $-qx-px=b$, $pq=c$. Multipliant la premiere par $x$ & l'ajoutant ensuite à la seconde, l'on a $2qx-x^3=ax+b$, ou $2qx=ax+x^3+b$, & $q=\frac{ax+x^3+b}{2x}$. Cette valeur de $q$ étant substituée dans l'équation $pq=c$, il vient $p\times\frac{ax+x^3+b}{2x}=c$, & $p=\frac{2xc}{ax+x^3+b}$. Substituant les valeurs de $q$ & de $p$ que nous venons de trouver dans l'équation $qx-px=b$, il vient $\frac{ax+x^3+b}{2}-\frac{2cx^2}{ax+x^3+b}=b$, ou en faisant évanouir les fractions, transposant & réduisant, $x^6+2ax^4+b^2x^2-b^2-4c$ $=0$, équation qui peut se résoudre par la méthode du troisiéme degré (88). Cette équation (qu'on appelle *la réduite*) étant résolue, on n'aura qu'à substituer la valeur de $x$ qu'elle donnera dans les équations $y^2+xy+p=0$, $y^2-xy+q=0$, ou bien en substituant les valeurs de $p$ & de $q$, dans les équations $y^2+xy+\frac{2c}{x^2+a+\frac{b}{x}}=0$,

$$y^2-xy+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}a+\frac{b}{2x}=0,$$

& résoudre ensuite ces équations; ou, ce qui revient au même, substituer la valeur de $x$ dans les racines que donnent ces équations résolues, en considérant $y$ seul comme l'inconnue; c'est-à-dire, dans les racines $y=-\frac{1}{2}x\pm\sqrt{\frac{1}{4}x^2-\frac{2c}{x^2+a+\frac{b}{x}}}$

$$\& y = \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}a - \frac{c}{2x}},$$

& l'on aura les valeurs cherchées de $y$. Comme $x$ eſt venu d'une équation dans laquelle il avoit un expoſant pair, il eſt évident que $x$ eſt un radical quarré & qu'il peut avoir le double ſigne $\pm$ (car $\sqrt{x^2} = \pm x$).

La premiere expreſſion de $y$ peut donc ſe changer en celle-ci $y = \mp\frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}xx - \frac{2c}{xx + a \pm \frac{b}{2x}}}$, & la ſeconde devient $y = \pm\frac{1}{2}x \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}a \mp \frac{b}{2x}\right)}$. Ainſi $y$ a quatre valeurs exprimées par l'une ou l'autre formule; mais il n'y a pas pour cela 8 racines, parce que les deux formules donnent les mêmes racines. En effet, les quantités qui ſont devant les ſignes de ces formules étant les mêmes, il ſuffit de faire voir que les quantités ſous les ſignes ſont les mêmes, c'eſt-à-dire, que $-\frac{x^2}{4} - \frac{a}{2} \mp \frac{b}{2x} = \frac{x^2}{4} - \frac{2c}{x^2 + a \pm \frac{b}{2x}}$; or en faiſant diſparoître les dénominateurs, tranſpoſant & réduiſant, on tire de cette équation, celle que nous avons appellé *la réduite*; donc cette équation eſt vraie. Comme la ſeconde formule eſt la plus commode, c'eſt de celle-là que nous nous ſervirons, & les valeurs de $y$ qu'elle donne, ſont

$$y = \tfrac{1}{2}x + \sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}a - \frac{b}{2x}\right)}$$

$$y = \tfrac{1}{2}x - \sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}a - \frac{b}{2x}\right)}$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x + \sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}a + \frac{b}{2x}\right)}$$

$$y = -\frac{1}{x} - \sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}a + \frac{b}{2x}\right)}.$$

Si l'on fait $\frac{x}{2} = f$, $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}a - \frac{b}{2x}\right)} = h$, & $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}a + \frac{b}{2x}\right)} = l$, les quatre facteurs de l'équation $y^4 + ay^2 + by + c = 0$, pourront être représentés par les formules suivantes

$$\left.\begin{array}{l} y - f - h = 0 \\ y - f + h = 0 \\ y + f - l = 0 \\ y + f + l = 0 \end{array}\right\} \text{(D)}.$$

Le produit de ces facteurs donnera l'équation

$$\left.\begin{array}{llll} y^4 - 2ffy^2 & - 2fhhy & + f^4 & \\ - hh & + 2fll & - f^2h^2 & \\ - ll & & - f^2l^2 & \\ & & + h^2l^2 & \end{array}\right\} = 0 \text{ (S)}.$$

En comparant les termes de cette derniere équation avec ceux de l'équation proposée, l'on aura $a = -2f^2 - h^2 - l^2$, $b = 2fl^2 - 2fh^2$, $c = f^4 + h^2l^2 - f^2h^2 - f^2l^2$. Substituant ces valeurs dans la réduite, nous aurons l'équation

$$\left.\begin{array}{llll} x^6 - 4f^2x^4 & + 8f^2h^2x^2 & - 4f^2h^4 & \\ - 2h^2 & + 8f^2l^2 & + 8f^2h^2l^2 & \\ - 2l^2 & + h^4 & - 4f^2l^4 & \\ & + l^4 & & \\ & - 2h^2l^2 & & \end{array}\right\} = 0 \text{ (P)},$$

dont les racines ſont $x = \pm 2f$; $x = \pm h \pm l$; $x = \pm h \mp l$. Mais ſi dans la formule $y = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}a \mp \frac{b}{2x}\right)}$ on ſubſtitue les valeurs de $a$ & de $b$ que nous venons de trouver, & enſuite celle qu'on voudra des valeurs de $x$, il en viendra également les valeurs de $y$ que donnent les équations D; donc les racines de la réduite donnent le même réſultat par leur ſubſtitution.

La formule générale de la valeur de $y$ fait voir que les 4 racines que donnent cette formule, ſont ou toutes réelles ou toutes imaginaires, ou deux réelles ou deux imaginaires; mais parce que le dernier terme de la réduite a le ſigne —, il eſt évident qu'elle doit avoir une valeur de $x^2$ poſitive *, & par conſéquent une des valeurs de $x$ eſt poſitive; mais nous venons de voir que toutes les valeurs de $x$ donnent la même valeur pour $y$. Donc quand la valeur de $y$ ſera imaginaire, ce ne ſera qu'une quantité réelle jointe à la racine d'une quantité réelle & négative, c'eſt-à-dire, une quantité imaginaire de la forme $M + N\sqrt{(-1)}$. Et puiſque les racines imaginaires ſont toujours en nombre pair dans une équation, & que l'une étant $a - b\sqrt{(-1)}$, l'autre doit être $a + b\sqrt{(-1)}$ (voyez le n° 72), les facteurs du ſecond degré qui réſulteront des deux racines imaginaires multipliées l'une par l'autre, & de deux facteurs réels multipliés auſſi

* Car le produit des deux facteurs imaginaires $x \pm a + b\sqrt{(-1)}$, $x \pm a - b\sqrt{(-1)}$, donnant un réſultat, dont le dernier terme eſt poſitif, il eſt néceſſaire que toute équation, dont le dernier terme eſt négatif, ait au moins une racine réelle.

par l'autre, ou les facteurs du second degré qui résulteront des quatre racines imaginaires multipliées deux à deux seront réels. Donc dans ce cas même l'équation aura deux facteurs réels du second degré.

La réduite P étant le produit des trois facteurs $x^2 - 4f^2 = 0$, $x^2 - h^2 - l^2 - 2hl = 0$, $x^2 - h^2 + 2hl - l^2 = 0$; si $h$ & $l$ sont tous deux réels ou tous deux imaginaires, les trois facteurs seront tous réels, & la formule du troisiéme degré (88) ne pourra donner les racines de la réduite. * Si l'une des deux quantités $h$ ou $l$ seulement est imaginaire, les deux derniers facteurs seront imaginaires, & la réduite sera alors résoluble par la formule du troisiéme degré; donc alors la formule du quatriéme degré réussira.

En examinant attentivement la réduite P, on verra que le coefficient de son second terme est nécessairement négatif lorsque $f$, $h$ & $l$ sont réels, & que dans le même cas le coefficient de son troisiéme terme est positif & plus grand que 0; mais si $h^2$ & $l^2$ sont des quantités négatives, ou, ce qui revient au même, si les 4 racines de l'équation sont imaginaires, la réduite P ne sauroit avoir en même tems le second terme négatif & le troisiéme positif; car si $(h^2 + l^2) < 2f^2$, ce qui rend dans ce

* On dit que la formule du troisiéme degré ne peut alors donner les racines, parce que ces racines sont sous une forme imaginaire, quoiqu'elles soient réelles, & c'est-là ce qu'on appelle *le cas irréductible du troisiéme degré*. Lorsque la réduite est dans ce cas, si on substituoit la valeur de $x$ qu'elle donne dans la formule du quatriéme degré, on auroit une expression qui contiendroit des radicaux imaginaires; c'est pourquoi l'on dit que dans ce cas, la formule du quatriéme degré ne réussit point.

cas le ſecond terme négatif, le coefficient du troiſiéme terme, qui dans ce même cas eſt $= (h^2 + l^2) \times (h^2 + l^2 - 8f^2) - 4h^2 l^2$, ſera néceſſairement négatif; donc lorſque la réduite échappera à la formule du n° 88, l'on verra par-là ſi l'équation doit avoir ſes 4 racines réelles ou imaginaires.

En examinant l'équation S, il eſt aiſé de voir qu'une équation du quatriéme degré, ſans ſecond terme & dont le troiſiéme eſt poſitif (on compte comme ſi le ſecond y étoit), doit avoir des racines imaginaires; car $-2f^2 - h^2 - l^2$ ſera toujours une quantité négative, lorſque $f$, $h$, $l$ ſeront réels, & par conſéquent tant que les racines ſeront réelles; donc dans le cas contraire l'équation a des racines imaginaires.

Soit maintenant l'équation $z^4 + 4z^3 + 9z^2 + 12z + 3 = 0$. Faiſant $z = y - 1$ & ſubſtituant, l'on aura $y^4 + 3y^2 + 2y - 3 = 0$, équation ſans ſecond terme. On a donc ici $a = 3$, $b = 2$, $c = -3$, & la réduite devient $x^6 + 6x^4 + 21x^2 - 4 = 0$. Faiſant diſparoître le ſecond terme, en ſuppoſant $x^2 = u - 2$ (on regarde ici $x^2$ comme l'inconnue), l'on a $u^3 + 9u - 30 = 0$, équation qui n'a qu'une racine réelle, & par conſéquent l'équation du quatriéme degré ne doit avoir (ſelon ce que nous avons dit ci-deſſus) que deux racines réelles. Appliquant la formule du n° 88 à la derniere équation que nous venons de trouver, nous aurons $u = \sqrt[3]{(+15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(+15 - \sqrt{252})}$ *.

* Car en comparant cette équation avec celle du troiſiéme degré (n°. 88), l'on a $-3a = 9$, $-a^3 = 27$, $-b = -30$, $\frac{b}{2} = 15$, & $x = u$. Mais la valeur de $a$, il en eſt

Mais parce que $x^2 = u - 2$, il faut diminuer cette racine de la quantité 2, & l'on aura $x = \pm \sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}]}$. Substituant cette valeur dans l'équation $y = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}a \mp \frac{b}{2x}\right)}$, l'on aura les valeurs de $y$ renfermées dans la formule suivante : $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}]} \pm \sqrt{\left[-\frac{1}{2}[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}] - \frac{1}{2} \mp \frac{1}{\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}]}}\right]}$.

Et pour avoir les valeurs de $z$, il faudra diminuer ces racines de la quantité 1. Deux des racines de $y$ sont réelles & les deux autres imaginaires *.

Dans le cas où l'équation du quatriéme degré n'a point de diviseur commensurable d'une ou de deux dimensions, après avoir connu, par le moyen de la réduite, si elle a des racines réelles, on pourra les chercher par la méthode précédente ; mais si elle a des racines commensurables, on les trouvera aisément en cherchant les diviseurs commensurables de cette équation.

Si l'on avoit une équation de cette forme $x^{4m} + ax^{3m} + bx^{2m} + cx^m + d = 0$, il est aisé de voir qu'en faisant $y^m = x$, elle seroit résoluble

---

de même de celle de $b$, est différente dans la formule du quatriéme degré, puisque dans cette formule $a = 3$, comme nous l'avons dit ci-dessus.

* Ce sont celles qu'on trouve en prenant le signe — dans $\mp \frac{1}{\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}]}}$.

par la méthode du quatriéme degré, quand même on ſuppoſeroit $a$ ou $b$ ou $c=0$, c'eſt-à-dire, quand même un ou pluſieurs termes manqueroient.

REMARQUE. Il y a encore une autre méthode pour réſoudre les équations du quatriéme degré, dont il eſt à-propos de donner une idée aux Commençans *.

Suppoſons que la racine $x$ d'une équation du quatriéme degré eſt $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, $p$, $q$ & $r$ étant des quantités qui déſignent les racines de l'équation du troiſiéme degré $t^3-ft^2+gt-h=0$; de maniere que $p+q+r=f$, $pq+pr+qr=g$, & $pqr=h$. Cela poſé, quarrons la formule $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, pour avoir $x^2=p+q+r+2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$. Mais $p+q+r=f$; donc en ſubſtituant & tranſpoſant enſuite, on trouvera $x^2-f=2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$. Et en quarrant encore, $x^4-2x^2f+ff=4pq+4pr+4qr+8\sqrt{ppqr}+8\sqrt{pqrr}+8\sqrt{pqqr}$. Or $g=pq+pr+qr$; donc $x^4-2fxx+ff-4g=8\sqrt{pqr}\cdot(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$, équation que je déſignerai par (A). Mais $pqr=h$, $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}$, & $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=x$; donc nous aurons l'équation du quatriéme degré $x^4-2fxx-8x\times\sqrt{h}+ff-4g=0$; dont une des racines eſt $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, $p$, $q$ & $r$ étant les racines de l'équation du troiſiéme degré $t^3-ft^2+gt-h=0$.

L'équation du quatriéme degré à laquelle nous ſommes parvenus, peut être regardée comme générale, parce qu'il eſt toujours poſſible de changer une équation du quatriéme degré, qui a le ſecond terme en une autre, dans laquelle ce ſecond terme manque. Voyons donc comment on peut trouver les racines de l'équation ci-deſſus.

Soit propoſée l'équation $x^4-ax^2-bx-c=0$, que je déſignerai par (B), dont on demande les racines. Comparant cette équation avec l'équation A, je trouve 1°. $2f=a$, ou $f=\frac{a}{2}$; 2°. $8\sqrt{h}=b$; donc $64h=bb$, & $h=\frac{bb}{64}$; 3°. $ff-4g=-c$, ou $\frac{aa}{4}-4g+c=0$, ou $c+\frac{aa}{4}=4g$, & $g=\frac{c}{4}+\frac{aa}{16}$. On ſubſtituera les valeurs de $f$, $h$ & $g$ que

* Nous la devons à M. Euler.

nous venons de trouver dans l'équation du troiſiéme degré $t^3 - ftt + gt - h = 0$. On cherchera les trois racines de celle-ci par la méthode ci-deſſus ; & ſuppoſant qu'une de ces racines eſt $p$, & que les deux autres ſont déſignées l'une par $q$ & l'autre par $r$, une des racines de notre équation du quatriéme degré ſera $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

Cette formule renferme néceſſairement les quatre racines de l'équation propoſée du quatriéme degré, à cauſe des différens ſignes qu'on peut donner aux radicaux, bien plus il ſemble même qu'elle peut donner huit valeurs de $x$ ; mais on doit faire attention que $\sqrt{pqr}$ doit être $= \sqrt{h} = \frac{b}{8}$ ; donc ſi $\frac{b}{8}$ eſt une quantité poſitive, le produit des quantités $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ doit être poſitif. Il eſt donc néceſſaire dans ce cas de prendre les trois radicaux avec le ſigne $+$, ou bien deux avec le ſigne $-$, & un avec le ſigne $+$ ; de ſorte que dans ce cas les valeurs de $x$ ſont

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$$

Si $\frac{b}{8}$ eſt une quantité négative, les valeurs de $x$ ſeront les ſuivantes

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$$

Soit maintenant l'équation du quatriéme degré ſans ſecond terme $x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0$. En la comparant avec l'équation B je trouve $a = 25$, $b = -60$ & $c = 36$. Subſtituant ces valeurs de $a$, $b$ & $c$ dans celles de $f$, $g$ & $h$, l'on a $f = \frac{25}{2}$, $g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$, & $h = \frac{225}{4}$ ; ainſi notre équation du troiſiéme degré devient $t^3 - \frac{25}{2} \cdot t^2 + \frac{769}{16} \cdot t - \frac{225}{4} = 0$. Afin d'éliminer les fractions, je fais $t = \frac{z}{4}$, pour avoir $\frac{z^3}{64} - \frac{25}{2} \cdot \frac{zz}{16} + \frac{769}{16} \cdot \frac{z}{4} - \frac{225}{4} = 0$. Multipliant enſuite par le plus grand dénominateur 64, je trouve $z^3 - 50zz$

$+ 769z - 3600 = 0$. Il faut maintenant trouver les racines de cette derniere équation ; l'une d'elles eſt $z = 9$, & en diviſant l'équation par $z - 9 = 0$, il vient $zz - 41z + 400 = 0$, ou $zz + 41z = -400$. Cette derniere équation étant réſolue par la méthode du ſecond degré, donne $z = 16$ & $z = 25$. Ainſi les trois racines ſont $z = 9$, $z = 16$ & $z = 25$; donc $t = \frac{9}{4}$, $t = 4$ & $t = \frac{25}{4}$. Ainſi nous avons $p = 2$, $q = 4$ & $r = \frac{25}{4}$; mais $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = -\frac{15}{2} = \frac{b}{8}$; donc, pour nous conformer à ce que nous avons dit ci-deſſus l'égard des ſignes des radicaux $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$, il faut prendre ces trois radicaux avec le ſigne $-$, ou n'en prendre qu'un avec le ſigne $-$; & parce que $\sqrt{p} = \frac{3}{2}$, $\sqrt{q} = 2$, $\sqrt{r} = \frac{5}{2}$, les quatre racines de l'équation propoſée ſeront

$$x = \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1$$
$$x = \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2$$
$$x = -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3$$
$$x = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6.$$

## *Des Equations des Degrés ſupérieurs.*

90. Nous nous contenterons d'expoſer la méthode par laquelle on détermine les équations, dont une des racines au moins peut s'exprimer par une formule ſemblable à la formule de *Cardan*, qui eſt celle que nous avons donné pour le troiſiéme degré (88) : car il n'y a aucune méthode connue, du moins praticable, par laquelle on puiſſe réſoudre dans tous les cas, les équations des degrés ſupérieurs. Voyons d'abord qu'elles ſont les équations du quatriéme degré qui ſont dans ce cas.

Soit $x = m + n$ ; donc $x^4 = m^4 + 4m^3 n + 6m^2 n^2 + 4mn^3 + n^4$, ou $x^4 = m^4 + 4mn \times (m+n)^2 + n^4 - 2m^2 n^2$. A la place de $(m+n)^2$, je ſubſtitue $x^2$, & en tranſpoſant tout dans le premier membre, il vient $x^4 - 4mnx^2 + 2m^2 n^2 - m^4 - n^4 = 0$ *, équation dont une des racines eſt $x = m + n$. Dans

* Cette équation eſt réſoluble par la méthode du ſecond degré (71).

cette équation il y a une condition néceſſaire, c'eſt qu'il ne doit y avoir aucune puiſſance impaire de $x$. Suppoſant de même $x = m + n$, nous aurons $x^5 = m^5 + 5m^4n + 10m^3n^2 + 10m^2n^3 + 5mn^4 + n^5$, équation que j'écris ainſi $x^5 = m^5 + 5mn(m+n)^3 + n^5$. A la place de $m + n$ ſubſtituant $-5m^2n^2(m+n)$

$x$, & tranſpoſant, il vient $x^5 - 5mnx^3 + 5m^2n^2x - m^5 - n^5 = 0$, équation qui a une racine $x = m + n$. Il y a deux conditions dans cette équation, la premiere qu'il n'y ait aucune puiſſance paire de $x$, la ſeconde que le coefficient de $x$ ſoit la cinquiéme partie du quarré du coefficient de $x^3$.

Faiſant toujours $x = m + n$, nous aurons $x^6 = m^6 + 6m^5n + 15m^4n^2 + 20m^3n^3 + 15m^2n^4 + 6mn^5 + n^6$. Je diſpoſe ainſi cette équation : $x^6 = m^6 + 6mn(m+n)^4 + n^6 - 9m^2n^2(m+n)^2 + 2m^3n$.

En ſubſtituant $x$ à la place de $m + n$, & tranſpoſant tout dans le premier membre, il vient $x^6 - 6mnx^4 + 9m^2n^2x^2 - 2m^3n^3 - m^6 - n^6 = 0$, équation dont une racine $x = m + n$.

Dans cette équation il ne doit point y avoir de puiſſance impaire de $x$, & de plus le coefficient de $x^2$ doit être le quart du quarré de celui de $x^4$.

S'il s'agit de l'équation du ſeptiéme degré, l'on trouvera

$$x^7 = m^7 + 7mn(m+n)^5 + n^7 - 14m^2n^2(m+n)^3 + 7m^3n^3(m+n),$$

ſubſtituant $x$ à la place de $m + n$, & tranſpoſant, il vient

$$x^7 - 7mnx^5 + 14m^2n^2x^3 - 7m^3n^3x - m^7 - n^7 = 0,$$

équation dont une des racines $x = m + n$. Dans cette équation il ne doit y avoir aucune puiſſance paire de $x$, & de plus le ſeptiéme du coefficient de $x^5$ elevé au quarré, & multiplié par 14, doit donner le coefficient de $x^3$, & ce même ſeptiéme élevé au cube & multiplié par 7, doit donner le coefficient de $x$.

Après avoir élevé $m+n$ à la huitiéme puiſſance, & diſpoſé l'équation comme on le voit ici

$$x^8 = m^8 + 8mn(m+n)^6 + n^8, \\ -20m^2n^2(m+n)^4 \\ +16m^3n^3(m+n)^2 \\ -2m^4n^4$$

ſubſtituez $x$ à la place de $m+n$, & tranſpoſant tout dans le premier membre, vous aurez l'équation

$$x^8 - 8mnx^6 + 20m^2n^2x^4 - 16m^3n^3x^2 + 2m^4n^4 = 0. \\ -m^8 \\ -n^8$$

Dans cette équation toutes les puiſſances impaires de $x$ doivent manquer; & il eſt viſible que le $\frac{1}{8}$ du coefficient de $x^6$ élevé au quarré & multiplié par 20, doit donner le coefficient de $x^4$; le cube de la même quantité, multiplié par 16, donne le coefficient de $x^2$.

La même méthode donnera pour l'équation du neuviéme degré, dont une des racines eſt $x = m+n$, l'équation que l'on voit ici:

$$x^9 - 9mnx^7 + 27m^2n^2x^5 - 30m^3n^3x^3 + 9m^4n^4x - m^9 = 0. \\ -n^9$$

Toutes les équations dont nous venons de parler, ont une racine $x = m+n$.

On voit clairement que dans les équations d'un degré impair, toutes les puiſſances paires de $x$ manquent; au contraire toutes les puiſſances impaires de $x$ doivent s'évanouir dans les équations des degrés pairs. Si $p$ déſigne le degré de l'équation, $-m^p - n^p$ ſera le dernier terme commun à toutes ces équations. De plus dans les équations paires ce dernier terme doit contenir encore la quantité $2m^{\frac{p}{2}}n^{\frac{p}{2}}$. Les termes de ces équations, ſi on en excepte $m^p$ & $n^p$ qui ont toujours le ſigne $-$, ont alternativement les ſignes $+$ & moins; c'eſt pourquoi dans les équations paires $2m^{\frac{p}{2}}n^{\frac{p}{2}}$ doit avoir le ſigne $+$ (nous regardons cette quantité comme le coefficient de $x^0$), ſi $p$ eſt un nombre pairement pair, c'eſt-à-dire, de cette ſérie 4, 8, 12, 16 &c., & le ſigne $-$ ſi $p$ eſt impairement pair, c'eſt-à-dire, de cette ſérie 2, 6, 10, 14 &c. Dans les coefficiens on trouve ſucceſſivement $mn$, $m^2n^2$, $m^3n^3$, &c., $mn$ eſt toujours multiplié par l'expoſant $p$; & pour trouver les nombres

qui multiplient $m^2 n^2$, $m^3 n^3$, &c., je suppose $x = m + n$, & j'ai $x^2 - 2mn - m^2 = 0$, dont une des racines $= m + n$, $- n^2$

& l'autre $= -m - n$; & joignant ici l'équation du troisiéme degré (88), je forme la table suivante.

| | $mn$ | $m^2n^2$ | $m^3n^3$ | $m^4n^4$ | $m^5n^5$ | $m^6n^6$ | $m^7n^7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| II | 2 | . | . | . | . | . | . |
| III | 3 | . | . | . | . | . | . |
| IV | 4 | 2 | . | . | . | . | . |
| V | 5 | 5 | . | . | . | . | . |
| VI | 6 | 9 | 2 | . | . | . | . |
| VII | 7 | 14 | 7 | . | . | . | . |
| VIII | 8 | 20 | 16 | 2 | . | . | . |
| IX | 9 | 27 | 30 | 9 | . | . | . |
| X | 10 | 35 | 50 | 25 | 2 | . | . |
| XI | 11 | 44 | 77 | 55 | 11 | . | . |
| XII | 12 | 54 | 112 | 105 | 36 | 2 | . |
| XIII | 13 | 65 | 156 | 182 | 91 | 13 | . |
| XIV | 14 | 77 | 210 | 294 | 196 | 49 | 2 |

Dans le premier rang horisontal je place $mn$, $m^2n^2$, &c. La premiere colonne verticale en chiffres romains désigne le degré de l'équation, & les nombres situés sous $mn$, $m^2n^2$, &c. sont les nombres cherchés, sans omettre 2, qui, dans les équations paires, doit être multiplié par $m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} x^0$. On voit que la colonne qui répond à $mn$ est une progression arithmétique, dont la différence $= 1$, ainsi on pourra la continuer à volonté. Chaque nombre de la colonne $m^2n^2$ est la somme de celui qui est au-dessus de lui dans cette même colonne, & de celui qui lui est superieur de deux places dans la colonne de la gauche; & il en est de même pour les autres colonnes. Par cette table prolongée autant qu'on le voudra, on trouvera l'équation de chaque degré qui contient une racine $x = m + n$: je l'appellerai la *résoluble* *.

* Par ce terme on n'entend pas qu'on puisse trouver toutes les racines de l'équation proposée, nous prétendons seulement qu'on peut en trouver au moins une par la méthode présente.

Toute équation, dont les termes de rang pair manqueront, excepté le dernier, & dont les coefficiens des termes exiſtans ſeront proportionnels aux quantités $mn$, $m^2n^2$, &c. multipliées par les nombres de la table ci-deſſus, aura une racine ſemblable à la formule de *Cardan*.

Soit l'équation du quatrième degré $x^4 \pm 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$. La comparant à la réſoluble, je trouve $mn = \mp a$, $m^4 + n^4 = b$. Subſtituant dans la ſeconde équation la valeur de $n$ priſe de la premiere, il vient $m^4 + \frac{a^4}{m^4} = b$, ou en multipliant par $m^4$ & tranſpoſant, $m^8 - bm^4 = -a^4$, équation qui, par la méthode du ſecond degré, donne $m^4 = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^4\right)}$; donc $m = \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}$. Si au lieu de ſubſtituer la valeur de $n$, on eût ſubſtitué celle de $m$, on auroit trouvé $n = \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}$*.

Si l'on multiplie les valeurs de $m$ & de $n$ par les racines quatriémes de l'unité trouvée ci-deſſus (88), & qu'on joigne enſuite les réſultats dont les produits peuvent donner $-a$, on aura celles qui conviennent, lorſque le ſigne ſuperieur a lieu, & celles dont le produit des réſultats donne $+a$, ont lieu dans le cas que l'équation contient $-4a$. C'eſt pourquoi les racines de l'équation $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$, ſont $x = +\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} + \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b}{4} - a^4}\right)}$

$$x = -\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b}{4} - a^4}\right)} - \sqrt{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}$$

$$x = +\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1}) -$$

* On doit faire ici la même remarque que nous avons déja faite à l'occaſion du ſigne du radical quarré de l'équation du troiſième degré (88).

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\times(\sqrt{-1})$$

$$x=-\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\times\sqrt{(-1)}+$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\times\sqrt{(-1)};$$ & les racines de l'équation $x^4+4axx+2a^2-b=0$ seront

$$x=+\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}-\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}$$

$$x=-\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}+\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}$$

$$x=+\sqrt[4]{\left(\frac{b^2}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\times(\sqrt{-1})+$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\times(\sqrt{-1}).$$

$$x=-\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\cdot\sqrt{(-1)}-$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\cdot\sqrt{(-1)}.$$

Soit maintenant l'équation du cinquiéme degré $x^5-5ax^3+5a^2x-b=0$, la comparant avec la réfoluble, on a $mn=a$, $m^5+n^5=b$. Substituant fucceſſivement dans la ſeconde équation la valeur de $m$ & de $n$ priſe dans la premiere, l'on trouvera $m=\sqrt[5]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}$, & $n=\sqrt[5]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}$. Mais les racines cinquiémes

quiémes de l'unité qu'on trouve en réſolvant cette équation $x^5 - 1 = 0$ *, ſont 1, $\frac{-\sqrt{5}-1 \pm \sqrt{(-10+\sqrt{5})}}{4}$, $\frac{+\sqrt{5}-1 \pm \sqrt{(-10-\sqrt{5})}}{4}$ ; ainſi en multipliant la valeur de $m$ & celle de $n$ par chacune de ces racines, & prenant enſuite celles dont le produit donne $+a$, l'on aura les racines cherchées ; & faiſant la valeur de $m$ que nous venons de trouver $= A$, celle de $n = B$, nous trouverons les équations ſuivantes :

$$x = A + B$$

$$x = \frac{A[-\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}]+B[-\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}]}{4}$$

$$x = \frac{A[-\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}]+B[-\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}]}{4}$$

$$x = \frac{A[\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}]+B[\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}]}{4}$$

$$x = \frac{A[\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}]+B[\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}]}{4}$$

Par ces exemples on peut voir comment il faut s'y prendre pour les degrés ſupérieurs. Dans les équations impaires $x^p - p\,a\,x^{p-2}$ &c. $- b = 0$, nous trouverons toujours une racine $x =$

$$\sqrt[p]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}\right)}+\sqrt[p]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}\right)}$$

dans laquelle les ſignes radicaux expriment les racines qui répondent à la racine 1 de l'unité *. Dans les équations de degré pair qui

* Cette équation a une racine $x = 1$; car elle eſt diviſible par $x - 1 = 0$, & le quotient donne une équation du quatriéme degré qui fait trouver les autres racines.

* Dans une équation impaire $x^p - 1 = 0$, il y a toujours une racine $x = 1$ ; car en ſuppoſant $x = 1$, elle devient $= 0$. Mais ſi $p$ eſt pair l'équation eſt diviſible par $(x - 1).(x + 1) = 0$, ou par $x^2 - 1 = 0$, donc alors on a $x = \pm 1$.

ont le second terme négatif, comme $x^p - pax^{p-2}$ &c. $- b = 0$ ;

on a deux racines $x = \pm \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$

$$\pm \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$$

Si le second terme a le signe $+$, on a ces deux racines

$$x = \pm \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$$

$$\mp \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}.$$

Dans ces formules les signes supérieurs répondent à l'une des racines, & les inférieurs à l'autre.

On peut remarquer que $p$ étant pair, $-a^p$ est toujours une quantité négative ; mais $p$ étant impair, cette quantité sera négative si $a$ est positif, & positive si $a$ est négatif. Pour connoître les autres racines, il faut trouver les racines du degré $p$ de l'unité, c'est-à-dire, résoudre l'équation $x^p - 1 = 0$, multiplier par chacune de ces racines, soit $\sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$, soit $\sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$, & joindre ensuite celles dont le produit $= +a$, si $p$ est impair ; mais $p$ étant pair, on joindra celles qui donnent $-a$, si le second terme a le signe $+$, & celles qui donnent $+a$, si le second terme a le signe $-$.

## DE L'INFINI.

91. Une quantité *infinie* est une quantité plus grande qu'aucune quantité donnée, c'est-à-dire, une quantité qu'on conçoit être augmentée au-delà

de toute limite assignable (en nombres). Une quantité *infiniment petite*, est une quantité plus petite qu'aucune quantité donnée ; ou une quantité qu'on conçoit diminuée au-delà de toute limite assignable. La premiere est désignée par $\infty$, la seconde par $\frac{1}{\infty}$. Si l'on multiplie $\infty$ par $\infty$, l'on aura $\infty^2$, infini du second ordre, & multipliant celui-ci par $\infty$, l'on a $\infty^3$, infini du troisiéme ordre ; en général $\infty^m$ est un infini de l'ordre $m$. De même $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$ est un infiniment petit du second ordre, & $\frac{1}{\infty^m}$ est un infiniment petit de l'ordre $m$. L'infini du premier ordre $\infty$ contient le fini une infinité de fois ; mais il est lui-même contenu une infinité de fois dans l'infini du second ordre, & celui-ci l'est une infinité de fois dans l'infini du troisiéme : en général, l'infini de l'ordre $m$ contient une infinité de fois l'infini de l'ordre $m-1$, & est contenu autant de fois dans l'infini de l'ordre $m+1$, & l'infini $\infty^{m+n}$ contient l'infini $m$ autant de fois qu'il est désigné par $\infty^n$, comme cela est évident en divisant $\infty^{m+n}$ par $\infty^n$, ce qui se fait en ôtant l'exposant du diviseur de celui du dividende. Le fini contient l'infiniment petit du premier ordre une infinité de fois, & celui-ci contient l'infiniment petit du second ordre aussi une infinité de fois. En général, l'infiniment petit de l'ordre $m$ contient l'infiniment petit de l'ordre $m+n$ un nombre de fois désigné par $\infty^n$ : car en divisant $\frac{1}{\infty^m}$ par $\frac{1}{\infty^{m+n}}$, l'on aura (par la regle de la division des fractions) $\frac{\infty^{m+n}}{\infty^m} = \infty^n$.

L'infini $a\infty^m$ est à $b\infty^m$ comme $a : b$, c'est-à-dire, que deux infinis du même ordre peuvent être entr'eux comme deux quantités finies $a$ & $b$.

De même $\frac{a}{\infty^m} : \frac{b}{\infty^m} :: a : b$ ; c'eſt-à-dire, que la même choſe a lieu pour les infiniment petits du même ordre. Deux quantités finies, qui ne diffèrent que d'un infiniment petit, ſont cenſées égales : car leur différence étant inaſſignable & plus petite qu'aucune quantité donnée, doit être cenſée nulle ; donc $a \pm \frac{1}{\infty} : a :: a : a$, c'eſt-à-dire, en raiſon d'égalité. De même un infiniment petit du ſecond ordre étant infiniment plus petit que celui du premier, deux infiniment petits du premier ordre, qui ne diffèrent entr'eux que d'un infiniment petit du ſecond ordre ou du troiſiéme, &c. ſont cenſés être en raiſon d'égalité. De même $a\infty^m : \infty^m \pm b :: a : 1 \pm \frac{b}{\infty^m}$ ( en diviſant par $\infty^m$ ) ; or $\frac{b}{\infty^m}$ eſt un infiniment petit de l'ordre $m$ ; donc, ſelon ce que nous venons de dire, l'on a $a : 1 \pm \frac{b}{\infty^m} :: a : 1$, c'eſt-à-dire, qu'un infini eſt à un autre infini du même ordre ( & c'eſt la même choſe ſi les ordres des infiniment grands ſont différents ) plus ou moins une quantité finie, dans le même rapport que ſi cette quantité finie ne s'y trouvoit pas. Mais cela n'a pas lieu dans le rapport arithmétique ; car le rapport arithmétique de $\infty + 3 \cdot \infty$ eſt $= \infty + 3 - \infty = 3$, ce qu'il eſt bon de remarquer ; donc on ne doit négliger les quantités finies devant les infinies que quand il s'agit d'un rapport géométrique, & non arithmétique. De même dans le rapport arithmétique on ne doit pas négliger un infini devant un autre infini d'un ordre ſupérieur ; ainſi $\infty^3 + \infty^2 : \infty^3 :: \frac{\infty^3 + \infty^2}{\infty^3} : \frac{\infty^3}{\infty^3}$ $:: 1 + \frac{1}{\infty} : 1 :: 1 : 1$. Mais le rapport arithmétique

de $\infty^3 + \infty^2$ à $\infty^3$ est $= \infty^3 + \infty^2 - \infty^3 = \infty^2$.

REMARQUE I. Il est de la nature de toute quantité, d'être susceptible d'augmentation ou de diminution; ainsi l'on ne doit pas dire que l'infini est une quantité qui a reçu tous ses accroissements finis possibles, autrement l'infini ne seroit pas une quantité. D'ailleurs nous concevons qu'une quantité quelconque deviendra plus grande, en lui ajoutant une autre quantité si petite qu'elle soit.

REMARQUE II. En regardant o comme une quantité infiniment petite, l'on aura $\frac{1}{0} = \infty$, & $0 = \frac{1}{\infty}$; mais on ne doit pas regarder o comme un pur rien, sans quoi l'on n'auroit pas $\frac{1}{0} = \infty$, comme le prétend M. *Euler*. En effet, puisque pour avoir un quotient, il faut une quantité qu'on appelle *le dividende*, qui contienne une quantité qu'on nomme *le diviseur*, & que ces quantités soient de même nature, il est évident que le quotient de 1 divisé par o n'est pas une quantité, parce que o n'est pas une quantité. Voyez ce que nous avons dit sur cette matiere dans la seconde édition de nos Institutions Mathématiques.

## *Des Séries ou Suites.*

92. On entend par *série*, une suite de termes qui croissent ou décroissent selon une certaine loi (nous ne parlons pas ici des suites dont les termes ne suivent aucune loi) : telles sont *les progressions géométriques & arithmétiques, les suites des nombres figurés.*

*Nombres figurés.*

| | |
|---|---|
| Constans ou du premier ordre, | 1, 1, 1, 1, 1 &c. |
| Naturels ou du second ordre, | 1, 2, 3, 4, 5 &c. |
| Triangulaires ou du troisiéme ordre, | 1, 3, 6, 10, 15 &c. |
| Piramidaux ou du quatriéme ordre, | 1, 4, 10, 20, 35 &c. |
| Trianguli-Pyramidaux ou du cinquiéme ordre, | 1, 5, 15, 35, 70 &c. |
| &c. | |

La loi de chacune de ces ſuites des nombres figurés, eſt que chacun de leurs termes ſoit la ſomme des termes correſpondans de la précédente; ainſi le troiſiéme terme 6 de la troiſiéme ſuite eſt la ſomme des trois premiers de la ſeconde.

Les nombres *polygones* ſont formés par la ſomme des termes conſécutifs d'une progreſſion arithmétique, & ces nombres s'appellent *triangulaires*, *quarrés*, *pentagones*, &c. ſelon que la différence de la progreſſion eſt 1, ou 2, ou 3, &c.

*Progreſſions Arithmétiques.*

| | | |
|---|---|---|
| 1, 2, 3, 4, &c. | Différences | 1 |
| 1, 3, 5, 7, &c. | | 2 |
| 1, 4, 7, 10, &c. | | 3 |
| 1, 5, 9, 13, &c. | | 4 |
| &c. | | |

*Nombres Polygones.*

| | |
|---|---|
| 1, 3, 6, 10, &c. | Triangulaires*. |
| 1, 4, 9, 16, &c. | Quarrés. |
| 1, 5, 12, 22, &c. | Pentagones. |
| 1, 6, 15, 28, &c. | Exagones. |
| &c. | |

En examinant avec un peu d'attention les nombres figurés, il eſt viſible qu'en déſignant par *n* le

* Les nombres triangulaires ont cette propriété qu'on peut diſpoſer en triangle autant de points qu'ils contiennent d'unités, en prenant un point pour le plus petit triangle; de même les points indiqués par les nombres quarrés peuvent être diſpoſés en quarré, en prenant un point pour le plus petit quarré, &c. On pourra mieux comprendre cela, quand on aura vu dans la Géométrie ce que c'eſt qu'un triangle, un quarré, &c.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| . | :: | ∴ | ∷ | &c. |
| 1 | 3 | 6 | 10 | &c. |
| . | :: | ∷ | &c. | |
| 1 | 4 | 9 | &c. | |

rang du nombre naturel, ce nombre sera $= n$; ainsi le nombre naturel du cinquiéme rang est 5. On trouvera aussi que le nombre triangulaire du rang $n$ est $= \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. S'il s'agit du nombre triangulaire du rang 4, on aura $n = 4$, & ce nombre sera $= \frac{4 \cdot (4+1)}{2} = \frac{4 \cdot (5)}{2} = \frac{20}{2} = 10$. Le nombre pyramidal du rang $n$ est $= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{2 \cdot 3}$. Le nombre figuré du cinquiéme ordre du rang $n$ est $= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$. Le nombre figuré du sixiéme ordre est $= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, & ainsi de suite.

A l'égard des nombres polygones, si $n$ indique le rang du nombre, on aura le nombre triangulaire $= \frac{nn+n}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Le quarré $= \frac{2nn}{2} = nn$.

Le pentagone ou V gone $= \frac{n \cdot (3n-1)}{2}$.

L'exagone ou VI gone $= \frac{n \cdot (4n-2)}{2}$.

Le VII gone $= \frac{n \cdot (5n-3)}{2}$.

Le VIII gone $= \frac{n \cdot (6n-4)}{2}$.

Le IX gone $= \frac{n \cdot (7n-5)}{2}$.

Le X gone $= \frac{n(8n-6)}{2} = n\cdot(4n-3)$.

Le XI gone $= \frac{n\cdot(9n-7)}{2}$.

Le XII gone $= \frac{n\cdot(10n-8)}{2} = n\cdot(5n-4)$.

Le XX gone $= \frac{n(18n-16)}{2} = n(9n-8)$.

Et en général le $m$ gone $= \frac{(m-2)\cdot nn-(m-4)\cdot n}{2}$.

Nous appellerons *côté* le nombre $n$ ou le rang du nombre polygone ; & nous dirons auſſi que le nombre $m$ gone de $n$ ou du côté $n$ eſt $= \frac{(m-2)\cdot nn-(m-4)\cdot n}{2}$.

PROBLEME. *On demande à un Financier combien lui coûte une terre qu'il vient d'acheter : il répond que le nombre 365 gone de 12 eſt le nombre de louis qu'elle lui coûte.* Pour trouver ce nombre, on ſuppoſera $m = 365$ & $n = 12$, & ſubſtituant ces valeurs dans la formule générale, on trouvera que la terre a été achetée 23970 louis.

Nous venons de voir comment on doit déterminer les nombres polygones, en déſignant par $n$ le côté du polygone ; donc ſi on déſignoit ce côté, qu'on appelle auſſi *une racine*, par $x$, il ſuffiroit d'écrire $x$ au lieu de $n$ dans les formules ci-deſſus ; de ſorte que l'on auroit le nombre $m$ gone $= \frac{(m-2)xx-(m-4)\cdot x}{2}$.

Si connoiſſant le nombre $m$ gone, on demande la racine, ou le côté, on aura beſoin de réſoudre

une équation du second degré. Supposons qu'on cherche la racine ou le côté $x$ du nombre triangulaire 91. En substituant $x$ à la place de $n$, nous aurons $\frac{xx+x}{2} = 91$, ou $xx + x = 182$, & $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{729}{4}} = 13$.

Soit $a$ un nombre $m$ gone donné, dont il s'agit de déterminer la racine, on aura l'équation $\frac{(m-2)\cdot xx - (m-4)x}{2} = a$, ou $(m-2)\,xx - (m-4)\cdot x = 2a$, équation qui étant résolue par la méthode du second degré, donne $x = \frac{m-4+\sqrt{[8(m-2)a+(m-4)^2]}}{2\cdot(m-2)}$.

Si l'on demandoit de trouver un nombre triangulaire qui fût en même temps un quarré, en désignant ce quarré par $\frac{pp}{4qq}\cdot xx$, nous aurions $\frac{xx+x}{2} = \frac{ppxx}{4qq}$, $xx + x = \frac{ppxx}{2qq}$, $2qqx + 2qq = ppx$, & $x = \frac{2qq}{pp-2qq}$. Substituant donc dans cette formule des nombres quelconques à la place de $q$ & de $p$, pourvu qu'il en résulte un nombre entier positif pour $x$ (car nous supposons que les nombres trigonaux sont entiers & positifs), le problême sera résolu. Si $p = 3$ & $q = 2$, on aura $x = 8$, dont le nombre triangulaire qui est 36 est en même temps un quarré. Si nous supposons $p = 17$, & $q = 12$, nous trouverons $x = 288$ & le nom-

bre trigonal $\frac{x(x+1)}{2}$ ſera $= 144 \times 289$, dont la racine eſt $= 12 \times 17 = 204$.

Mais ſi étant donné un nombre quelconque $x$, on appelle ſon nombre trigonal $\frac{x(x+1)}{2}$; en prenant le nom de nombre trigonal dans ce ſens, $x$ pourra être un nombre quelconque poſitif ou négatif, entier ou bien fractionnaire. Si nous faiſons $p = 7$ & $q = 5$, nous aurons $x = -50$, dont le triangle 1225 eſt en temps celui de $+49$ & le quarré de 35. Si $p = 3$ & $q = 1$, on aura $x = \frac{1}{7}$, & le nombre trigonal $\frac{xx+x}{2}$ eſt $= \frac{2}{49}$, quarré de $\frac{1}{7}$.

Les *ſuites des puiſſances des nombres* ſont celles des quarrés, cubes, &c. de la progreſſion des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. On appelle *progreſſion harmonique*, la ſuite des quotients d'un même nombre diviſé par les termes conſécutifs d'une progreſſion arithmétique : telle eſt la ſérie $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, &c. *.

On appelle *ſéries du premier ordre*, celles dont les premieres différences ſont conſtantes : telles ſont les progreſſions arithmétiques. *Les ſéries du ſecond ordre* ſont celles dont les ſecondes différences ſont conſtantes : *celles du troiſiéme*, *quatriéme*, &c. *ordre* ſont celles dont les troiſiémes, quatriémes, &c. différences ſont conſtantes. Les ſéries

* Parce que ſi on prend trois termes conſécutifs dans une telle ſuite, ils ſont en proportion harmonique.

dans leſquelles on peut arriver à des différences conſtantes, ſont appellées *algébriques*. Si l'on multiplie les termes d'une ſérie algébrique, par les termes correſpondants d'une ſérie géométrique (c'eſt-à-dire, le premier de l'une par le premier de l'autre, le ſecond par le ſecond, &c.), l'on a une ſérie *algébrique-géométrique*. Les *ſéries récurrentes* ſont celles dans leſquelles chaque terme eſt déterminé par un certain nombre de termes précédents multipliés par des conſtantes. On les appelle *récurrentes du premier, du ſecond, du troiſiéme, &c. ordre*, ſelon que, pour avoir un terme, on a beſoin d'un ſeul terme précédent, ou de deux, ou de trois, &c. Ainſi la ſérie 1, 1, 3, 7, 17, &c. eſt récurrente du ſecond ordre, parce que chaque terme, à compter du troiſiéme, eſt égal à la ſomme des deux précédens multipliés le premier par 1, & l'autre (c'eſt celui qui précéde immédiatement le terme cherché) par 2 *.

Cherchons maintenant la ſomme des puiſſances des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 ... ∞.

93. LEMME. *Dans une progreſſion arithmétique* ÷ a. b. c. e. &c. *dont la différence* = 1, *en premier lieu le quarré d'un terme quelconque eſt égal au quarré du premier terme, plus au double de la ſomme des termes précédents, plus au nombre des termes précédents. En ſecond lieu le cube d'un terme quelconque eſt égal à la ſomme faite, 1° du cube du premier terme, 2° du triple de la ſomme des quarrés*

* Pour former une ſuite récurrente du ſecond ordre, ayant pris les deux premiers termes à volonté, on multipliera le premier par *a* & le ſecond par *b*, la ſomme des produits donnera le troiſiéme. Multipliant le ſecond par *a* & le troiſiéme par *b*, la ſomme des produits donnera le quatriéme; & ainſi de ſuite.

*des termes précédents, 3° du triple de la ſomme des termes précédents, & enfin du nombre des termes précédents.* Car la progreſſion $\div a \cdot b \cdot c \cdot$ &c. eſt $= \div a \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot$ &c.; donc $c = b + 1$, $c^2 = b^2 + 2b + 1$; & parce que $b = a + 1$, l'on a $b^2 = a^2 + 2a + 1$; donc en ſubſtituant, $c^2 = a^2 + 2b + 1$; donc 1°, &c. de même

$$+ 2a + 1$$

$c^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1$, $b^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; donc en ſubſtituant cette valeur de $b^3$ dans l'équation précédente, l'on aura

$c^3 = a^3 + 3b^2 + 3b + 1$; donc 2°, &c.

$$+ 3a^2 + 3a + 1$$

94. THÉOREME. 1°. *La ſomme de la progreſſion* 1, 1, 1, &c. *à l'infini eſt* $= \infty$. 2°. *La ſomme* S *des nombres naturels continuée à l'infini* $1, 2, 3, 4, 5 \cdots \infty$ eſt $= \frac{\infty^2}{2}$. 3°. *La ſomme* p *des quarrés* 1, 4, 9, 16, $25 \cdots \infty^2$ *des nombres naturels eſt un infiniment grand du troiſiéme ordre, c'eſt-à-dire,* $p = \frac{\infty^3}{3}$. La premiere partie du théorême eſt évidente; car l'unité priſe une infinité de fois, donne une quantité plus grande qu'aucune quantité aſſignable. La ſeconde partie ſe démontre facilement : car par le lemme précédent, le quarré du terme $\infty$ eſt $\infty^2 = 1$ (quarré du premier terme) $+ 2S - 2\infty$ (c'eſt-à-dire, plus le double de la ſomme des termes précédents, laquelle ſomme $= S - \infty$) $+ \infty - 1$ (nombre des termes précédents); donc réduiſant & tranſpoſant, $\infty^2 + \infty = 2S$, ou (ſelon le n°. 91)

$\infty^2 = 2S$, ou $S = \frac{\infty^2}{2}$, en négligeant $\infty$ qui disparoît devant $\infty^2$. Pour démontrer la troiſiéme partie, je remarque que par le lemme précédent, $\infty^3$ eſt $=1$ (cube du premier terme) $+ 3p - 3\infty^2$ (triple de la ſomme des quarrés des termes précédents) $+ 3 \times \left(\frac{\infty^2}{2} - \infty\right)$ (triple de la ſomme des termes précédents) $+ \infty - 1$ (nombre des termes précédents); donc réduiſant & tranſpoſant, $\infty^3 + 3\infty^2 - 3\frac{\infty^2}{2} + 2\infty = 3p$; donc (en négligeant les infinis des ordres inférieurs (91)) $\infty^3 = 3p$, & $p = \frac{\infty^3}{3}$; donc, &c. En général la ſomme des puiſſances $m$ des nombres naturels 1, 2, 3 à l'infini eſt $= \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$.

95. Dans la ſuite la lettre $x$ déſignera le nombre des termes. Le *terme général* d'une ſuite (nous le déſignerons par T) eſt une fonction de $x$, dans laquelle, ſi on ſubſtitue ſucceſſivement à la place de $x$ les nombres 1, 2, 3, &c., on obtiendra tous les termes de la ſérie. Ainſi la ſérie 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, &c. a pour terme général $6x - 5$. Si dans ce terme général nous ſubſtituons 3, *par exemple*, au lieu de $x$, nous aurons le troiſiéme terme 13. Le *terme ſommatoire* S d'une ſérie eſt une fonction de $x$, dans laquelle, ſi à la place de $x$ on ſubſtitue un nombre entier poſitif, on aura la ſomme d'autant de termes que ce nombre contient d'unités. Le terme ſommatoire de la ſérie, dont nous venons de parler, étant $3x^2 - 2x$, ſi on ſubſtitue 7 à la place de $x$, on aura 133, ſomme des 7 premiers termes de la ſérie. En ſuppoſant la ſérie continuée à l'infini, la ſomme devient $S = 3\infty^2 - 2\infty = 3\infty^2$ (91). Il ſeroit à ſouhaiter qu'étant donné le terme général d'une ſérie, on pût

trouver le terme ſommatoire correſpondant : mais il y a peu d'apparence que ce problême général ſoit jamais réſolu ; c'eſt pourquoi il eſt à propos de chercher des formules générales par leſquelles on puiſſe déterminer la ſomme de pluſieurs ſéries par leur terme général.

96. THÉOREME. *Dans une ſérie quelconque le terme général eſt égal à la ſomme de tous les termes juſqu'à* x *inclusivement, moins la ſomme de tous les termes juſqu'à* $x-1$ *inclusivement.* La choſe eſt évidente ; car ce qui reſte doit être égal au terme du rang $x$. De ce théorême ſi ſimple, il ſuit qu'en appellant S la ſomme de tous les termes pris juſqu'à $x$, & S′ celle de tous les termes pris juſqu'à $x-1$ inclusivement, on aura le terme général $T = S - S'$ *, mais il faut pour cela que S exprime la vraie ſomme, ce qu'on connoîtra ſi en faiſant $x = 1$, on trouve $S = T$. Si alors $S = T - a$ **, T ſera $= S + a$ (vraie ſomme) ; au contraire il faudra ôter $a$ de S ſi T eſt plus petit que S, c'eſt-à-dire, ſi $T + a = S$, & l'on aura $T = S - a$ (vraie ſomme) ; ainſi quoique $\frac{6x-3}{2} = \frac{3x^2-1}{2} - \left(\frac{3\cdot(x-1)^2-1}{2}\right)$, cependant la ſérie dont le terme général eſt $\frac{6x-3}{2}$ n'a pas pour terme ſommatoire $\frac{3x^2-1}{2}$, qui, en faiſant $x = 1$, devient $\frac{1}{2} = 1$, tandis que le terme général $\frac{6x^3-3}{2}$, devient $\frac{3}{2}$ ; donc le terme général ſurpaſſe alors S de $\frac{1}{2}$ ; donc $S + a = S + \frac{1}{2} = \frac{3x^2-1+1}{2} = \frac{3x^2}{2}$, véritable terme ſommatoire de la ſérie dont le terme général eſt $T = \frac{6x-3}{2}$.

Mais il faut bien remarquer que $T = S - S'$ exprime deux ſéries, dont le terme général de l'une $= S$, & celui

* On voit bien que pour avoir T, il faut avoir S ou la ſomme des termes exprimée par une fonction de $x$, autrement T ne ſeroit pas exprimé par une fonction de $x$.

** $a$ eſt une quantité conſtante.

de l'autre $= S'$. En formant ces deux ſéries on verra que le premier terme de la premiere détruit le ſecond de la ſeconde, le ſecond de la premiere, le troiſiéme de la ſeconde, &c.; & alors comme il ne reſte rien que la différence du dernier de la premiere au premier de la ſeconde, la méthode de trouver T expoſée ci-deſſus devient inutile. Soit $S = \frac{x}{2+x}$, alors $S' = \frac{x-1}{1+x}$, & $T = S - S' = \frac{x}{2+x} - \left(\frac{x-1}{1+x}\right)$.

En formant les ſéries dont S & S' ſont les termes généraux & retranchant celle qui répond à S', de celle qui répond à S, l'on a $T = S - S' = \frac{x}{2+x} - \left(\frac{x-1}{1+x}\right) = \frac{x}{2}$

$$(S)\ \tfrac{1}{1}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{4}{6} \ldots + \frac{x-1}{1+x}, \frac{x}{2+x}$$
$$-(S')\ \tfrac{-0}{2}, \tfrac{-1}{3}, \tfrac{-2}{4}, \tfrac{-3}{5} \ldots - \left(\frac{x-1}{1+x}\right)$$
$$= \frac{x}{2+x} - \frac{0}{1} = \frac{x}{2+x},$$

c'eſt-à-dire, qu'après avoir retranché les termes de la ſérie S' (ſi ces termes n'étoient pas retranchés, ils auroient le ſigne +) de ceux de la ſérie S, il reſte le terme général de la ſérie S, ce qui ne donne rien à connoître. Ainſi la méthode du théorême ne peut réuſſir, tandis que le terme général aura la forme dont nous venons de parler. Il faut donc tâcher de donner une autre forme à $T = S - S'$.

Si on réduit au même dénominateur la valeur de $T = S - S' = \frac{x}{2+x} - \left(\frac{x-1}{1+x}\right)$, on aura $S - S' = \frac{2}{(1+x)\cdot(2+x)} = T$, & la ſérie correſpondante ſera $\frac{2}{1\cdot 2}, \frac{2}{2\cdot 3}, \frac{2}{3\cdot 4}, \frac{2}{4\cdot 5}, \frac{2}{5\cdot 6}$, &c. dont le terme ſommatoire ſera $\frac{x}{2+x}$. Si $x = \infty$, le terme ſommatoire S de cette ſérie deviendra $S = \frac{\infty}{\infty} = 1$.

97. Pour faire l'application de ce que nous venons de dire, cherchons quelles ſont les ſéries dont le terme ſommatoire contient $x$ dans tous ſes termes. Qu'on demande, *par exemple*,

quelle eſt la ſérie dont le terme ſommatoire eſt $= ax$, $a$ étant une quantité conſtante. Ecrivant $x - 1$ au lieu de $x$, j'ai $S' = ax - a$, & $T = S - S' = a$; donc tous les termes ſont égaux à $a$, & la ſérie eſt $a, a, a, a$, dont la ſomme $S = ax$*.

Je cherche enſuite quelles ſont les ſéries pour leſquelles on a $S = ax + bx^2$. Subſtituant $x - 1$ au lieu de $x$, je trouve $S' = ax - a + bx^2 - 2bx + b$, & $S - S' = T = (a - b + 2bx)$. De ce terme général je forme les deux ſéries $\begin{matrix} a, a, a, a, \&c. \\ b, 3b, 5b, 7b, \&c. \end{matrix}$ L'une de ces ſéries eſt la ſuite des quantités égales, la ſeconde eſt une progreſſion arithmétique, dont les termes croiſſent comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. Et enfin la ſérie qui réſulte de ces deux ſéries, ajoutées terme à terme, eſt une progreſſion arithmétique, dont la différence eſt $= 2b$. Donc ſi le terme général d'une ſérie contient ſeulement $x$ linéaire, c'eſt-à-dire, $x$ élevé à la premiere puiſſance, on déterminera facilement le terme ſommatoire S, en faiſant $= a - b$ le terme qui ne contient pas $x$, & le coefficient de $x = 2b$. *Par exemple*, ſuppoſant $T = 15 + 3x$, je fais $15 = a - b$, & $3 = 2b$; donc $b = \frac{3}{2}$ & $a = 15 + \frac{1}{2} = \frac{33}{2}$; ainſi $S = ax + bx^2 = \frac{33x + 3x^2}{2}$.

98. Si l'on a une ſérie telle que 3, 7, 11, &c. dont les premieres différences ſoient conſtantes, on trouvera facilement le terme T & le terme S. Car ſuppoſant le premier terme 3 de cette ſérie $= (a - b + 2bx)$ en faiſant $x = 1$; ſuppoſant enſuite le ſecond terme $7 = (a - b + 2bx)$, en faiſant $x = 2$, l'on aura $3 = a + b$, & $7 = a + 3b$. Retranchant la premiere équation de la ſeconde, il vient $7 - 3$ ou $4 = 2b$, & $b = 2$. Subſtituant cette valeur de $b$ dans la premiere, l'on trouve $a = 1$; donc $T = S - S' = (a - b + 2bx) = -1 + 4x$, & $S = ax + bx^2 = x + 2x^2$.

Si l'on ſuppoſe $S = ax + bx^2 + cx^3$; en ſubſtituant $x - 1$ au lieu de $x$, S ſe changera en $S'$, & l'on aura

* C'eſt-à-dire, ſi $x$ eſt $= 5$, *par exemple*, la ſomme des 5 premiers termes ſera $5a$, ce qui eſt évident.

T =

$T = S - S' = \begin{pmatrix} a \\ -b & +2bx & \cdot \\ +c & & +3cx^2 \\ & -3cx & \end{pmatrix}$. De ce terme général je forme une série que je divise en trois ; la premiere est composée de termes égaux ; la seconde est celle des quantités qui suivent la progression des nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. ; la troisiéme est une série, dont les secondes différences sont constantes & égales à $6c$, laquelle propriété convient nécessairement à la série totale qui résulte de ces trois ajoutées terme à terme.

$a, a, a, a$, &c.
$b, 3b, 5b, 7b$, &c.
$c, 7c, 19c, 37c$, &c.

De-là il suit qu'étant donné le terme général $T = 1 - x + x^2$ pour trouver le terme sommatoire S de la série à laquelle appartient ce terme général, il faut faire $1 = a - b + c$, $-1 = 2b - 3c$, $1 = 3c$ *. De la derniere équation l'on tire $c = \frac{1}{3}$. Substituant cette valeur dans les deux autres, l'on a $1 = a - b + \frac{1}{3}$, $-1 = 2b - 1$. La derniere donne $b = 0$; donc en substituant, l'on a $1 = a - b + \frac{1}{3} = a - 0 + \frac{1}{3}$, ou $a = \frac{2}{3}$. Substituant les valeurs de $a$, $b$, $c$ dans la valeur générale de S, l'on a $S = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^3$, terme sommatoire de la série, dont le terme général est $T = (1 - x + x^2)$.

COROLLAIRE. Il suit de-là qu'on peut facilement déterminer soit S, soit T dans une série dont les différences secondes sont constantes. Car par la comparaison de trois termes on pourra connoître $a$, $b$, $c$, qui feront connoître T & S. Soit la série 9, 13, 21, 33, 49, &c. dont les secondes différences sont constantes & égales à 4. Comparant le premier terme 9 avec le terme général dans la supposition de $x = 1$, le second terme 13 avec le même terme général dans la supposition de $x = 2$, & enfin le troisiéme terme 21 avec le terme général dans la supposition de $x = 3$, on trouvera trois équations, que j'appellerai *du premier ordre*. Otant la premiere de la seconde, & celle-ci de la troisiéme, l'on aura deux équations *du second ordre* : ôtant enfin la premiere des secondes de la seconde, l'on a une équation que j'appelle *du troisiéme ordre*.

* C'est-à-dire qu'il faut égaler les quantités constantes qui se trouvent dans le terme général donné, & dans la formule du terme général T donnée ci dessus ; l'on égale de même les coefficiens d'une même puissance de $x$.

| *Equations du premier ordre.* | *Equations du second ordre.* | *Equations du troiſiéme ordre.* |
|---|---|---|
| $9 = a + b + c$ | $4 = 2b + 6c$ | $4 = 6c.$ |
| $13 = a + 3b + 7c$ | $8 = 2b + 12c$ | |
| $21 = a + 5b + 19c$ | | |

De l'équation $4 = 6c$, l'on tire $c = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Cette valeur de $c$ ſubſtituée dans la premiere du ſecond ordre, donne $b = 0$; ſubſtituant les valeurs de $c$ & de $b$ dans la premiere du premier ordre, l'on a l'équation $a = 8 + \frac{1}{3}$; donc $T = 9 - 2x + 2x^2$, & $S = (8 + \frac{1}{3})x + \frac{2}{3}x^3$.

On trouvera de même que le terme ſommatoire S étant $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$, le terme général ſera

$$S - S' = T = \left\{ \begin{array}{l} a \\ -b + 2bx \\ +c - 3cx + 3cx^2 \\ -d + 4dx - 6dx^2 + 4dx^3 \end{array} \right\}.$$

De ce terme général l'on pourra former une ſérie, dont les troiſiémes différences ſeront conſtantes. Par la même méthode, ſi $S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + fx^5$, on aura

$$T = \left\{ \begin{array}{l} a \\ -b + 2bx \\ +c - 3cx + 3cx^2 \\ -d + 4dx - 6dx^2 + 4dx^3 \\ +f - 5fx + 10fx^2 - 10fx^3 + 5fx^4 \end{array} \right\}.$$

De ce terme général on peut former une ſérie dont les quatriémes différences ſoient conſtantes.

COROLLAIRE II. De ce que nous venons de dire, il ſuit 1°. qu'une ſérie, dont les différences de l'ordre $m$ ſont conſtantes, a pour terme général une formule *, dans laquelle $x$ eſt élevé à la puiſſance $m$, & pour terme ſommatoire une formule

* Cette formule eſt $T = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots + px^m$. En faiſant $= a$ toutes les quantités conſtantes, toutes les quantités qui multiplient $x$ étant $= b$, &c.

dans laquelle $x$ a l'exposant $m + 1$, & de plus tous les termes de S sont affectés de quelque puissance de $x$. 2°. Que pour trouver le terme T d'une série, dont les différences d'un ordre quelconque sont constantes, il suffit, ayant fait successivement $x = 1, 2, 3, 4$, &c., de comparer autant de premiers termes de la série qu'il y a d'unités dans $m + 1$ (si la série est de l'ordre $m$ *) avec la formule générale qui convient à cette série, d'où l'on tirera les équations nécessaires pour déterminer $a$; $b$, $c$, &c.

EXEMPLE. La série 2, 9, 24, 50, 90, &c. ayant ses troisiémes différences constantes, je prends la formule du troisiéme degré $a + bx + cx^2 + dx^3$. Faisant successivement $x = 1, 2, 3, 4$, j'ai quatre équations du premier ordre.

*Equations du premier ordre.*

$a + b + c + d = 2$
$a + 2b + 4c + 8d = 9$
$a + 3b + 9c + 27d = 24$
$a + 4b + 16c + 64d = 50$

*Equations du second ordre.*

$b + 3c + 7d = 7$
$b + 5c + 19d = 15$
$b + 7c + 37d = 26$

*Equations du troisiéme ordre.*

$2c + 12d = 8$
$2c + 18d = 11$

*Equation du quatriéme ordre.*

$6d = 3.$

Retranchant la premiere équation du premier ordre de la seconde, celle-ci de la troisiéme, &c. j'ai les équations du second ordre qui, en retranchant la premiere de la seconde, & celle-ci de la troisiéme, donnent les équations du troisiéme ordre. Retranchant la premiere du troisiéme ordre de la seconde, j'ai l'équation du quatriéme ordre $6d = 3$, d'où je tire $d = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Substituant cette valeur de $d$ dans la premiere du troisiéme ordre, l'on trouve $c = 1$. Substituant ces valeurs de $d$ & de $c$ dans la premiere du second ordre, l'on a $b = \frac{1}{2}$. Substituant ces valeurs de $b$, $c$, $d$ dans la premiere du premier ordre, l'on trouve $a = 0$; donc $T = a + bx + cx^2 + dx^3 = \frac{1}{2}x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$. Je suppose $S = Ax + Bx^2$

* C'est-à-dire si les différences de l'ordre $m$ sont constantes.

$+Cx^3+Dx^4$. Donc le terme général est

$$S-S'=T=\left\{\begin{matrix} A \\ -B+2Bx \\ +C-3Cx+3Cx^2 \\ -D+4Dx-6Dx^2+4Dx^3 \end{matrix}\right\}.$$

La comparaiſon des termes donne les équations ſuivantes :

$$\begin{matrix} A-B+C-D=0 \\ 2B-3C+4D=\frac{1}{2} \\ 3C-6D=1 \\ 4D=\frac{1}{2} \end{matrix}$$

d'où l'on tire $D=\frac{1}{8}$, $C=\frac{7}{12}$, $B=\frac{7}{8}$, $A=\frac{1}{12}$. Subſtituant ces valeurs dans S, on a $S=\frac{1}{12}x+\frac{7}{8}x^2+\frac{7}{12}x^3+\frac{1}{8}x^4$. On voit par-là qu'on peut toujours déterminer S & T dans une ſérie, dans laquelle on peut parvenir à des différences conſtantes.

99. Venons aux ſéries dans leſquelles S eſt une fraction dont les deux termes ſont affectés d'une même puiſſance de $x$. Soit $S=\frac{fx}{a+bx}$. Ecrivant $x-1$ au lieu de $x$, l'on a S', & retranchant S' de S, il vient $S-S'=T=\frac{fx}{a+bx}-\left(\frac{fx-f}{a+b\cdot(x-1)}\right)=\frac{af}{[a+b\cdot(x-1)](a+bx)}$, en réduiſant les fractions au même dénominateur. Si de ce terme général on forme une ſérie, ſon terme ſommatoire ſera $S=\frac{fx}{a+bx}$. Mais la ſérie que donne le terme général que nous venons de trouver, eſt $\frac{af}{a\cdot(a+b)}$, $\frac{af}{(a+b)\cdot(a+2b)}$, $\frac{af}{(a+2b)\cdot(a+3b)}$, &c. Or il eſt viſible que les diviſeurs forment les deux ſéries que l'on voit ici.

$a$, $a+b$, $a+2b$, &c.
$a+b$, $a+2b$, $a+3b$, &c.

dans leſquelles le premier terme de la ſeconde eſt égal au ſecond de la premiere, le ſecond de la ſeconde au troiſiéme de la premiere, & le dernier de de la premiere à l'avant dernier de la ſeconde. La différence dans les deux ſéries eſt $=b$. Si dans S on fait $x=\infty$, l'on aura $S=\frac{f}{b}$. Soit la ſérie $\frac{6}{2\cdot 7}$, $\frac{6}{7\cdot 12}$, $\frac{6}{12\cdot 17}$, $\frac{6}{17\cdot 22}$, &c., le

numérateur de ces fractions étant constant, & les séries 2, 7, 12, 17 &c. que forment les diviseurs étant les mêmes 7, 12, 17, 22 &c. excepté que l'une commence au second terme de l'autre, il est facile de voir qu'elle appartient à notre formule générale. La comparaison fait voir que $b = 5$ & $a = 2$. Pour trouver $f$ comme l'on a l'équation $af = 6$, ou (à cause de $a = 2$) $2f = 6$, il est visible que $f = \frac{6}{2} = 3$; donc $S = \frac{fx}{a+b\cdot x} = \frac{3x}{2+5x}$; & à l'infini $S = \frac{3}{5}$.

Soit maintenant $S = \frac{fx + mx^2}{[a+b(x-1)]\cdot(a+bx)}$. Substituant $x - 1$ à la place de $x$, l'on aura $S'$, & $S - S' =$

$$T = \frac{\begin{matrix} af - bfx \\ -am - bmx \\ + 2amx \end{matrix}}{[a+b\cdot(x-2)]\,[2+b\cdot(x-1)]\cdot(a+bx)}.$$

Dans cette formule le numérateur est le terme général d'une série du premier ordre, pourvu que le coefficient de $x$ ne soit pas $= 0$ : car dans ce cas le numérateur seroit le terme général d'une suite de quantités égales. Les facteurs du diviseur représentent chacun une série du premier ordre & de plus la même, avec cette différence que la seconde commence au second terme de la premiere, & la troisiéme au troisiéme terme de la premiere.

Soit la série $\frac{4}{2\cdot3\cdot4}, \frac{7}{3\cdot4\cdot5}, \frac{10}{4\cdot5\cdot6}, \frac{13}{5\cdot6\cdot7}$, &c. Le terme général de la série des numérateurs est $T = 1 + 3x$; & les séries des deux premiers facteurs du dénominateur sont dans le cas dont nous venons de parler. Le terme général de la série que forment les troisiémes facteurs est $a + bx = 3 + x$; de sorte que $a = 3$, $b = 1$. Substituant ces valeurs de $a$ & de $b$ dans le terme général qui convient à notre série, on en déduira $3f - 3m = 1$, $-f - m + 6m = 3$; d'où l'on tirera $m = \frac{1}{2\cdot3}$, $f = \frac{7}{2\cdot3}$; donc $S = \frac{7x + 5x^2}{2\cdot3\cdot(2+x)\cdot(3+x)}$, & $S = \frac{1}{6}$, en faisant $x = \infty$.

Si le numérateur du terme général T étoit divisible par un des facteurs extrêmes, la division étant faite, il appartiendroit à l'avant derniere formule. Mais si le facteur moyen manquoit, il faudroit multiplier le numérateur & le dénominateur par ce

facteur, afin que le terme général puiſſe ſe trouver dans le cas de la formule que nous venons de trouver.

Soit maintenant $S = \frac{fx + mx^2 + nx^3}{[a+b\cdot(x-2)]\,[a+b\cdot(x-1)]\cdot(a+bx)}$. On trouvera de même le terme T correſpondant, dont les facteurs du dénominateur ſeront des termes généraux de quatre ſéries qui ne ſeront qu'une & même ſérie, avec cette différence que la ſeconde aura pour premier terme le ſecond de la premiere, la troiſiéme le 3^e, & la quatriéme le 4^e; & $x$ ne montera qu'au ſecond degré dans le numérateur de T; ſi quelque facteur manque dans le dénominateur, du terme général, on multipliera les deux termes de la fraction par le facteur qui manque, &c. *.

100. Paſſons aux ſéries dans leſquelles le terme ſommatoire renferme une quantité conſtante multipliée par une quantité exponentielle **. Soit $S = al^x - a$. Subſtituant $x - 1$ au lieu de $x$, on a $S' = al^{x-1} - a = \frac{al^x - la}{l}$; donc $S - S' = T = \frac{a(l-1)l^x}{l}$. Si l'on ſuppoſe $x = 1$, l'on aura $S = T$. Il eſt aiſé de voir que le terme T déſigne une progreſſion métrique, dont par conſéquent on peut toujours trouver la ſomme S. Si $l > 1$, la ſérie eſt croiſſante; & faiſant $x = \infty$, S ſera auſſi infinie. Si $S = 1$, alors, $T = 0$ & $S = 0$; ſi $l < 1$, la ſérie eſt décroiſſante, & alors ſuppoſant $x = \infty$, on auroit $al^\infty - a$, quantité négative. Pour rendre S poſitive, il faut ſuppoſer $S = a - al^x$, & $T = \frac{a(1-l)l^x}{l}$; & alors en ſuppoſant $x = \infty$, l'on a $S = a$.

Soit maintenant $S = (a + bx)\cdot l^x - a$. On trouvera $S - S' = T = \frac{[a(l-1)+b+bx\cdot(l-1)]\cdot l^x}{l}$. Si $l < 1$, il

* Si le plus grand expoſant de $x$ dans le numérateur de T n'étoit pas plus petit de deux unités que le nombre des facteurs du dénominateur, on verroit ſi l'on peut le rendre tel par la diviſion, & l'on chercheroit à part le terme S du quotient, qu'on joindroit avec le terme S de la fraction, la ſomme donneroit le terme ſommatoire cherché.

** Une quantité *exponentielle* eſt une quantité affectée d'un expoſant variable, comme $a^x$ qui devient $a^2$, en ſuppoſant $x = 2$, & $a^3$ en faiſant $x = 3$.

faut changer tous les signes, soit dans T, soit dans S, afin d'éviter les quantités négatives.

De même si $S = (a + bx + cx^2) \cdot l^x - a$, T sera

$$\frac{\begin{matrix} al & +blx & +clx^2 \\ -a & -bx & \\ +b & +2cx & -cx^2 \\ -c & & \end{matrix}}{l} \times l^x.$$ Si $l < 1$, on changera les signes dans S & dans T. On voit par-là qu'une série dont la somme est exprimée par une formule algébrique, multipliée par une quantité exponentielle, & dont on ôte une constante, a pour terme général une formule algébrique du même degré, & multipliée par la même exponentielle.

Supposons *le terme général* d'une série $= (1 + x + x^2) \cdot (2^x)$. Je fais $S = (a + bx + cx^2) \cdot 2^x - a$. Substituant $x - 1$ à la place de $x$, pour avoir S', l'on aura $S - S' = T$

$$= \frac{\begin{matrix} a & +bx & +cx^2 \\ -a & & \\ +b & -bx & \\ -c & +2cx & -cx^2 \end{matrix}}{2} \cdot 2^x.$$ La comparaison me donne $a + \frac{-a+b-c}{2} = 1$, $b - \frac{b+2c}{2} = 1$, $c - \frac{c}{2} = 1$; donc $c = 2$, $b = -2$, $a = 6$; donc $S = (6 - 2x + 2x^2) \times 2^x - 6$. Si l'on avoit $T = (\frac{2}{3} + \frac{1}{2}x + x^2) \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)$; parce que la quantité exponentielle est plus petite que l'unité, je supposerois $S = a - \left((a + bx + cx^2) \times \frac{1}{2^x}\right)$. Ensuite je trouverois facilement S', & $S - S' = T$, & par comparaison les valeurs de $a$, $b$, $c$, d'où je tirerois $S = \frac{22}{7} - \left((\frac{22}{7} + \frac{3}{2}x + x^2) \cdot \frac{1}{2^x}\right) = \frac{22}{7}$, en faisant $x = \infty$.

Les séries qui sont représentées par les termes généraux de la forme dont nous venons de parler, sont algébrico-géométriques.

De ce que nous avons dit jusqu'ici, il suit qu'on peut trouver la somme d'une série quelconque qui résulte de l'addition ou de la soustraction des séries, soit géométriques, soit algébrico-géométriques : car on peut trouver le terme général de chacune des séries qu'on ajoute ou qu'on soustrait, & le

terme général de la ſomme ou de la différence, ſera égal à la ſomme ou à la différence des termes généraux de ces ſéries, ce qu'on doit entendre de même du terme ſommatoire. Mais il n'eſt pas facile de connoître ſi une ſérie propoſée a été formée par l'addition ou par la ſouſtraction des ſéries géométriques ou algébrico-géométriques; or je dis que les ſéries récurrentes ſont de ce genre. Pour le prouver:

101. Soit $T = al^x$, d'où l'on tire la ſérie géométrique $al, al^2, al^3$, &c. dans laquelle chaque terme eſt égal au précédent multiplié par la conſtante $l$: ainſi c'eſt une ſérie récurrente du premier ordre. Si l'on fait $x - l = 0$, il eſt évident que $l$ ſera la racine de cette équation. Pour trouver $a$, lorſqu'on connoît $l$, il ſuffit, en ſuppoſant $x = 1$, de comparer le premier terme de la ſérie donnée avec $al$. Soit, *par exemple*, la ſérie récurrente du premier ordre $6, 4, 2\frac{2}{3}, 1\frac{7}{9}, \frac{5}{27}, \frac{64}{81}$, &c. qui, ayant ſuppoſé le premier terme $= 6$, ſe forme en multipliant chaque terme par $\frac{2}{3}$. Donc $l = \frac{2}{3}$, & $T = a \cdot (\frac{2}{3})^x$. Suppoſant $x = 1$, l'on a $6 = \frac{2}{3}a$, & $a = 9$; donc $T = 9 \cdot (\frac{2}{3})^x = \frac{2^x \cdot 3^2}{3^{x-1}}$.

Soit maintenant $T = al^x + bf^x$, d'où l'on tire une ſérie compoſée des deux ſuivantes $\left.\begin{matrix} al, al^2, al^3, \text{ &c.} \\ bf, bf^2, bf^3, \text{ &c.} \end{matrix}\right\}$. La ſérie qui réſulte de ces deux ajoutées terme à terme, eſt une ſérie récurrente du ſecond ordre; car chaque terme de cette ſérie ſe trouve en multipliant le ſecond (c'eſt celui qui précéde immédiatement celui qu'on cherche) par $l + f$, & le premier (c'eſt celui qui précéde le ſecond) par $-lf$. En effet en multipliant $al^{x-1} + bf^{x-1}$ par $l + f$, & $al^{x-2} + bf^{x-2}$ par $-lf$, la ſomme de ſes deux produits donne $al^x + bf^x$, terme ſuivant (on regarde cette quantité comme un ſeul terme). Soit ſuppoſé $l + f = h$, $-fl = i$; donc $h^2 = l^2 + 2lf + f^2$. En ajoutant $4i$ au premier membre, & $-4fl$ au ſecond, on aura $h^2 + 4i = l^2 - 2lf + f^2$, & $\sqrt{(h^2 + 4i)} = l - f$; donc $h + \sqrt{(h^2 + 4i)} = 2l$, $\frac{h + \sqrt{(h^2 + 4i)}}{2} = l$, & $\frac{h - \sqrt{(h^2 + 4i)}}{2} = f$.

Ces valeurs de $l$ & de $f$ ſont les racines de l'équation $x^2 - hx - i = 0$; car $fl = -i$, & $l + f = h$*. $l$ & $f$ étant une fois

* Dans une équation du ſecond degré le dernier terme eſt le produit des racines; l'on ſait auſſi que la ſomme des racines priſes avec un ſigne contraire donne le coefficient du ſecond terme d'une équation.

connues, pour déterminer $a$ & $b$, il ſuffit de ſuppoſer le premier terme de la ſérie $= al + bf$, & le ſecond $= al^2 + bf^2$. Si l'on ſuppoſe $i = -1$, $h = 3$, & les deux premiers termes de la ſérie 3, 2, pour avoir la ſérie récurrente du ſecond ordre 3, 2, 3, 7, 18, 47, 123, &c. on trouvera $l = \frac{h + \sqrt{(h^2+4i)}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, & $f = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (racines de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$). Pour avoir $a$ & $b$, on fera $a \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + b \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3$, $a \cdot \frac{9+6\sqrt{5}+5}{4} + b \cdot \frac{9-6\sqrt{5}+5}{4} = 2$, ou $a \cdot \frac{7+3\sqrt{5}}{2} + b \cdot \frac{7-3\sqrt{5}}{2} = 2$. De la premiere équation multipliée par 3, retranchant la derniere, on tire $a + b = 7$, cette valeur étant ſubſtituée dans la premiere, donne $\frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot (a - b) = 3$; donc $a - b = \frac{-15}{\sqrt{5}} = -3\sqrt{5}$. Ajoutant cette derniere équation à l'avant-derniere, & l'en retranchant enſuite, l'on trouve $a = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$, & $b = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$; donc $T = \frac{(7-3\sqrt{5})}{2} \times \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \times \frac{(3-\sqrt{5})^x}{2^x}$. Si $h^2 = -4i$, alors les racines de l'équation $x^2 - hx - i = 0$ ſont égales; & dans ce cas la méthode précédente conduit à une équation, ou identique, ou abſurde. Ainſi ſi l'on ſuppoſe $h = 3$, $i = \frac{-9}{4}$, & les deux premiers termes de la ſérie 1, 1, pour avoir la ſérie récurrente 1, 1, $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{-17}{16}$, $\frac{-81}{16}$ &c. vous trouverez $l = f = \frac{3}{2}$. C'eſt pourquoi T devroit être $= a\left(\frac{3}{2}\right)^x + b\left(\frac{3}{2}\right)^x$, & ſuppoſant $x = 1$, & enſuite $= 2$, l'on auroit $\frac{3}{2} \cdot (a + b) = 1$, $\frac{3}{4} \cdot (a + b) = 1$, d'où l'on tireroit $\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$, & $12 = 18$, ce qui eſt abſurde. Nous dirons bien-tôt comment il faut s'y prendre dans ce cas pour avoir T.

Si $T = al^x + bf^x + cg^x$, il en naîtra une ſérie récurrente du troiſiéme ordre, en multipliant les trois termes antécédens à commencer par le dernier (le dernier eſt celui qui précéde immédiatement celui qu'on cherche) l'un par $l + f + g$, le ſecond par $-lf - lg - fg$, & le troiſiéme par $lfg$: com-

me il eſt aiſé de le voir en multipliant les trois termes $a l^{x-1} + b f^{x-1} + c g^{x-1}$, $a l^{x-2} + b f^{x-2} + c g^{x-2}$, $a l^{x-3} + b f^{x-3} + c g^{x-3}$, de la maniere que nous venons de le dire; car l'on aura, en prenant la ſomme des produits, le terme ſuivant $a l^x + b f^x + c g^x$.

Si le terme général d'une ſérie eſt compoſé de l'addition de pluſieurs quantités de cette forme $a l^x$, la ſérie ſe formera en multipliant autant de termes antécédens, qu'il y a de termes dans T, & commençant la multiplication par le dernier, en multipliant, dis-je, par la ſomme de toutes les quantités exponentielles $l$, $f$, &c., l'avant dernier par la ſomme des produits de ces quantités priſes deux à deux; mais laquelle ſomme doit être priſe négativement, le terme qui précéde celui-ci par la ſomme des produits des mêmes quantités priſes trois à trois, le terme qui précéde immédiatement celui dont nous venons de parler, par la ſomme négative de ces mêmes quantités priſes quatre à quatre; & ainſi de ſuite.

Suppoſant le premier multiplicateur $= t$, le ſecond $= s$, le troiſiéme $= r$, le quatriéme $= q$, &c. il eſt évident que l'équation $x^m - l x^{m-1} + l f x^{m-2} - \&c. = 0$, a pour racines $l$, $f$, &c. $+ \&c. \quad + \&c. \quad - \&c.$ * C'eſt pourquoi l'équation $x^m - t x^{m-1} - s x^{m-2} - r x^{m-3} - \&c. = 0$, qui réſulte de la premiere, aura pour racines $l$, $f$, $g$ &c.; dans cette équation $m$ doit être égal au nombre des termes antécédens néceſſaires pour former la ſérie. Ayant trouvé les racines de cette équation, le terme général aura la forme $a l^x + b f^x + c g^x$ &c. Pour déterminer $a$, $b$, $c$, &c. comparez ce terme général aux $m$ premiers termes de la ſérie, cette comparaiſon fera connoître $a$, $b$, $c$, &c.

Pour en donner un exemple, ſoit la ſérie $0, 0, 1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{21}{16}, \frac{21}{16}, \frac{85}{64}$ &c. qui, (en ſuppoſant les trois premiers termes $0, 0, 1$), ſe forme en multipliant les trois premiers termes, à commencer par le dernier, par $1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$. C'eſt pourquoi l'équation qui doit donner $l$, $f$, $g$, ſera $x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0$*, dont les racines ſont $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$; donc le ter-

* On ſait que le coefficient du ſecond terme d'une équation, dont le premier terme n'a d'autre coefficient que l'unité eſt égal à la ſomme des racines priſes avec un ſigne contraire, que le coefficient du troiſiéme terme eſt égal à la ſomme des produits des racines multipliées deux à deux, &c.

me général sera $a \cdot 1^x + b \cdot \frac{1}{2^x} + c \cdot \frac{(-1)^x}{2^x}$. Supposant successivement $x = 1, 2, 3$, & comparant ce terme général dans ces différentes suppositions avec les trois premiers termes de la série, l'on aura $a + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} = 0$, $a + \frac{b}{4} + \frac{c}{4} = 0$, $a + \frac{b}{8} - \frac{c}{8} = 1$. Retranchant successivement la première équation de la seconde & de la troisième, on aura $-\frac{b}{4} + \frac{3c}{4} = 0$, $-\frac{3b}{8} + \frac{3c}{8} = 1$; d'où l'on tire aisément $b = -4$, & $c = -\frac{4}{3}$. Ces valeurs substituées dans la première donnent $a - 2 + \frac{2}{3} = 0$, ou $a = \frac{4}{3}$; donc le terme général sera $\frac{4}{3} - \frac{4}{2^x} - \frac{4}{3} \frac{(-1)^x}{2^x}$ $= \frac{4}{3} - \frac{1}{2^{x-2}} - \frac{(-1)^x}{3 \cdot 2^{x-2}}$.

102. Nous venons de voir quelles séries récurrentes se forment par l'assemblage des séries géométriques, parlons maintenant des séries algébrico-géométriques. Soit le terme général $T = (a + bx)\, l^x$, duquel on peut former la série $(a+b)l$, $(a+2b)\, l^2$, $(a+3b)\, l^3$, &c. En multipliant deux termes antécédens quelconques $[a + b \cdot (x-1)] \cdot l^{x-1}$, $[a + b \cdot (x-2)] \cdot l^{x-2}$, le dernier par $2l$, & le précédent par $-l^2$. Le terme suivant $(a + bx)\, l^x$ sera la somme des deux produits; donc cette série est récurrente. Si l'on fait $2l = h$, & $-l^2 = i$, il est évident que $4i$ sera $= -h^2$, & que l'équation $x^2 - hx - i = 0$ a deux racines égales, ce qui donne le cas (101) qui exclut le terme général de la forme $a\, l^x + b\, f^x$, ici $l = \frac{h}{2}$.

Soit la série 0, 1, 4, 12, 32, 120 &c. qui (en supposant les deux premiers termes 0, 1), se forme en multipliant les deux termes antécédens, le dernier par 4, & l'autre par $-4$. Parce que $h = 4$, & $i = -4$, on aura $4i = -h^2$; l'équation $xx - hx - i = 0$ aura deux racines égales, & l'on trouvera $l = 2$. Donc le terme général sera $(a + bx)\, 2^x$. Fai-

Nous avons ici $m = 2$, $s = 1$, $f = -\frac{1}{4}$, $r = -\frac{2}{4}$, & l'on peut remarquer que $r$ est le coefficient de $x^0 = 1$.

ſant $x = 1$, & enſuite $x = 2$, l'on aura en comparant ſucceſſivement le terme général avec les deux premiers termes de la ſérie, $2a + 2b = 0$, $4a + 8b = 1$ ; donc $b = \frac{1}{4}$, $a = -\frac{1}{4}$. C'eſt pourquoi $T = \left(-\frac{1}{4} + \frac{x}{4}\right) 2^x = (x-1)\cdot 2^{x-2}$.

Si l'on ſuppoſe $T = (a + bx + cx^2)\, l^x$, la ſérie qui en naîtra ſera récurrente du troiſiéme ordre. On la formera en multipliant trois termes antécédens (en commençant par le dernier) par $3l$, $-3l^2$, $l^3$. En général ſi $T = (a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.)\, l^x$, de maniere que le nombre des termes du multiplicateur de $l^x$ ſoit $= m$, & le plus grand expoſant de $x$ (dans ce multiplicateur) $= m - 1$, il en réſultera une ſérie récurrente de l'ordre $m$, en multipliant $m$ termes antécédens, le dernier par $ml$, l'avant dernier par $-\frac{m\cdot(m-1)}{2}\cdot l^2$, celui qui précéde par $\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{2\cdot 3} \times l^3$ &c., en donnant alternativement les ſignes + & − à ces multiplicateurs. Si l'on fait l'équation $x^m - mlx^{m-1} \frac{\cdot m\cdot(m-1)}{2} \times l^2 x^{m-2}$ &c. $= 0$, qui a toutes ſes racines égales à $l$, & ſi l'on appelle $t, f, r, p$ &c. les multiplicateurs des termes antécédens, à commencer par le dernier, on aura l'équation $x^m - tx^{m-1} - fx^{m-2} - rx^{m-3}$ &c. qui eſt la même que nous avons déja trouvée (101). C'eſt pourquoi toutes les fois que cette équation aura toutes ſes racines égales, T aura la forme dont nous venons de parler, & les quantités $a$, $b$, $c$, &c. ſe trouveront par la même méthode, c'eſt à-dire, par la comparaiſon du terme général avec les $m$ premiers termes de la ſérie.

Soit la ſérie $0, 0, 0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{9}{16}, 1\frac{3}{4}$, &c. qui (ayant ſuppoſé les quatre premiers termes $0, 0, 0, 1$) ſe forme en multipliant quatre termes antécédens, à commencer par le dernier, par $2, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{16}$. On aura l'équation $x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$, dont les quatre racines ſont toutes $= \frac{1}{2}$ ; c'eſt pourquoi T ſera de cette forme $(a + bx + cx^2 + dx^3)\cdot\frac{1}{2^x}$ ; & faiſant enſuite ſucceſſivement $x = 1$, 2, 3, 4, on trouvera quatre équations d'où l'on tirera $a = -16$, $b = \frac{88}{3}$, $c = -16$, $d = \frac{8}{3}$ ; ainſi $T = (-16 + \frac{88}{3}x - 16x^2 + \frac{8}{3}x^3)\frac{1}{2^x}$. Mais ſi l'équation avoit des ra-

cines en partie égales & en partie inégales, T réſulteroit de l'aſſemblage des ſéries, dont les unes ſeroient géométriques, & les autres algébrico-géométriques, & par conſéquent T ſeroit compoſé des quantités, dont les unes ſeroient de la forme préſente, & les autres de la forme ci deſſus (101).

Soit, *par exemple*, la ſérie 0, 3, — 2, 23, — 14, 87, — 90, 303 &c. qu'on forme en multipliant cinq termes antécédens, à commencer par le dernier, par 0, 4, — 2, — 3, 2. Dans ce cas l'équation générale ſera $x^5 * - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = 0$, (on a mis * à la place du ſecond terme qui manque). Les racines de cette équation ſont 1, 1, 1, — 1, — 2; trois ſont égales & deux inégales. Donc T aura cette forme $(a + bx + cx^2)\ 1^x + d\cdot(-1)^x + e\cdot(-2)^x$. Ayant fait ſucceſſivement $x = 1, 2, 3, 4, 5$; on comparera T avec les cinq premiers termes de la ſérie; & les cinq équations que l'on tirera de cette comparaiſon donneront $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, $d = -2$, $e = 1$; c'eſt pourquoi $T = 1 - 2x + x^2 - 2(-1)^x + 1\cdot(-2)^x$.

De ce que nous avons dit ſur les ſéries récurrentes, l'on doit conclure que ces ſéries ont pour terme général des formules exponentielles multipliées ou par des conſtantes, ou par des fonctions rationelles & entieres de $x$; & parce que nous avons donné la méthode de trouver le terme ſommatoire S des ſéries qui ont T de cette forme, il s'enſuit qu'on peut trouver ſoit le terme général, ſoit le terme ſommatoire de toutes les ſéries récurrentes.

103. Il y a une autre eſpece de ſéries récurrentes qui différent de celles dont nous venons de parler, en ce qu'elles ſe forment d'un certain nombre de termes antécédens, multipliés par des quantités conſtantes, en ajoutant de plus à leur ſomme une quantité conſtante, poſitive, ou négative, que nous appellerons l'*Ajoutée*, en nommant les ſéries dont il eſt ici queſtion, *ſéries récurrentes compoſées*.

Etant donnée la ſérie 0, 1, 1, 2, 4, 9, 21, 50 &c. Pour trouver un terme de cette ſérie, les deux précédens étant donnés, multipliez le dernier par 2 & le premier par 1, ajoutez — 1 à la ſomme des produits, le réſultat donnera le terme cherché. Soit une ſérie récurrente compoſée du premier ordre, dont le premier terme $= a$, la quantité par laquelle on doit multiplier chaque terme pour avoir le ſuivant étant $= 1$, & l'a-

jointée $= \gamma$. Nous aurons la série récurrente, composée du premier ordre qu'on voit ici.

$$\begin{array}{l} a, at, at^2, at^3 \cdots\cdots at^{x-1} \\ \quad \gamma, \gamma t, \gamma t^2 \cdots\cdots \gamma t^{x-2} \\ \quad\quad \gamma, \gamma t \cdots\cdots \gamma t^{x-3} \\ \quad\quad\quad \gamma \cdots\cdots \gamma t^{x-4} \\ \quad\quad\quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad\quad \gamma t^2 \\ \quad\quad\quad\quad \gamma t \\ \quad\quad\quad\quad \gamma \end{array}$$

Si l'on multiplie le premier terme par $t$, & qu'on lui ajoute $\gamma$, on aura le second terme $= at + \gamma$; & multipliant celui-ci par $t$, & ajoutant $\gamma$, l'on aura le troisiéme, & ainsi de suite; de sorte que la somme des termes de chaque colonne représente un seul terme, & la derniere colonne à droite représente le terme général T, en supposant que $x$ représente le nombre des termes. Les séries horisontales sont récurrentes simples du premier ordre, & à compter de la seconde toutes sont la même série, excepté que le nombre de leurs termes n'est pas le même. Le terme général résulte du terme $at^{x-1}$, & d'une série récurrente simple du premier ordre $\gamma, \gamma t, \gamma t^2$ &c. dans laquelle le nombre des termes est $= x - 1$, où il faut remarquer que $\gamma$ répond non à $x = 1$, mais à $x = 2$. Si $t = 1$, le terme sommatoire S de cette série sera $a + (x - 1)\gamma$. Si $t$ n'est pas $= 1$, la série $\gamma, \gamma t \cdots \gamma t^{x-2}$ sera une série géométrique dans laquelle $S = \frac{\gamma t^{x-1} - \gamma}{t - 1}$, & le terme général de toute la série sera $T = at^{x-1} + \frac{\gamma t^{x-1} - \gamma}{t-1} = \frac{at^x + (\gamma - a)t^{x-1} - \gamma}{t-1}$ (on suppose $t$ plus grand que 1, autrement l'on n'auroit pas $S = \frac{\gamma t^{x-1} - \gamma^*}{t-1}$).

Soit la série 2, 3, 7, 15, 31 &c. dans laquelle chaque terme est égal au précédent multiplié par 2, en ajoutant $-1$; l'on aura le terme général $= 2^x - 1$.

* Si $t$ est supposé $= 1$, l'on aura $S = \frac{\gamma - \gamma}{0} = \frac{0}{0}$, ce qui n'apprend rien. Si $t < 1$, la valeur de S se trouvera comme nous l'avons dit en parlant des progressions géométriques, en multipliant le plus grand terme par le dénominateur du quotient qui regne dans la progression, retranchant le plus petit terme du produit, & divisant le reste par ce dénominateur diminué de l'unité; mais alors il faut renverser la progression, afin qu'elle aille en croissant.

Si l'on a la série 2, 3, 6, 15 &c. qu'on forme en multipliant le terme précédent par 3, & ajoutant — 3. Le terme général deviendra $\frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 3^{x-1} + 3}{2} = 3x - \frac{1}{2}\cdot 3^{x-1} + \frac{3}{2} = \left(3 - \frac{5}{2}\right)3^{x-1} + \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)3^{x-1} + \frac{1}{2} = \frac{3^{x-1}+3}{2}$.

Soit maintenant la série récurrente composée du second ordre, représentée par les séries que l'on voit ici. $a$ est le premier terme, $b$ le second avec l'ajoutée $\zeta$. Pour avoir le troisiéme on multiplie $a$ par $f$, & $b$ par $t$, leur somme est supposée $= p$; & multipliant par $t$ l'ajoutée $\zeta$ qui est sous $b$, on ajoutera $t\zeta$ à $p$ pour avoir $p + t\zeta$, & ajoutant $\zeta$ à cette somme, on aura le troisiéme terme $(p + t\zeta + \zeta)$. Pour avoir le quatriéme terme, on multiplie $b$ par $f$, & $p$ par $t$; & faisant la somme de ces produits $= p'$, on multiplie $\zeta$ par $f$ & $t\zeta$ par $t$, & l'on fait la somme $= q$, on multiplie aussi le $\zeta$ du troisiéme terme par $t$, & l'on ajoute encore $\zeta$ & l'on a le quatriéme terme, &c. Il faut avoir soin de faire $= p'$, $p''$ &c. les termes que donne la premiere série horisontale. On fera $= q$, $q'$, $q''$ &c. les termes que donnent les autres séries horisontales, & l'on aura la formule ci-dessus. Il est visible que les séries horisontales sont récurrentes du second ordre, & qu'on les forme en multipliant deux termes antécédens, le dernier par $t$ & l'autre par $f$. Les deux premiers termes de la premiere série sont $a$ & $b$, ceux de la seconde $\zeta$ & $t\zeta$. Le nombre des termes de la seconde est $x - 1$ celui de la troisiéme $x - 2$ &c. & celui de la premiere $x$. Le premier de la seconde répond à $x = 2$, le premier de la troisiéme à $x = 3$ &c.

$$\begin{array}{l} a, b, p, p', p'', p''' \\ \zeta, t\zeta, q, q', q'' \\ \zeta, t\zeta, q, q' \\ \zeta, t\zeta, q \\ \zeta, t\zeta \\ \zeta \end{array}$$

Selon ce que nous avons vu ci-dessus, le terme général de ces séries dépend de la résolution de l'équation $x^2 - tx - f = 0$ *, dont les racines sont $x = \frac{t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{t^2}{4} + f\right)}$, que nous supposerons $= h$ & $= K$. Si ces racines sont inégales, le terme général de la premiere série horisontale est de cette forme $AK^x + Bh^x$ (101). On déterminera A & B en faisant successivement

* Ici nous appellons $t$ & $f$ les quantités que nous avons désignées (101) par $h$ & $i$.

$x = 1, 2$, & comparant le terme général de la série dans ces différentes suppositions, avec les deux premiers termes de la série proposée. Les termes généraux de la seconde, troisiéme, &c. séries horisontales sont de cette forme $CK^{x-1} + Dh^{x-2}$, $fK^{x-2} + Gh^{x-2}$ &c. Pour déterminer A & B, on aura les deux équations $AK + Bh = a$, $AK^2 + Bh^2 = b$. Multipliant la premiere par $h$, & la retranchant ensuite de la seconde, l'on en tirera $A = \frac{b - ah}{K(K-h)}$. Multipliant la premiere par K pour en retrancher ensuite la seconde, l'on aura $B = \frac{aK - b}{h(K-h)}$. Par une méthode semblable on trouvera $C = t \cdot \frac{(t-h)}{K(K-h)}$, & $D = t \cdot \frac{(K-t)}{h(K-h)}$. Ce qui étant bien compris, il est évident que le terme général d'une pareille série est de la forme suivante :

$$AK^x + CK^{x-1} + CK^{x-2} + CK^{x-3} \ldots\ldots CK.$$
$$Bh^x + Dh^{x-1} + Dh^2 + Dh^{x-1} \ldots\ldots Dh.$$

où les quantités A, B, C, D, sont déterminées. Et le terme général $T = AK^x + Bh^x + \left(\begin{matrix} CK, CK^2 \ldots CK^{x-1} \\ Dh, Dh^2 \ldots Dh^{x-1} \end{matrix}\right)$ (P). Dans les dernieres séries le premier terme se trouve en faisant $x = 2$ ; & la somme de ces dernieres séries est $S = \frac{CK^x - CK}{K-1} + \frac{Dh^x - Dh}{h-1}$, donc le terme général sera $T = AK^x + \frac{CK^x - CK}{K-1} + Bh^x + \frac{Dh^x - Dh}{h-1} = \frac{Ah^{x+1} + (C-A)K^{x-1}K}{K-1} + \frac{Bh^{x+1} + (D-B)h^x - Dh}{h-1}$.

Si on suppose $K = 1$ la premiere des dernieres séries sera une suite de quantités égales, & le terme sommatoire de cette série sera $S = (x-1) \times C$ ; donc le terme général deviendra $T = A + x \cdot C - C + \frac{Bh^{x+1} + (D-B)h^x - Dh}{-1}$.

Supposons maintenant $K = h$ ; dans ce cas le terme général de la premiere série horisontale aura la forme $(A + Bx)K^x$

(102). Les quantités A & B ſe déterminent par les premiers termes de la ſérie : les termes généraux des autres ſéries ſeront pour la ſeconde $T = [C + (x-1)\cdot D]K^{x-1}$ ; pour la troiſiéme T ſera de cette forme $[C + (x-2)\cdot D]K^{x-2}$, &c. Par les deux premiers termes de la premiere ſérie, l'on trouvera $A = \frac{2aK - b}{K^2}$, $B = \frac{b - aK}{K^2}$. Par les deux premiers termes de la ſeconde ſérie, l'on aura $C = 2 \times \frac{2K - t}{K^2}$, $D = 2 \cdot \frac{(t - K)}{K^2}$ ; & T ſera $= (A + Bx)\cdot K^x + [C + (x-1)\cdot D]K^{x-1} + [C + (x-2)\cdot D]K^{x-2} \ldots + (C+D)K = (A+Bx)\cdot K^x + \left[(C+D)\cdot K + (C+2D)\cdot K^2 + (C+3D)\cdot K^3 \ldots + [C + (x-1)\cdot D]\cdot K^{x-1}\right]$. Or la derniere partie eſt évidemment une ſérie récurrente ſimple du ſecond ordre, dont on peut facilement trouver la ſomme S. Si $K = h = 1$, on aura facilement la ſomme S. Si K n'eſt pas $= 1$, cette ſérie ſera algébrico-géométrique, & la ſomme S ſe trouvera par la méthode ci-deſſus (102).

Exemple. Soit la ſérie $0, 1, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, 1, 2$, &c. qui, en ſuppoſant les deux premiers termes $0, 1$ ſe forme en faiſant le multiplicateur $t = 0$, le multiplicateur $s = 1$, & l'ajoutée $z = \frac{1}{2}$. C'eſt pourquoi $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$. L'équation à réſoudre eſt $x^2 - 1 = 0$, d'où l'on tire $x = \pm 1$ ; donc $K = 1$, & $h = -1$. Nous ſervant des formules qui conviennent à ce cas, nous trouverons $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{4}$, & le terme $T = \frac{1}{4} + \frac{x-1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^x + \frac{\left[-\frac{1}{4}\cdot(-1)^x - \frac{1}{4}\right]}{-2} * = \frac{2x+1}{8} + \frac{1}{8}\cdot(-1)^x$.

104. On peut voir maintenant comment il faut s'y prendre pour avoir T dans les ſéries récurrentes compoſées des ordres

* Car dans ce cas $AK^x = \frac{1}{4}$, $Bh^x = \frac{1}{4}(-1)^x$. la ſomme de la ſérie CK, $CK^2$, &c. eſt $S = (x-1)C = \frac{x-1}{4}$, & la ſomme de la ſérie $Dh, Dh^2 \ldots Dh^{x-1}$ eſt $S = \frac{Dh^x - Dh}{-2} = \frac{-\frac{1}{4}(-1)^x - \frac{1}{4}}{-2}$ ; donc la formule P ci-deſſus deviendra T = &c.

supérieurs ; & parce que le terme général de ce ces séries fait voir qu'elles sont composées de séries algébriques, ou géométriques, ou algébrico-géométriques, dont nous savons trouver le terme sommatoire, l'on peut sommer ces sortes de séries, pourvu qu'on puisse avoir les racines de l'équation qu'on doit résoudre pour avoir leur terme général.

## *Usage des Séries récurrentes dans la recherche des Racines des Equations.*

105. LEMME. *Si l'on a une fraction dont le numerateur soit* = 1, *& le dénominateur un polynome, dont le premier terme soit auſſi* = 1 *& dont les autres termes contiennent une inconnue élevée aux puiſſances* 1^e, 2^e, 3^e, *&c. je dis que la valeur de cette fraction ſera exprimée par une ſerie récurrente.*

Soit la fraction $\frac{1}{1 - az - bz^2 - cz^3}$, &c. Si l'on diviſe le numérateur par le premier terme du dénominateur, l'on aura 1 au quotient. Multipliant ce quotient par le diviſeur & retranchant le produit du dividende, on aura un reſte $az + bz^2 + cz^2$ + &c. dont le premier terme étant diviſé par le premier terme du même dénominateur, on trouve $+ az$ pour quotient. Multipliant encore ce diviſeur par le quotient & retranchant le produit du premier reſte, il vient $(a^2 + b)z^2 + (c + ab)z^3$ + &c. Diviſant $(a^2 + b)z^2$ par le premier terme 1 du même dénominateur, je trouve $a^2z^2 + bz^2$ pour quotient ; multipliant le diviſeur par le quotient, retranchant le produit du dividende, & continuant d'opérer de même, en prenant toujours pour un ſeul terme la ſomme de tous ceux qui contiennent une même puiſſance de $z$, je trouverai tant de termes qu'il me plaira de la ſérie B, qui, ſi elle eſt convergente, donnera la valeur de la fraction propoſée, du moins par approximation. Mais ſi elle eſt divergente, il faudra faire la diviſion en prenant le dénominateur dans un ordre renverſé $- cz^3 - bz^2 - az + 1$, & la ſérie qui en réſultera ſera convergente.

$$\left.\begin{array}{l} 1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 \\ \qquad + bz^2 + 2abz^3 + \text{&c.} \\ \qquad\quad + cz^3 \end{array}\right\} B$$

Si quelqu'un des termes qui ſuivent le premier manquoit dans le dénominateur, on ſuppoſeroit ſon coefficient = 0 : Ainſi ſi le terme $- bz^2$ manquoit, on feroit $b = 0$.

Maintenant il eſt viſible que les coefficients de la ſérie B, joints au premier terme, forment une ſérie récurrente du troiſiéme ordre, dans laquelle les trois premiers termes ſeroient $0 + 0 + 1$, & dont les termes ſuivants ſe trouvent par cette loi : on écrit dans un ordre renverſé & avec des ſignes contraires les coefficients des termes du dénominateur qui ſuivent le premier, pour avoir $c + b + a$. Multipliant le premier terme 0 par $c$, le ſecond $+ 0$ par $b$, & le troiſiéme par $a$, l'on aura $a$ pour le quatriéme terme (qu'on doit multiplier par $z$). Et continuant de même, on multipliera le ſecond terme $+ 0$ par $c$, le troiſieme 1 par $b$, & le quatriéme par $a$, pour avoir le terme ſuivant $(a^2 + b)$, qu'on multipliera par $z^2$; & ainſi de ſuite.

Si le dénominateur étoit $1 - az - bz^2 - cz^3 - ez^4$, les quatre premiers termes de la ſérie étant ſuppoſés $0 + 0 + 0 + 1$, on prendroit les coefficients $e + c + b + a$, & multipliant le premier terme 0 par $e$, le ſecond par $c$, le troiſiéme par $b$, le quatriéme par $a$, & continuant de même, il ſeroit aiſé de trouver la ſérie récurrente cherchée. Si la fraction étoit $\frac{1}{1 - az}$, *l'échelle de relation* (c'eſt-à-dire, les quantités par leſquelles on multiplie les termes antécédents pour avoir le terme ſuivant) ſeroit compoſée d'un ſeul terme $+ a$, & le premier terme de la ſérie étant ſuppoſée $= 1$, le ſuivant ſeroit $+ az$, le troiſiéme $+ a^2 z^2$, &c. de ſorte que la ſérie ſeroit $1 + az + a^2 z^2 + a^3 z^3 +$ &c. Cette ſérie devient $= 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} +$ &c. (D), en ſuppoſant $a = 2$, & $z = \frac{1}{3}$; de ſorte que la fraction $\frac{1}{1 - az}$, qui dans ce cas devient $\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$, eſt la limite de la ſérie D; de maniere que cette ſérie ne peut jamais ſurpaſſer 3, mais à l'infini elle eſt $= 3$.

Si l'on vouloit réduire en ſérie la fraction $\frac{1}{1 - az - bz^2}$, l'échelle de relation ſeroit $b + a$, & les deux premiers termes de la ſérie étant $0 + 1$, on trouveroit le troiſiéme en mul-

tipliant o par $b$ & 1 par $a$ (& encore par $z$), &c. de maniere qu'en prenant toujours pour un ſeul terme tous ceux dans leſquels $z$ ſe trouve avoir le même expoſant, l'on auroit $1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 + a^4z^4 +$ &c.

$+ bz^2 + 2abz^3 + 3a^2bz^4 +$ &c.

$+ b^2z^4 +$ &c.

Si $a = -3$, & $b = -2$, de maniere que $b + a$ ſoit $= -2 - 3$, ſi en même temps on ſuppoſe $z = \frac{1}{4}$, notre ſérie deviendra $1 - \frac{1}{4} + \frac{7}{16} - \frac{15}{64} + \frac{31}{256}$ &c. qui ſera la limite de la fraction $\frac{1}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{8}{8+6+1} = \frac{8}{15}$. Mais ſi on ſuppoſoit $b = -2$, $a = -3$ & $z = 1$; la ſérie deviendroit $1 - 3 + 7 - 15 + 31$ &c. qui s'éloigneroit d'autant plus de la véritable valeur de la fraction $\frac{1}{1+3+2} = \frac{1}{6}$ qu'on prendroit plus de termes.

Si on vouloit développer en ſérie la fraction $\frac{A + Bz + Dz^5}{1 - az - bz^2 - cz^3 - dz^4 -}$ &c. on développeroit d'abord la fraction $\frac{1}{1 - az - bz^2 - cz^3 - dz^4 -}$ &c. en une ſérie récurrente par la méthode ci-deſſus, & multipliant enſuite tous les termes de cette ſérie par le numérateur $A + Bz + Dz^5$, le Problême ſeroit réſolu. Si la fraction étoit de cette forme $\frac{A + B z +}{p - qz - rz^2}$ &c. on diviſeroit tous les termes du numérateur & du dénominateur par $p$, & l'on auroit $\frac{D + Ez +}{1 - az - bz}$ &c., en faiſant $\frac{A}{p} = D$, $\frac{B}{p} = E$, &c. $\frac{q}{p} = a$, $\frac{r}{p} = b$, &c. & ce cas rentreroit dans le précédent.

106. PROBLEME. *Etant donnée la fraction* $\frac{1}{1 - a'z - b'z^2 - c'z^3}$ &c. *de laquelle on ait formé une ſérie récurrente, trouver une progreſſion géométrique dont chaque*

*terme ſoit poſitif & plus grand que le coefficient du terme correſpondant de la ſérie récurrente dont il s'agit, en le prenant même poſitivement, ſuppoſé qu'il fût négatif.* Soit l'échelle de relation $c' + b' + a'$ dans laquelle nous prenons tous les termes poſitivement. Si quelqu'un de ces termes eſt plus petit que l'unité, s'il eſt négatif ou fractionnaire, comme ſi l'échelle étoit $-\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{2}$, augmentez-les arbitrairement pour les rendre plus grands, entiers & poſitifs, de maniere que l'échelle devienne $1 + 1 + 2$, *par exemple*; prenez enſuite la ſomme de ces termes & formez une ſérie dans laquelle chaque terme ſoit au ſuivant comme 1 eſt à cette ſomme, & le problême ſera réſolu.

Pour le faire voir, ſoit $c + b + a$ la nouvelle échelle de relation ſubſtituée à la véritable $c' + b' + a'$, $c'$, $b'$ & $a'$ étant pris affirmativement, c'eſt-à-dire, ayant ſeulement égard à leur grandeur & non au ſigne, nous aurons $a = a'$ ou $a' > a$, $b = b'$ ou $b > b'$, $c = c'$ ou $c > c'$. Suppoſons maintenant que la ſérie récurrente, dont l'échelle de relation eſt $c + b + a$, ſoit $= p + q\zeta + r\zeta^2 + ſ\zeta^3 + t\zeta^4 +$ &c., la ſérie ou progreſſion géométrique, dont l'expoſant eſt $c + b + a$, étant repréſentée par $P + Q\zeta + R\zeta^2 + S\zeta^3 + T\zeta^4 +$ &c., & que P ſoit $= p = 1$.

Par la nature de ces ſéries, $Q = (c + b + a)P$, $q = ap$*; donc Q eſt $> q$. De même $R = (c + b + a)Q$; $r = bp + aq$. Mais $bQ > bq > bp$, & $aQ > aq$; donc $R > r$. On a encore $S = (c + b + a)R$, & $ſ = cp + bq + ar$. Mais $cR > cr > cq > cp$, & $bR > br > bq$, tandis que $aR > ar$; donc auſſi $S > ſ$. L'on prouveroit de même que $T > t$, & ainſi de ſuite.

Les termes de la ſérie géométrique ci-deſſus ſont, à compter du ſecond, plus grands que leurs correſpondants dans la ſérie récurrente dont nous venons de parler; or dans celle-ci les termes ſont plus grands que dans celle dont l'échelle de relation ſeroit $c' + b' + a'$, ce qu'on peut prouver de la maniere ſuivante.

Si dans la ſérie récurrente $p + q\zeta + r\zeta^2 + ſ\zeta^3 +$ &c.

* Cette derniere équation réſulte de ce que les trois premiers termes de la ſérie récurrente doivent être ſuppoſés $0 + 0 + 1$, & qu'on doit trouver les coefficiens des autres en multipliant le premier par $c$, le ſecond par $b$, & le troiſiéme par $a$.

on met $a'$ au lieu de $a$, $b'$ à la place de $b$, & $c'$ à la place de $c$, &c. ayant pris toutes ces quantités affirmativement, les coefficients $q$, $r$, $s$, $t$, $u$, &c. resteront les mêmes; parce que $a'$ n'est pas plus grand que $a$, ni $b' > b$, ni $c' > c$. Mais si on veut avoir égard aux signes de $a'$, $b'$, $c'$, &c. la grandeur des coefficients ne peut changer que parce que quelqu'une de leurs parties pourroit être détruite par des signes contraires, ce qui les rendroit plus petits; ainsi les coefficients de la série, dont l'échelle de relation est $c'$, $+b'$, $+a'$, seront dans ce cas plus petits que les coefficients correspondants $q$, $r$, $s$, $t$, &c. qui sont eux-mêmes plus petits que les coefficients correspondants Q, R, S, T, &c. de la série géométrique.

Si on fait $c+b+a=d$, l'exposant de la progression géométrique ci-dessus, c'est-à-dire $d$, pourra surpasser d'une quantité quelconque la somme $c'+b'+a'$ des termes de l'échelle pris affirmativement. Plus $d$ est grand, plus un terme (à compter du second) de la progression géométrique surpasse le terme correspondant de la série récurrente. Mais si on prend $f > d$, la raison $f^2 : d^2$ est plus grande que celle de $f : d$; & la raison de $f^3 : d^3$ plus grande encore que celle de $f^2 : d^2$. De sorte que si $m$ est un nombre fort grand, la raison de $f^m : d^m$ pourra tellement surpasser celle de $f : d$, que $d^m$ disparoîtra, pour ainsi dire, devant $f^m$; & la série récurrente étant supposée continuée jusqu'au terme qui contient $z^m$, dont le coefficient soit supposé B, l'on aura $d^m > B$, & $f^m$ pourra tellement surpasser B, que cette derniere quantité sera presque infiniment petite par rapport à $f^m$. Si donc $d$ est maintenant supposé représenter $f$, ayant écrit par ordre les deux séries C & D, $1+dz+d^2z^2+d^3z^3+d^4z^4$ &c. C il est visible qu'on $1+qz+rz^2+sz^3+tz^4$ &c. D pourra tellement les continuer que le coefficient du terme $Bz^m$ soit fort petit par rapport à $d^m$, coefficient du terme correspondant $d^m z^m$ de la série géométrique.

Si l'échelle de relation est $3, -2, +5$, la série récurrente sera $1+3z+23z^2+108z^3+529z^4$ &c., pour laquelle si on prend $d=3+2+5=10$, & que par le moyen de cet exposant on forme la série géométrique $1+10z+100z^2+1000z^3+10000z^4$ &c. il est facile de voir que les coefficients de celle-ci surpasseront de beaucoup les coefficients correspondants de l'autre. Si l'échelle de rela-

lation est 10, +6, +2, la série récurrente sera $1 + 2z + 10z^2 + 42z^3 + 164z^4 + 680z^5$ &c. Mais la série géométrique correspondante, dont l'exposant est $= d = 10 + 6 + 2 = 18$, sera $1 + 18z + 324z^2$ &c. dont les coefficients surpassent de beaucoup leurs correspondants dans la série récurrente.

107. THÉOREME. *Si* $1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 - \&c.$, *dénominateur d'une fraction dont le numérateur est* $= 1$, *a un facteur simple réel* $1 - dz$, *dans lequel* d *soit assez grand, la série récurrente qui naîtra de l'évolution de cette fraction, approchera d'autant plus d'être une progression géométrique, dont l'exposant seroit* $= d$, *qu'on la poussera plus loin.* Supposons que la valeur de cette fraction soit $y$, de maniere que l'on ait $\frac{1}{1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 - \&c.} = y$; puisque le dénominateur de cette fraction a un facteur simple & réel $1 - dz$, si l'autre facteur est $1 - az - bz^2 - cz^3 - \&c.$, on aura $y = \left(\frac{1}{1 - dz}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - a^2 - bz^2 - cz^3 - \&c.}\right)$. L'un & l'autre de ces facteurs pouvant être développés en séries, le premier donnera la progression géométrique $1 + dz + d^2z^2 + d^3z^3 + \&c.$, le second une série récurrente qu'on peut représenter par $1 + qz + rz^2 + sz^3 + tz^4 + \&c.$ Si on multiplie ces deux séries l'une par l'autre, ce qui se fait en multipliant tous les termes de l'une successivement par tous ceux de l'autre, leur produit sera $= y$. Or ce produit est

$$\left.\begin{array}{l} 1 + qz + rz^2 + sz^3 + tz^4 + uz^5 + \&c. \\ + dz + dqz^2 + drz^3 + dsz^4 + dtz^5 + \&c. \\ + d^2z^2 + d^2qz^3 + d^2rz^4 + d^2sz^5 + \&c. \\ + d^3z^3 + d^3qz^4 + d^3rz^5 + \&c. \\ + d^4z^4 + d^4qz^5 + \&c. \\ + d^5z^5 + \&c. \\ + \&c. \end{array}\right\} = y \text{ (A).}$$

Si nous supposons qu'on développe la fraction proposée, dont la valeur est $y$, en une série récurrente $1 + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 + Vz^5 + \&c.$, il est évident que cette série ne peut être égale au premier membre de l'équation A pour toutes les valeurs de $z$, à moins que les quantités qui

multiplient une même puiſſance de $z$ ne ſoient égales de part & d'autre. On aura donc les équations ſuivantes

$$Q = d + q$$
$$R = d^2 + dq + r$$
$$S = d^3 + d^2q + dr + f$$
$$T = d^4 + d^3q + d^2r + df + t$$
$$V = d^5 + d^4q + d^3r + d^2f + dt + u,$$

&c.

Si $d$ eſt fort grand, les derniers termes $q$, $r$, $f$, $t$, $u$ pourront être négligés ſans une erreur bien conſidérable, & même l'erreur ſera peu digne d'attention en négligeant les puiſſances inférieures de $d$ reſpectivement aux ſupérieures, en négligeant, *par exemple*, $d^4$ devant $d^5$. On pourra donc ſuppoſer

$$\frac{R}{Q} = \frac{d^2 + dq + r}{d + q} = \frac{d^2}{d} = d$$

$$\frac{S}{R} = \frac{d^3 + d^2q + dr + f}{d^2 + dq + r} = \frac{d^3}{d^2} = d$$

$$\frac{T}{S} = \frac{d^4 + d^3q + d^2r + df + t}{d^3 + d^2q + dr + f} = \frac{d^4}{d^3} = d$$

$$\frac{V}{T} = \frac{d^5 + d^4q + d^3r + d^2f + dt + u}{d^4 + d^3q + d^2r + df + t} = \frac{d^5}{d^4} = d.$$

Il eſt donc viſible que dans cette ſérie la raiſon de $Q : R$ differe ſouvent fort peu de celle de $1 : d$, que celle de $R : S$ en approche davantage, que celle de $S : T$ en approche encore plus, & ainſi de ſuite; de ſorte qu'à l'infini cette ſérie ſe change en une progreſſion géométrique, dans laquelle l'expoſant $= d$.

Si $d$ étant une quantité réelle, $1 - dz$ eſt un diviſeur du dénominateur $1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 -$ &c. l'équation ſimple $1 - dz = 0$, contiendra une racine réelle de l'équation $0 = 1 - a'z - b'z^2 - c'z^3$ &c. En effet, on a dans ce cas $1 = dz$ & $z = \frac{1}{d}$. Si donc cette racine eſt aſſez petite (c'eſt-à-dire, ſi $d$ eſt aſſez grand), on pourra la trouver en formant une ſérie récurrente par le moyen de l'échelle que

fournit l'équation : car une telle série pourra, après un certain nombre de termes, être regardée comme une progression géométrique, dont l'exposant seroit $= d$ ; de sorte qu'en divisant un terme assez éloigné du premier par celui qui le suit, le quotient sera à très-peu près $= \frac{1}{d}$ racine cherchée. Mais si la série ne tendoit pas à devenir géométrique, ce qu'il est facile de reconnoître, on ne pourroit par cette méthode trouver aucune des racines de l'équation. A l'égard de l'échelle, on la trouvera aisément en prenant avec un signe contraire, pour premier terme, le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue ; pour second terme, le coefficient du terme suivant ; & ainsi de suite, & supposant $= 0$, les coefficients des termes qui manquent dans l'équation.

Soit l'équation du 3$^e$ degré $1 - 5z - 40z^2 - 50z^3 = 0$. Je forme par le moyen de l'échelle 50, 40, 5 la série récurrente $1 + 5z + 65z^2 + 575z^3 +$ &c., ou n'ayant pas égard à $z$, $1 + 5 + 65 + 575 + 5725 + 54875 + 532125 +$ &c. Si on divise le second terme par le premier, le quotient est 5, le troisiéme étant divisé par le second donne 13, le quatriéme étant divisé par le troisiéme donne 8·8. Le quotient du cinquiéme par le terme précédent est 9·9 ; le sixiéme terme étant divisé par le cinquiéme, on trouve 9·5, & le septiéme divisé par le sixiéme donne 9·7. Comme ces derniers quotients ne diffèrent pas beaucoup, c'est une marque que la progression tend à devenir géométrique, & il est visible qu'une des racines $\frac{1}{d}$ est à-peu-près $= \frac{54875}{532125}$.

Dans une équation quelconque on peut toujours diminuer toute racine possible, autant qu'on le voudra : car si l'équation a un diviseur simple $dz - 1 = 0$, qui détermine cette racine, & qu'on fasse $z = x + p$, ce diviseur devient $dx + dp - 1 = 0$, qui représente la racine $x = \frac{1}{d} - p$ de la transformée que donne cette supposition. Or en prenant pour $p$ une quantité convenable, la racine $\frac{1}{d} - p$ pourra être aussi petite qu'on le voudra ; cependant on ne peut pas découvrir par ce moyen toutes les racines réelles de toutes

les équations, comme semble le promettre cette observation. Si l'équation $o = 1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 - \&c.$ a un facteur simple $1 - dz = o$, & un autre facteur quelconque $o = 1 - az - bz^2 - cz^3 - \&c.$, sans que la série que doit fournir l'équation $o = 1 - a'z - b'z^2 - \&c.$ tende à devenir une progression géométrique, dont l'exposant soit $d$, si vous voulez faire ensorte que cela arrive, il ne suffit pas d'augmenter $d$, ce qu'on pourroit faire en diminuant la racine $\frac{1}{d}$; il est encore nécessaire qu'en augmentant ainsi la quantité $d$, les coefficients $a$, $b$, $c$ de l'autre facteur restent les mêmes, ou du moins ne subissent pas des grands changements; autrement en changeant l'échelle de relation, les termes de la série récurrente pourront différer de beaucoup de leurs correspondants dans la progression géométrique, dont l'exposant $= d$. D'autre côté il est visible qu'en faisant $z = x + p$, chaque racine est diminuée de la même quantité $p$; or cette diminution peut changer & augmenter les coefficients $a$, $b$, $c$, de maniere que quoique $d$ soit augmenté, il soit cependant trop petit relativement à ces coefficients.

Mais quoique par cette méthode l'on ne puisse pas toujours parvenir à trouver la plus petite racine d'une équation, j'ai cru ne devoir pas la passer sous silence, parce qu'elle est facile & que les tentatives sont rarement infructueuses.

108. EXEMPLE I. On demande les racines de l'équation $y^2 + 8y - 10 = o$. Puisqu'en supposant $y = 2$, le premier membre devient $4 + 16 - 10 = 10$, & qu'en prenant $y = 1$, l'on trouve $1 + 8 - 10 = -1$, il est visible qu'une des racines est contenue entre 2 & 1, mais qu'elle approche plus de 1 que de 2; car le résultat que donne $+1$ est moins éloigné de o (résultat que donneroit la racine exacte) que celui que donne $+2$. On peut diminuer encore cette racine, en substituant dans la proposée $1 + z$ au lieu de $y$, pour avoir

$$y = 1 + z$$
$$y^2 = 1 + 2z + z^2$$
$$8y = 8 + 8z$$
$$-10 = -10,$$

ce qui donnera $o = -1 + 10z + z^2 = o$, ou $o = 1 - 10z - z^2$. Cette dernière équation donne l'échelle de relation

$+1$, $+10$, par le moyen de laquelle on peut former une série récurrente (dont nous nous contenterons de rapporter les coefficients en regardant 1 comme le coefficient de $z^0$.) $1 + 10 + 101 + 1020 + 10301 + 104030 + 1050601$ &c. qui tend évidemment vers une progression géométrique. C'eſt pourquoi ; ſi on divise l'avant-dernier terme par le dernier, on aura $z = \frac{104030}{1050601} = 0{\cdot}0990193$, d'où l'on tire $1 + z = y = 1{\cdot}099019$. C'eſt donc là la racine approchée cherchée qui étant ſubſtituée dans $y^2 + 8y - 10 = 0$, au lieu de $y$ donne $y^2 + 8y - 10 = -0{\cdot}000006$, réſultat qui fait voir que cette racine n'eſt pas fort éloignée de la véritable. Si on divise la propoſée par $y - 1{\cdot}099019 = 0$, on aura facilement la ſeconde racine. Mais on peut la trouver encore plus facilement, en retranchant $1{\cdot}099019$ du coefficient $-8$ du ſecond terme, pris négativement, ou de la ſomme des racines de l'équation, ce qui donnera $-8 - 1{\cdot}099019 = -9{\cdot}099019$ pour la ſeconde racine.

Si on avoit voulu trouver celle-ci avant l'autre, il auroit fallu remarquer qu'elle tombe entre $-10$ & $-9$, ce qui eſt évident ; parce que ſi on fait $y = -9$, la propoſée devient $81 - 72 - 10 = -1$ ; mais en ſuppoſant $y = -10$, on trouve $100 - 80 - 10 = 10$, ce qui fait voir qu'il y a une racine entre $-10$ & $-9$, mais plus proche de $-9$ que de $-10$. Si donc on fait $y = -9 - z$, on trouvera $0 = -1 + 10z + z^2$, où $0 = 1 - 10z - z^2$, cette équation étant la même que celle que nous avons traitée ci-deſſus, donnera la même ſérie récurrente & la même valeur de $z$ que nous avons déja trouvée, & l'on aura $y = -9 - z = -9{\cdot}099019$.

109. EXEMPLE II. Soit l'équation $x^2 - 7x - 5 = 0$, dans laquelle ſi on fait $x = \infty$, le réſultat ſera $-5$ ; mais en ſuppoſant $x = -1$, l'équation devient $1 + 7 - 5 = 3$. Cela marque qu'une des racines de l'équation tombe entre $0$ & $-1$, & qu'elle eſt plus près de $-1$ que de $0$. Il ſera commode de ſuppoſer dans ce cas-ci, $x = \frac{1}{z}$, afin d'avoir $z^2 - 3z - 1 = 0$ ; ou $3z^2 - 7z - 1 = 0$, $0 = 1 + 7z - 11z$. L'échelle de relation eſt donc $+5 - 7$, & la ſérie des coefficients $1 - 7 + 54 - 413 + 3161 - 24191 + 185142$ &c. ; d'où l'on tire $z = \frac{+24191}{185142} = -0{\cdot}130661$, & $x = \frac{1}{z} = -0{\cdot}653305$. Le coefficient du ſecond terme de la propoſée pris négativement étant $+7$, l'autre racine ſera $x = 7 + 0{\cdot}653305 = 7{\cdot}653305$.

110. EXEMPLE III. On demande les racines de l'équation $x^2 + 6x + 10 = 0$. Si on fait $x = 10z$, on trouvera après les opérations ordinaires $0 = 10 + 60z + 100zz$, ou, en divisant par 10, afin que le terme constant devienne $= 1$, $0 = 1 + 6z + 10zz$. Donc l'échelle de relation sera $-10, -6$, qui donne la série des coefficients $1 - 6 + 26 - 96 + 316 - 336 + 2456$ &c. Il ne paroît pas que cette série tende à devenir géométrique. Mais parce qu'il est facile de voir qu'une des racines de la proposée est assez proche de $-3$, on peut faire $x = -3 + z$, ce qui donne $0 = 1 + zz$. Comme le second terme de l'équation manque, on supposera son coefficient $= 0$, & l'on aura l'échelle de relation $-1 + 0$, d'où l'on tire la série des coefficients $1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0$ &c.; mais cette série ne peut rien faire connoître, & les racines de l'équation proposée sont $x = -3 \pm \sqrt{(-1)}$. Néanmoins, en négligeant les termes alternes, la série précédente se réduit à celle-ci : $1 - 1 + 1 - 1$ &c., dont chaque terme divisé par le suivant donne $-1$, qui est le quarré de la racine de la transformée, puisque l'on a $zz = -1$, $z = \pm \sqrt{(-1)}$, & par conséquent $x = -3 \pm \sqrt{(-1)}$.

111. EXEMPLE IV. Soit l'équation cubique $x^3 - 5x^2 + 5x + 12 = 0$, qui a une racine réelle comprise entre $-1$ & $-2$. Car si on fait $x = -1$, elle se réduit à $+1$; mais elle devient $-8 - 20 - 10 + 12 = -26$, en supposant $x = -2$; ainsi cette racine approche plus de $-1$ que de $-2$. On pourra donc supposer commodément $x = -1 - z$, d'où l'on tirera $0 = 1 - 18z - 8z^2 - z^3$, qui donne l'échelle de relation $+1, +8, +18$, d'où l'on tire la série des coefficients $1 + 18 + 332 + 6121 + 112852 + 2080636$ + &c. qui tend rapidement vers une progression géométrique; ainsi la racine cherchée sera à-peu-près $z = \frac{112852}{2080636} = 0.054239$, & $x = -1 - z = -1.054239$.

REMARQUE. Il sera plus sûr, pour ne pas se tromper dans la détermination de l'échelle de relation, d'ordonner la transformée de maniere que l'unité positive étant dans le second membre de l'équation, les autres termes se trouvent dans le premier, de maniere que les exposants aillent en décroissant à l'ordinaire. Ainsi dans cet exemple, on auroit pu disposer la transformée de cette maniere $z^3 + 8z^2 + 18z = 1$,

& alors les termes de l'échelle ſeront les coefficients 1, + 8, + 18, dans le rang qu'ils occupent, & avec les ſignes des termes dont ils ſont les coefficients.

112. Soit l'équation $x^3 - 4x^2 + 6x - 20 = 0$, qui a une ſeule racine réelle compriſe entre 3 & 4, mais plus proche de 4 que de 3. Si donc on fait $x = 4 - z$, l'on trouve $0 = 4 - 22z + 8z^2 - z^3$, équation que je diſpoſe ainſi $\frac{1}{2}z^3 - 2z^2 + \frac{11}{2}z = 1$, ou de cette maniere $\frac{1}{8}z^3 - \frac{8}{4}z^2 + \frac{11}{2}z = 1$. Si je fais maintenant $\frac{1}{2}z = y$, j'aurai la nouvelle transformée $2y^3 - 8y^2 + 11y = 1$, qui donne pour échelle de relation 2, — 8, + 11, d'où naît la ſérie 1 + 11 + 113 + 1157 + 11845 + 121265 + &c. qui tend à devenir géométrique. On aura donc $\frac{1}{2}z = y = \frac{11845}{121265} = 0.097678$; donc $z = 0.195356$, & $x = 4 - z = 3.804644$.

113. Afin de rendre notre Algebre plus complette, nous croyons devoir dire un mot de la maniere dont le célebre Euler emploie les ſéries récurrentes dans la recherche des racines des équations. Le fondement de ſa méthode conſiſte à déterminer pour chaque équation une ſuite de nombres, comme $a, b, c$, &c. tels que chaque terme de la ſuite diviſé par le précédent, indique la valeur de la racine d'autant plus exactement qu'on aura continué plus loin cette ſuite de nombres.

Suppoſons, dit-il dans ſon Algebre, que nous ſoyons parvenus déja aux termes $p, q, r, ſ, t$, &c. il faudra que $\frac{q}{p}$ indique la racine $x$ déja aſſez exactement; c'eſt-à-dire, qu'on ait à très-peu-près $\frac{q}{p} = x$. On aura de même $\frac{r}{q} = x$, & la multiplication des deux valeurs donnera $\frac{r}{p} = xx$. De plus comme $\frac{s}{r} = x$, on aura auſſi $\frac{s}{p} = x^3$; enſuite, puiſque $\frac{t}{s} = x$, on aura $\frac{t}{p} = x^4$, & ainſi de ſuite.

Soit l'équation $xx = x + 1$; & ſuppoſons que dans la ſérie ci-deſſus ſe préſentent les termes $p, q, r, ſ, t$, &c. Or comme $\frac{q}{p} = x$, & $\frac{r}{p} = xx$, nous obtiendrons l'équa-

tion $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$, ou $q + p = r$. Et comme nous trouvons de la même maniere que $f = r + q$, & $t = f + r$; nous conclurons que chaque terme de notre ſuite eſt la ſomme des deux termes précédents; de ſorte qu'ayant les deux premiers termes on eſt en état de continuer la ſuite auſſi loin qu'on voudra. Quant à ces deux premiers termes (dit ce Savant), on peut les prendre à volonté; ſi nous ſuppoſons donc qu'ils ſoient 0, 1, notre ſuite ſera 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, &c. & telle que ſi on diviſe un terme par celui que le précéde, on aura une valeur de $x$ d'autant plus approchante de la véritable qu'on aura choiſi un terme plus éloigné. L'erreur véritablement eſt très-grande au commencement, mais plus on avance, plus elle diminue. Si, *par exemple*, on fait $x = \frac{21}{13}$, on a $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, où l'erreur n'eſt que de $\frac{1}{169}$: les termes ſuivants la donneroient encore plus petite.

Conſidérons l'équation $xx = 2x + 1$, & puiſque $x = \frac{q}{p}$ & $xx = \frac{r}{p}$, nous aurons $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, ou $r = 2q + p$; d'où l'on peut conclure que le double de chaque terme ajouté au terme précédent donne le terme ſuivant. Si nous commençons donc encore par 0, 1, nous aurons la ſérie 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, &c., d'où il ſuit que la valeur cherchée de $x$ ſera exprimée de plus en plus exactement par les fractions ſuivantes : $\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}, \frac{408}{169}$, &c. qui approcheront toujours davantage de la véritable valeur de $x = 1 + \sqrt{2}$.

Soit l'équation $x^3 = x^2 + 2x + 1$. On ſera $x = \frac{q}{p}$, $x^2 = \frac{r}{p}$, & $x^3 = \frac{s}{p}$, & l'on aura $f = r + 2q + p$, par où l'on voit comment par les trois termes $p$, $q$, $r$, on doit déterminer le ſuivant $f$, & comme le commencement de la ſuite cherchée eſt arbitraire, on peut former la ſérie ſuivante : 0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129, &c. ainſi les valeurs de $x$ ſont $\frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{3}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{60}{28}, \frac{129}{60}$, &c. *. Si nous prenons pour $x$ la fraction $\frac{60}{28} = \frac{15}{7}$, on trouvera

* Nous parlerons dans la ſeconde partie de cet Ouvrage de la valeur de la fraction $\frac{0}{0}$, qui peut être finie ou infinie, ou 0 ;

pour le premier membre de l'équation proposée la quantité $\frac{3175}{343}$, & pour le second membre $\frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{312}{343}$, où l'erreur n'est que de $\frac{31}{343}$.

Il faut remarquer cependant (dit M. Euler) que toutes les équations ne sont pas de nature à pouvoir y appliquer cette méthode; & particuliérement lorsque le second terme manque, elle ne peut être employée. Car soit, *par exemple*, $xx = 2$; si on vouloit faire $x = \frac{q}{p}$, & $xx = \frac{r}{p}$, on auroit $\frac{r}{p} = 2$, ou $r = 2p$; c'est-à-dire, $r = 0 \times q + 2p$, d'où résulteroit la suite 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32, &c. de laquelle on ne peut rien conclure, parce que chaque terme divisé par le précédent donne toujours $x = 1$, ou $x = 2$. Mais si dans l'équation proposée, on suppose $x = y - 1$, on trouvera $y^2 = 2y + 1$ *; & si l'on fait maintenant $y = \frac{q}{p}$, & $yy = \frac{r}{p}$ on aura l'approximation que nous avons donnée ci-dessus.

Il faut observer de plus (ajoute ce Savant au sujet de cette méthode) que lorsque l'équation a une racine rationelle, & qu'on choisit le commencement de la période tel que cette racine en résulte, chaque terme de la suite divisé par le terme précédent, donnera également la racine exactement. Soit l'équation $xx = x + 2$, dont une des racines est $x = 2$; comme on a ici, pour la série, la formule $r = q + 2p$, si on prend 1, 2 pour les deux premiers termes, on a la suite 1, 2, 4, 8, 16, 64, &c. qui est une progression géométrique croissante dont l'exposant est 2.

Mais lorsque le commencement de la suite s'écarte de la racine;

---

ainsi $\frac{(2-2)3}{(2-2)\cdot 5} = \frac{0\times 3}{0\times 5} = \frac{3}{5}$; $\frac{(1-1)\cdot 3}{(1-1)\cdot(1-1)} = \frac{3}{(1-1)} = \frac{3}{0} = \infty$, en considérant 0 comme une quantité infiniment petite. Mais $\frac{(1-1)(1-1)3}{(1-1)\cdot 2} = \frac{(1-1)\cdot 3}{2} = \frac{0\times 1}{2} = \frac{0}{2} = 0$. C'est tout ce que je dirai maintenant sur cette matiere, que je traiterai plus au long dans le calcul différentiel.

* Dans la traduction françoise de l'algebre de M. Euler, on trouve $y^2 + 2y - 1 = 2$, équation fausse; ce qui sans doute est une faute d'impression.

il ne faut pas croire qu'on ira du moins en s'approchant de cette racine ; la ſuite ne donne par approximation que la plus grande racine ( il ne s'agit pas ici des équations du premier degré ) ; & l'on ne trouve pas une des moindres, à moins d'avoir choiſi les premiers termes convenablement pour cet effet. Soit l'équation $xx = 4x - 3$, dont les deux racines ſont $x = 1$ & $x = 3$. La formule pour la ſuite eſt $r = 4q - 3p$ ; & ſi l'on prend 1, 1 pour le commencement de la ſérie, qui indique par conſéquent la plus petite racine, on a pour la ſuite entiere : 1, 1, 1, 1, &c. Mais ſi on adopte pour premiers termes les nombres 1, 3, qui contiennent la plus grande racine, on a la ſuite : 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, &c. qui indique avec préciſion la racine 3. Enfin ſi on adopte un autre commencement, pourvu qu'il ſoit tel que la plus petite racine n'y ſoit pas compriſe, la ſérie ſera telle que le quotient d'un terme par le précédent approchera toujours de plus en plus de la racine 3 à proportion qu'on s'éloignera du premier terme de la ſérie ; mais les quotients n'approcheront pas de la plus petite racine.

Soit l'équation $x^{\infty} = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} +$ &c. La ſérie doit être telle pour cette équation, que chaque terme ſoit égal à la ſomme de tous les précédents, c'eſt-à-dire, qu'on aura 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, &c. ce qui fait voir qu'une des racines de l'équation propoſée eſt 2 exactement. En diviſant l'équation par $x^{\infty}$, on trouve $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{xx} + \frac{1}{x^3}$ &c. $= \frac{1}{x-1}$ ; d'où l'on tire $1 = \frac{1}{x-1}$, $x - 1 = 1$, & $x = 2$.

En examinant cette méthode avec un peu d'attention, on s'apperçoit facilement que les premiers termes de la ſérie ne doivent pas tous être $= 0$, & qu'ils ne ſont pas entiérement arbitraires, comme l'Auteur ſemble vouloir le faire entendre ; ce qui n'empêche pas qu'elle ne ſoit très élégante.

## *Des Fractions continues.*

114. Il y a encore une autre eſpece de ſéries, dont je crois devoir donner une notion aux Commençants : je veux parler *des fractions continues*. Lorſqu'une fraction a pour dénominateur l'aſſemblage d'un entier & d'une fraction ; que cette ſeconde fraction a auſſi pour dénominateur l'aſſemblage d'un entier & d'une fraction, & ainſi de ſuite : l'expreſſion

qui

qui en réſulte s'appelle *fraction continue* : ainſi l'expreſſion $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d} +$ &c. eſt une fraction continue. J'appellerai *fractions intégrantes* les fractions $\frac{a'}{a}, \frac{b'}{b}, \frac{c'}{c}$, &c. de l'aſſemblage deſquelles réſulte la fraction continue. Si les numérateurs $a', b', c'$, &c. ſont chacun $= 1$, la série ou fraction continue précédente ſera $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} +$ &c.

115. Pour réduire la fraction continue $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}$ en fraction ordinaire, j'opere en allant de droite à gauche & je réduis le dénominateur $b + \frac{c'}{c}$ de la ſeconde fraction en la fraction équivalante $\frac{bc+c'}{c}$; ainſi l'aſſemblage des deux fractions $\frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}$ peut être regardé comme une fraction dont le numérateur $= b'$ & dont le dénominateur eſt $\frac{bc+c'}{c}$; donc on aura la valeur de $\frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}$ en diviſant $b'$ par $\frac{bc+c'}{c}$, c'eſt-à-dire que cette valeur eſt $= \frac{b'c}{bc+c'}$; c'eſt pourquoi la fraction continue propoſée eſt $= \frac{a'}{a} + \frac{b'c}{bc+c'}$. Mais $a + \frac{b'c}{bc+c'} = \frac{abc+ac'+b'c}{bc+c'}$; donc notre fraction continue eſt $= \frac{a'(bc+c')}{abc+ac+b'c}$. Il eſt clair qu'en remontant ainſi de droite à gauche, on pourra réduire toute fraction continue, dont le nombre des termes ſera fini en une fraction ordinaire.

Appellons S la valeur totale de la fraction continue $\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}+\frac{d'}{d}+$ &c.; il eſt aiſé de voir que ſi en allant de gauche à droite on prend la premiere fraction intégrante ſeule, puis les deux premieres fractions intégrantes ſeules, puis les trois premieres fractions intégrantes ſeules, & ainſi de ſuite, on aura des quantités alternativement plus petites & plus grandes que S; c'eſt-à-dire, que

$S<\frac{a'}{a}$, $S>\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}$, $S<\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}$, &c. Car dans la premiere expreſſion $\frac{a'}{a}$, le dénominateur $a$ eſt plus petit que le véritable dénominateur, puiſque le dernier eſt formé de l'addition de $a$ avec toutes les fractions qui ſuivent à droite. Dans la ſeconde expreſſion le dénominateur $b$ étant auſſi trop petit, la fraction $\frac{b'}{b}$ eſt trop grande, & par conſéquent le dénominateur $a+\frac{b'}{b}$ eſt trop grand; ainſi la fraction dont le numérateur eſt $a'$ & le dénominateur $a+\frac{b'}{b}$ eſt trop petite. Il eſt maintenant facile de voir que l'aſſemblage des trois premieres fractions eſt plus grand que S; que l'aſſemblage des quatre premieres fractions intégrantes eſt plus petit que S; &c.

116. Soient A & B deux nombres entiers & poſitifs, mais $A>B$. Pour réduire la fraction $\frac{A}{B}$ en fraction continue, opérez comme ſi vous cherchiez le plus grand commun-diviſeur de A & de B (31); diviſez donc A par B pour avoir le quotient $a$; diviſez enſuite le dénominateur B par le reſte, & nommez le quotient $b$; diviſez après cela le premier reſte par le ſecond, & faites le quotient $=c$; continuez ainſi en diviſant toujours l'avant-dernier reſte par le dernier reſte, juſqu'à ce que vous parveniez à une diviſion qui ne laiſſe aucun

reſte, ce qui doit néceſſairement arriver, puiſque les reſtes ſont des nombres entiers qui vont en diminuant; vous aurez la fraction continue $a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+$ &c. qui ſera égale à la fraction $\frac{A}{B}$; & cette fraction continue contient un entier $a$.

Soit $\frac{A}{B}=\frac{1103}{887}$. Diviſant 1103 par 887, on a le quotient $a=1$, & le reſte 216. Diviſant 887 par 216, on aura le quotient $4=b$ & le reſte 23; on diviſera 216 par 23, ce qui donnera le quotient 9 & le reſte 9; on diviſera encore 23 par 9, on aura le quotient 2 & le reſte 5; on diviſera 9 par 5, on aura le quotient 1 & le reſte 4; on diviſera 5 par 4, on aura le quotient 1 & le reſte 1: enfin diviſant 4 par 1, on aura le quotient 4 & le reſte 0, de ſorte que l'opération ſera finie. Raſſemblant donc par ordre les quotients trouvés, on aura cette ſérie 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4; & la fraction continue cherchée ſera $=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}$.

Si nous retranchons 887 de 1103 pour avoir le reſte 216, la fraction $\frac{216}{887}$ ſera $=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}$; or on trouvera facilement ce réſultat en diviſant 887 par 216; diviſant enſuite 216 par le reſte que donne la premiere diviſion; diviſant après cela le premier reſte par le ſecond; & ainſi de ſuite pour avoir les quotients 4, 9, 2, 1, 1, 4, dont on formera la fraction continue $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{2}$ &c.

Et ſelon ce que nous avons dit ci-deſſus, faiſant $\frac{216}{887}=S$, nous aurons $S<\frac{1}{4}$, $S>\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$, $S<\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{2}$, &c.

Soit la fraction numérique & poſitive $\frac{A}{B}$, dans laquelle A eſt $>B$, telle que l'on ait $\frac{A}{B}=S=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+$ &c.

Cette fraction étant réduite en fraction ordinaire donne, en

ſe bornant à trois fractions intégrantes, $S = \frac{bc+1}{abc+a+c}$; & l'on ne peut avoir une valeur plus approchée de S au moyen d'une fraction qui ſoit exprimée en des plus petits nombres que la fraction $\frac{bc+1}{abc+a+c}$. De ſorte que ſi l'on ſuppoſe $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c+\frac{1}{p}}$, en ajoutant une fraction intégrante de plus, pour avoir $S = \frac{bcp+b+p}{abcp+ab+ap+cp+1}$, cette fraction ſera exprimée par des plus grands nombres que la précédente.

La fraction $\frac{216}{887}$ étant $= \frac{1}{4+\frac{1}{9+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}}$, ſi nous faiſons $a = 4$, $b = 9$, $c = 2$, $p = 1$, nous aurons $\frac{bc+1}{abc+a+c} = \frac{9\cdot 2+1}{4\cdot 9\cdot 2+4+2} = \frac{19}{78}$, & $\frac{bcp+b+p}{abcp+ab+ap+cp+1} = \frac{28}{115}$.

*Fin du Calcul.*

# ÉLEMENS DE GÉOMÉTRIE.

1. LA GÉOMÉTRIE *eſt la ſcience de l'eſpace ou de l'étendue en longueur, largeur & profondeur. La ligne* n'eſt autre choſe que l'étendue conſidérée ſans largeur ni profondeur. La *ſurface* eſt l'étendue conſidérée en longueur & largeur ſeulement. On appelle *ſolide* * les trois dimenſions priſes enſemble, c'eſt-à-dire, la longueur, la largeur & la profondeur. L'extrémité d'une ligne s'appelle *un point*, & il eſt évident que la ligne n'ayant ni longueur ni profondeur (ou étant conſidérée comme telle), on ne peut concevoir dans le point ni largeur, ni profondeur : on peut cependant, pour aider l'imagination, conſidérer le point comme une étendue d'une longueur, largeur & profondeur très-petites.

*La ligne droite* eſt celle qui va d'un point à

* On n'entend pas ici par *ſolide* un amas de parties matérielles ; mais ſeulement un eſpace long, large & profond, que cet eſpace contienne un corps, ou qu'il ſoit parfaitement vuide.

l'autre ſans ſe détourner à droite ni à gauche, telle eſt *a b* (figure premiere). On peut la concevoir formée par le mouvement d'un point qui va de *a* en *b* ſans ſe détourner d'aucun côté.

2. COROLLAIRE. Delà il ſuit que la ligne droite eſt la plus courte qu'on puiſſe tirer entre deux points.

La *ligne courbe* eſt celle qui eſt engendrée par le mouvement d'un point qui à chaque moment s'écarte très-peu de la ligne droite. Telles ſont les lignes *a c b*, *a d b*. On appelle *ligne mixte*, une ligne *p x b*, compoſée d'une ligne droite *p x* & d'une ligne courbe *x b*. Enfin j'appelle *ligne anguleuſe* une ligne *a p x* compoſée de deux lignes droites *a p*, *p x*, qui n'ont pas la même direction.

3. COROLLAIRE. On ne peut tirer qu'une ligne droite *a b*, entre deux points *a* & *b*; mais on peut faire paſſer tant de courbes que l'on voudra par ces mêmes points *a* & *b*.

La *ligne circulaire* eſt une ligne courbe (fig. 2) décrite par l'extrémité *a* de la ligne *a c*, qui tourne autour d'un point fixe *c*. Ce point *c* eſt appellé *le centre*, & il eſt évident que tous les points de la ligne circulaire (qu'on appelle encore *circonférence du cercle*) ſont également éloignés du centre. On appelle *cercle* l'eſpace renfermé dans la circonférence *; c'eſt-à-dire, que le cercle eſt une *ſurface plane*, terminée par une ligne courbe qu'on appelle *circonférence*, dont tous les points ſont également éloignés d'un point qu'on nomme *centre*.

4. COROLLAIRE. Delà il ſuit que toutes

* Quelquefois cependant on ſe ſert du mot *cercle* pour déſigner la circonférence.

les droites tirées du centre à la circonférence (on les appelle des *rayons*) ſont égales. De même tous les diametres ſont égaux ; car un *diametre b d* eſt une ligne droite, qui paſſant par le centre eſt terminée de part & d'autre à la circonférence ; de ſorte qu'il eſt compoſé de deux rayons égaux. Mais les lignes qui ſont terminées de part & d'autre à la circonférence ſans paſſer par le centre, ne ſont pas égales. Ces ſortes de lignes ſont appellées *cordes* ; or il eſt viſible qu'une corde *f d* eſt d'autant plus petite qu'elle eſt plus éloignée du centre.

5. COROLLAIRE. Tout diametre *b d* partage la circonférence & le cercle en deux parties égales ; car ſi l'on conçoit la partie *b f d* pliée ſur le diametre *b d*, il eſt clair que tous les points de la partie *d f b*, s'appliqueront exactement ſur tous les points de la partie *b a d* : car ſi le point *f*, *par exemple*, tomboit en dedans ou en dehors de la partie *b a d*, tous les points de la circonférence ne ſeroient pas également éloignés du centre *c*.

Les Géometres conçoivent la circonférence de tout cercle grand ou petit diviſée en 360 parties égales, qu'ils appellent *degrés*. Chaque degré ſe diviſe en 60 parties égales qu'on nomme *minutes*, chaque minute en 60 parties égales qu'on nomme *ſecondes*, chaque ſeconde en 60 *tierces*, & ainſi de ſuite. Le caractere qui déſigne le degré eſt °, celui de la minute ', celui de la ſeconde '', celui des tierces ''', &c. ainſi 35° 7' 12'' 30''' ſignifient 35 degrés, 7 minutes, 12 ſecondes, 30 tierces.

On appelle *cercles concentriques*, ceux qui ont un même centre *c* (fig. 3). On nomme *cercles excentriques*, ceux qui ont différens centres (fig. 4). On appelle *ſécantes* les lignes qui coupent un cer-

cle, telles que *a d* (fig. 16); & *tangentes*, celles qui le touchent ſans le couper, comme *a b* (fig. 4). On appelle *arc d'un cercle*, une partie de ſa circonférence *x d* (fig. 5). Un ſecteur de cercle eſt l'eſpace renfermé entre deux rayons *m d*, *m x*, & l'arc *x d* terminé par ces deux rayons. On appelle *ſegment* l'eſpace compris entre un arc *d x* & ſa corde.

6. Les *lignes perpendiculaires* ſont celles qui tombent ſur une autre ligne ſans pencher d'un côté ni de l'autre. Ainſi *h x* (fig. 6) eſt perpendiculaire ſur *a b*. Il eſt évident auſſi que ſi *h x* ne penche ni du côté de *a*, ni du côté de *b*, *a b* ne penchera pas non plus ni du côté de *h*, ni du côté de *x*; c'eſt-à-dire, que ſi une ligne eſt perpendiculaire ſur une autre ligne, la ſeconde ſera auſſi perpendiculaire ſur la premiere. On appelle *lignes obliques* celles qui en rencontrent une autre en penchant plus d'un côté que de l'autre : ainſi *h f* & *h a* ſont obliques ſur *a b*; car la premiere penche plus du côté de *a*, que du côté de *b*, & la ſeconde penche plus du côté de *b*, que du côté de *a*. Les *lignes paralleles* ſont celles qui ſont partout également éloignées l'une de l'autre. Ainſi elles ne peuvent ſe rencontrer quelques prolongées qu'elles ſoient : telles ſont les lignes *h p*, *m n*, dont tous les points correſpondants *h* & *m*, *p* & *n* ſont toujours également éloignés.

Un *angle* n'eſt autre choſe que l'ouverture que laiſſent entr'elles deux lignes *a c*, *d c*, qui ſe rencontrent en un point *c* (fig. 3); ainſi *d c a* eſt un angle. Il eſt viſible qu'à proportion que le point *d* s'éloigne du point *a*, l'angle *d c a* devient plus grand, auſſi-bien que l'arc *a d*; de ſorte que l'arc *a d* croît en même temps que l'angle. Il eſt viſible auſſi

que l'angle *g c f*, dont les côtés ſont plus petits que ceux de l'angle *a c d*, lui eſt cependant égal.

7. COROLLAIRE. Donc premiérement la grandeur d'un angle ne dépend pas de la grandeur de ſes côtés. Secondement l'angle doit s'eſtimer par le nombre des degrés, minutes, ſecondes, &c. de l'arc de cercle compris entre ſes côtés, en ſuppoſant que la pointe de l'angle eſt au centre du cercle.

Lorſqu'un angle eſt formé par deux lignes courbes, on l'appelle *curviligne*; mais on le nomme *mixtiligne* lorſqu'il eſt formé par une ligne droite & une ligne courbe: l'angle *p o n* eſt curviligne, & l'angle *n a b* eſt mixtiligne (fig. 4). Pour déſigner un angle l'on ſe ſert de trois lettres, dont celle du milieu déſigne la pointe, & les autres les extrémités des côtés, ou bien on ſe ſert d'une ſeule lettre ſituée au *ſommet* de l'angle. Un angle eſt appellé *droit* lorſqu'il a pour meſure le quart du cercle; il eſt *aigu* s'il a pour meſure moins que le quart du cercle. Ainſi l'angle *d c p* (fig. 7) eſt droit, & l'angle D *c x* eſt aigu. On appelle *angle obtus*, celui qui a pour meſure plus que le quart du cercle, tel eſt l'angle *d c a*. On appelle *complément* d'un angle la différence de cet angle avec un angle droit, & *ſupplément* d'un angle ce qui manque à cet angle pour valoir deux angles droits ou 180°.

8. COROLLAIRE VI. Donc les angles égaux ont des complémens & des ſupplémens égaux, & réciproquement ſi deux angles ont des complémens ou des ſupplémens égaux, ils ſont égaux *.

* Quand on dit que les angles qui ont des complémens égaux ſont égaux, on ſuppoſe qu'ils ſont de la même eſpece; c'eſt-à-dire, tous les deux aigus ou tous les deux obtus: car l'angle de 100°

DÉFINITIONS. Un espace terminé par des lignes est une *figure*; & une figure de trois côtés s'appelle *un triangle.*

9. THÉORÈME. *Une ligne* a y *tombant sur une autre ligne* b d, *forme sur cette ligne deux angles* a c d, a c b *du même côté, qu'on appelle* contigus, *qui pris ensemble valent deux angles droits.* En effet si du point *c*, comme centre, on décrit le cercle *a b d*, il est évident que *b d* sera un diametre & *b a d* une demi-circonférence; mais l'angle *b c a* a pour mesure l'arc *b a*, & l'angle *a c d* a pour mesure l'arc *a d*; ainsi ces deux angles, pris ensemble, ont pour mesure la demi-circonférence *b a d*, & par conséquent ils valent deux angles droits.

10. COROLLAIRE I. Deux angles contigus ou de suite sont supplémens l'un de l'autre, & si l'un *d c p* est droit, l'autre *b c p* doit l'être; & la mesure de l'angle droit doit être $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$; or dans ce cas *p c* ne penchant pas plus du côté de *b* que du côté de *d* est perpendiculaire sur *b d.*

11. COROLLAIRE II. Les angles *d c y*, *b c y*, formés par la ligne *b d* & la ligne *a c* prolongée, auront aussi pour mesure une demi-circonférence de cercle *b y d*, & par conséquent ils vaudront ensemble 180°. Si par le point *c* on tire tant de lignes que l'on voudra, tous les angles *b c a*, *a c p*, *p c x*, *x c d*, formés au-dessus de la ligne *b d*, auront pour mesure la demi-circonférence *b a d.* De même tous les angles formés au-dessous de *b c d*,

& l'angle de 80° ont le même complément 10°, cependant ils ne sont pas égaux. Il y a des Auteurs qui disent que le complément d'un angle est ce qui manque à cet angle pour valoir un angle droit.

auront pour mesure la demi-circonférence inférieure *b y d*; donc ils vaudront deux angles droits; donc tous les angles qu'on peut former autour d'un point *c* valent précisément 360°.

12. THÉOREME. *Les angles opposés au sommet sont égaux.* Les angles opposés au sommet sont ceux qui ont leurs pointes opposées & qui sont faits par deux lignes qui se coupent : tels sont les angles *a c b*, *d c x* (fig. 5), qui sont égaux; car l'angle *a c d* est supplément de l'un & de l'autre; donc (8) ces angles sont égaux; donc; &c.

13 THÉOREME. *Une ligne f x qui coupe deux paralleles* l a, b d, *forme avec elles des angles* a, b *situés de la même maniere* (fig. 8), on les appelle *correspondans, égaux.* Car il est visible que les lignes *b d*, *l a* ne sont pas plus inclinées l'une que l'autre sur la ligne *f x* du côté du point *f*; autrement ces lignes s'approcheroient l'une de l'autre d'un côté, & par conséquent ne seroient point paralleles; mais c'est de l'inclinaison des lignes que dépend la grandeur des angles; donc l'angle *a* est égal à l'angle *b*.

On appelle *angles alternes-internes* les angles *b* & *c* situés entre les paralleles, mais de différens côtés de la sécante; *angles alternes-externes* les angles qui sont situés hors des paralleles de différens côtés de la sécante, comme *a*, *x*. Les angles alternes appartiennent toujours l'un à l'une des paralleles, & l'autre à l'autre parallele.

COROLLAIRE I. Il suit de ce théorème que les angles alternes-internes sont égaux entr'eux, aussi-bien que les angles alternes-externes : car (par le théorême) $b = a$; or $a = c$, parce qu'ils sont opposés au sommet; donc $b = c$; donc 1° &c.

2° $a = b$, parce qu'ils ſont correſpondans, $b = x$, parce qu'ils ſont oppoſés au ſommet; donc $a = x$; donc 2° &c.

COROLLAIRE II. Deux angles ſoit internes, ſoit externes du même côté de la ſécante, valent toujours deux angles droits; car $a$ & $m$ étant contigus valent deux angles droits (9); mais $a = b$; donc $m$ & $b$ valent deux angles droits. De plus $g$ & $b$ étant contigus valent 180°; mais $b = a$; donc $g$ & $a$ valent deux angles droits; donc ſi l'un de ces angles eſt droit, l'autre le ſera auſſi; c'eſt-à-dire, ſi la ſécante $fq$ eſt perpendiculaire à l'une des paralleles, elle le ſera de même à l'autre.

14. COROLLAIRE III. Donc ſi deux angles ont leurs côtés paralleles, ils ſeront égaux ou ſupplémens l'un de l'autre. Les angles $rsp$, $fai$ ſont égaux; car $s = q$, parce qu'ils ſont correſpondans (à cauſe des paralleles $fq$, $rs$), $q = a$, parce qu'ils ſont de même correſpondans; donc $a = s$. Les angles $rsq$, $fai$ ont leurs côtés paralleles; mais $rsq$ & $fq$N ſont correſpondans, & celui-ci eſt correſpondant de $fal$ ſupplément de $fai$. Si l'on conçoit que la ligne $rs$M ſe meut ſur $pq$ en reſtant toujours parallele à la ligne $fq$, & qu'étant arrivée en $q$, l'angle $rsp$ (qui eſt devenu $fqp$), ou ſon oppoſé au ſommet M$sq$ (qui eſt devenu A$q$N) ſe meut le long de la ligne $fq$, de maniere que la ligne $rs$ ſoit toujours ſituée ſur $fq$, juſqu'à ce que la ligne $sp$ tombe ſur $ai$, l'angle $rsp$ ſe confondera avec $fai$, & l'angle M$sq$ ſera oppoſé au ſommet à l'angle $fai$; mais les angles $rsq$, M$sp$ ne ſe confondront avec l'angle $fai$, ni ne lui ſeront oppoſés au ſommet. On peut donc, par ce qu'on vient de

dire, connoître dans quels cas les angles dont les côtés ſont paralleles ſont égaux ou ſupplémens l'un de l'autre. En général ſi les angles *r s p*, *f a i*, dont les côtés ſont parelleles, ont leurs pointes tournées vers la même région ils ſont égaux; & comme l'angle M *s q* eſt égal *r s p*, on peut dire auſſi que deux angles *f a i*, M *s q* ſeront égaux toutes les fois qu'ils auront leurs côtés paralleles, & que l'un des deux (en prolongeant ſes côtés, s'il le faut) ſera oppoſé au ſommet à un angle qui aura ſa pointe tournée vers la même région que l'autre. Quand dans la ſuite de cet Ouvrage on conclura que les angles dont les côtés ſont paralleles ſont égaux, ils ne ſe trouveront jamais dans le cas de ceux qui ſont ſupplémens l'un de l'autre.

15. THÉOREME. *Si les angles correſpondans ſont égaux, les lignes ſeront paralleles; il en ſera de même ſi les angles alternes-internes, ou alternes-externes, ou ſi deux angles* m, b, *ou* a, g, *internes ou externes ſitués du même côté de la ſécante, l'un appartenant à la ligne ſupérieure & l'autre à l'inférieure ſont égaux.* Car dans tous ces cas les lignes *l a*, *b d* doivent être également inclinées ſur la ſécante *f q* du même côté, ce qui ne peut être, à moins qu'elles ne ſoient paralleles.

16. PROBLEME. *Par un point i mener une parallele à la ligne* b d. Du point *i*, comme centre, & d'une ouverture de compas à diſcrétion décrivez un arc de cercle *t h*, du point *h* où cet arc rencontre la ligne *b d*, & de la même ouverture de compas décrivez l'arc *d i*. Ouvrez le compas de *d* en *i*, portez cette ouverture de *b* en *t*; par le point *t* & le point *i* tirez la ligne *i t* & le problême ſera réſolu. En effet les angles *h i t*, *i h d*

alternes-internes ſont égaux étant meſurés par des arcs égaux décrits de la même ouverture de compas ; donc les lignes *b d*, *t i* ſont paralleles.

17. PROBLEME. *Mener une perpendiculaire ſur une ligne* a b (fig. 9). Des points *a* & *b*, comme centres & d'une même ouverture de compas *, décrivez deux arcs *x x*, *g g* qui ſe rencontrent en *h* au-deſſus de *a b* ; faites la même choſe en-deſſous, & par les points *h*, *h* tirez la ligne *h p h* ; vous aurez la perpendiculaire que vous demandez. Car tous les points de l'arc *x x* ſont également diſtans du centre *a* de cet arc, de même tous les points de l'arc *g g* ſont également diſtans du centre *b* ; donc les points *h*, qui ſont les interceſſions de ces arcs, ſont également diſtans de *a* & de *b* ; donc auſſi tous les autres points de la ligne *h h* ſont également diſtans de *a* & de *b* ; car la poſition d'une ligne droite ne dépendant que de deux points, le point *p* de cette ligne ne ſauroit être plus près de *a* que de *b*, à moins que la ligne *h p h* ne ſoit pas droite. Donc la ligne *h h*, a tous ſes points également diſtans de *a* & de *b*, donc elle eſt perpendiculaire ſur *a b*, c'eſt-à-dire qu'elle ne penche pas plus du côté de *a* que de *b*, & de plus elle coupe *a b* en deux également.

COROLLAIRE I. De ce que nous venons de dire, il ſuit que toutes les fois qu'une ligne droite aura deux de ſes points également diſtans des deux autres points d'une autre ligne, elle lui ſera perpendiculaire.

COROLLAIRE II. Donc pour mener une perpendiculaire ſur la ligne *a b* (fig. 10) par un point *d* de

* Il faut que l'ouverture du compas ſoit plus grande que la moitié de la ligne *a b*, autrement les arcs *x x*, *g g* ne ſe couperoient pas.

cette ligne., il ſuffit, après avoir décrit du point *d* comme centre une demi-circonférence *a c b*, de décrire deux arcs qui ſe coupent en *h*, en décrivant ces arcs de la même ouverture de compas, & prenant pour centres les points *a* & *b*, où la demi-circonférence coupe la ligne donnée *a b*. Tirant enſuite la ligne *h d*, dont les points *h* & *d* ſont également diſtans des points *a* & *b*, l'on aura la perpendiculaire demandée.

COROLLAIRE III. Si du point *h*, hors d'une ligne *a b* (fig. 11), on veut mener une perpendiculaire à cette ligne; du point *h* on décrira un arc de cercle *c c*, qui coupe la ligne *a b* en deux points, des points d'interſection comme centre & de la même ouverture de compas décrivant deux arcs qui ſe couperont en *p*, l'on tirera la ligne *h p*, qui ſera la perpendiculaire demandée. En effet les points *c* & *c* ſont également éloignés du point *p* & du point *h* (centre de l'arc *c c*); donc la ligne *h p* a deux points également éloignés des deux autres points de la ligne *a b*; donc (Corollaire I.) la ligne *h p* eſt perpendiculaire ſur *a b*.

18. THÉOREME. *D'un point* p *dans une ligne, ou d'un point* h *pris hors d'une ligne* a b, *on ne peut mener qu'une perpendiculaire à cette ligne* (fig. 6). Car toute autre ligne *c p*, ou *h d* penche néceſſairement d'un côté ou de l'autre de la ligne *a b*; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc deux lignes *h p*, *m n* perpendiculaires ſur une même ligne *a b*, ſont paralleles: car ſi elles ſe rencontroient, on pourroit du point de rencontre tirer deux perpendiculaires ſur la même ligne *a b*, ce qui (par le Théorême) eſt impoſſible.

19. THÉOREME. *La perpendiculaire eſt plus courte*

*que l'oblique tirée d'un même point* h *ſur la même ligne* a b. Ayant prolongé $hp$ juſqu'en $x$, en ſorte que $ph = px$; il eſt viſible qu'en pliant la figure de maniere que $af$ ſerve de plis, & que $hp$ tombe ſur $px$, $hd$ tombera ſur $dx$, & $ha$ ſur $ax$; donc $hd = dx$, & $ha = ax$; mais la ligne anguleuſe $hdx > hx$; donc $hd$ moitié de la premiere ligne eſt plus grande que $hp$, moitié de la ſeconde; donc la perpendiculaire $hp$ eſt plus courte que $dh$; donc, &c.

COROLLAIRE I. La ligne anguleuſe $hax$ s'écartant plus de la droite $hpx$, que la ligne anguleuſe $hdx$, la premiere doit être plus grande que $hdx$; donc $ha$ moitié de la premiere ligne anguleuſe eſt plus longue que $hd$, moitié de l'autre; donc de toutes les obliques, celles qui s'écartent le plus de la perpendiculaire, ſont les plus longues. Mais ſi deux obliques $hf$, $hd$ s'écartent également de la perpendiculaire, l'une à droite & l'autre à gauche il eſt viſible qu'elles ſeront égales; & parce qu'il ne peut y avoir que deux droites également éloignées de la perpendiculaire, l'une à droite & l'autre à gauche, on ne peut d'un même point $h$, mener plus de deux lignes égales ſur une même ligne $ab$.

COROLLAIRE II. Il ſuit du Corollaire précédent que ſi la perpendiculaire $hp$ eſt la même (ce ſeroit la même choſe ſi l'on avoit deux perpendiculaires égales) & ſi les obliques $hd$, $hf$ ſont égales de part & d'autre, leur écartement de la perpendiculaire, ſavoir $dp$, $pf$ (on appelle cet écartement, *éloignement de perpendicule*) ſera égal de part & d'autre; ſi les obliques & les éloignemens de perpendicule ſont égaux, la perpendiculaire $hp$ (qu'on peut prendre pour un éloignement de perpendicule,

en

en prenant $dp$, $fp$ pour les perpendiculaires) ſera égale de part & d'autre; & ainſi ſi la perpendiculaire & l'éloignement de perpendicule ſont égaux de part & d'autre, les obliques ſeront évidemment égales; car alors pliant la figure de maniere que le plis tombe ſur $hp$, $f$ tombera ſur $d$; donc $hd = hf$. De même ſi $hd = hf$, $hp$ reſtant la même, les deux obliques égales ſeront également éloignées de la perpendiculaire (Corollaire précédent); donc les éloignemens de perpendicule ſeront égaux. Donc de ces trois choſes, la perpendiculaire, l'oblique, l'éloignement de perpendicule, ſi deux ſont égales de part & d'autre, la troiſiéme le ſera auſſi.

COROLLAIRE III. Donc une ligne $ca$ (fig. 12) tirée du centre $c$ ſur la tangente $ga$, au point de contingence $a$, eſt perpendiculaire ſur cette tangente; car la ligne $ca$ eſt la plus courte qu'on puiſſe mener du point $c$ à la ligne $ga$, puiſque toute autre ligne menée du point $c$ à la ligne $ga$ ſortiroit du cercle & ſeroit par conſéquent plus longue que le rayon $ca$. De plus la tangente ne touche le cercle qu'en un ſeul point, autrement du même point on pourroit tirer deux perpendiculaires ſur la même ligne; ce qui (18) eſt impoſſible. Il n'eſt pas moins évident qu'une ligne $ga$ perpendiculaire à l'extrémité $a$ d'un rayon $ca$ eſt une tangente.

20. THÉOREME. *Une ligne* c p *menée du centre d'un cercle perpendiculairement à la tangente* g h *coupe les cordes paralleles à cette tangente en deux parties égales* (fig. 13). Car $cp$ eſt perpendiculaire à ces cordes (13), & parce que $cp$ a de plus un point $c$ également éloigné de $a$ & de $d$ (points de la circonférence du cercle), le point d'interſection $s$ doit être auſſi égale-

ment éloigné de *a* & de *d*, autrement la ligne *c p* pencheroit d'un côté ou de l'autre de la ligne *a d*, & ne lui ſeroit pas par conſéquent perpendiculaire. Donc *c p* coupe *a d* en deux également ; donc, &c.

REMARQUE. Si une ligne *c p* a deux points *c*, *s* également éloignés chacun des extrémités *a*, *d* de la corde *a d*, elle lui eſt perpendiculaire, parce qu'elle ne penche pas plus d'un côté que de l'autre par rapport à cette corde.

COROLLAIRE I. Si le point d'interſection *s* eſt également éloigné des extrémités *a* & *d* de la corde *a d*, & que la ligne *c s* ſoit perpendiculaire à cette corde, elle aura par la démonſtration du théorême, tous ſes autres points également éloignés de *a* & de *d*; donc *c s* paſſera par le centre *c*, point également éloigné de *a* & de *d*.

COROLLAIRE II. Donc une ligne *c s* qui paſſe par le ſommet d'un angle *a c d*, dont les côtés ſont égaux, & par le milieu du côté oppoſé à cet angle, paſſe auſſi par le milieu de l'arc & le diviſe en deux parties égales, auſſi-bien que l'angle meſuré par cet arc.

COROLLAIRE III. Il ſuit du Théorême, de la Remarque & du Corollaire précédent que ſi des trois propriétés paſſer par le centre, être perpendiculaire à la corde, couper la corde en deux parties égales, une ligne *c s* en a deux, elle doit avoir la troiſiéme.

21. PROBLEME. *Faire paſſer une circonférence de cercle par trois points donnés* a, b, d (fig. 14). Ayant joint ces points par les lignes *a b*, *d b*, coupez ces lignes (17) en deux également par les perpendiculaires *h h*, *x x*, le point d'interſection *c* de ces perpendiculaires ſera le centre du cercle cherché ; & ſi du point *c* & de l'intervale *c b*, *c a* ou *c d* on décrit une circonférence, elle paſſera par les

trois points donnés ; car tous les points de la ligne *h h* étant également éloignés (17) de *a* & de *b*, & tous ceux de *x x* étant auſſi également éloignés de *b* & de *d*, le point *c* commun aux deux lignes *h h*, *x x*, ſera également éloigné de *a*, *b*, *d* ; donc, &c. *

COROLLAIRE. Il ſuit de-là que ſi l'on avoit un arc *a b d* dont on voulût trouver le centre, après avoir tiré deux cordes *a b*, *b d* dans cet arc, on chercheroit le centre *c*, comme nous venons de le dire.

22. PROBLEME. *Couper un arc a b en deux parties égales.* Tirez la perpendiculaire *h h* de maniere qu'elle coupe la corde *a b* en deux également (17), cette ligne paſſera par le centre *c* (20) ; donc elle aura un point *c* également éloigné de *a* & de *b*, & puiſque d'ailleurs elle paſſe par le milieu de *a b*, elle aura deux points *c*, *s* également éloignés de *a* & de *b* ; donc tous les points de cette ligne ſeront également éloignés de *a* & de *b* ; donc le point *o* eſt également éloigné de *a* & de *b* ; ainſi l'arc *a o* eſt égal à l'arc *o b* ; donc, &c.

23. THÉOREME. *Les arcs compris entre une tangente & une corde, ou entre deux cordes paralleles, ſont égaux* (fig. 23). Car la ligne *c p* paſſant par le centre & aboutiſſant au point de contingence eſt perpendiculaire ſur la tangente *g h* (19), & par conſéquent ſur ſes paralleles *a d*, *m n* (13) ; mais le point *c* de la ligne *c p* eſt également éloigné de *a* & de *d*, de *m* & de *n* ; donc tous les autres points de la ligne *c p* ſont également éloignés de *a*

* Pour que le Problême ſoit poſſible, il faut que les trois points ne ſoient pas en ligne droite ; car il eſt viſible qu'une droite ne peut rencontrer un cercle en plus de deux points.

& de $d$; donc $ap = pd$; de même $mp = pn$; donc $ap - mp = dp - np$, ou $am = nd$; donc, &c.

24. THÉOREME. *De toutes les sécantes extérieures tirées d'un point a à la partie convexe* b d *de la circonférence, la plus courte est celle qui prolongée passeroit par le centre* (fig. 15); *mais si les sécantes sont tirées à la partie concave* d b (fig. 16), *celle qui passe par le centre est la plus longue. Si les sécantes sont intérieures, la plus courte sera celle qui prolongée passeroit par le centre lorsque l'origine se trouve au-dessous du centre* (fig. 17); *mais si le point a est au-dessus du centre* (fig. 18), *la plus longue est celle qui passe par le centre.* Ayant tiré le rayon $dc$, la ligne anguleuse $adc$ (fig. 15) est plus longue que $abc$; donc retranchant de ces deux lignes les rayons égaux $cb$, $cd$, il restera $ad > ab$; donc 1°. &c. 2°. (fig. 16) $acd > ad$; mais $acd = acb$, puisque ces deux lignes ayant la partie commune $ac$, ont encore les parties égales $dc$, $bc$; donc $acb > ad$; donc 2°. &c. 3°. (fig. 17) $cad > cd = cb = ca + ab$; donc $(ad + ac - ac) > (ca + ab - ac)$, ou $ad > ab$; donc 3°. &c. 4°. (fig. 18) $ac + cd = ac + cb$; or $ac + cd > ad$, puisque $ad$ est une ligne droite & $acd$ une ligne anguleuse; donc $ab > ad$; donc 4°. &c.

COROLLAIRE. Donc si le point $a$ est à la circonférence (fig. 19), le diametre $acb = acd$ sera plus grand que la corde $ad$; donc de toutes les cordes le diametre est la plus grande.

REMARQUE. D'un point $a$ pris en dedans ou en dehors, ou à la circonférence d'un cercle (fig. 15, 16, 17, 18 & 19) l'on ne peut évidemment tirer que deux lignes $ad$, $ap$, qui s'éloignent également de la ligne $ab$, l'une d'un côté

& l'autre de l'autre; & par conſéquent il ne peut y avoir (fig. 19) que deux cordes égales *ad*, *ap* tirées d'un même point *a* de la circonférence d'un cercle; c'eſt-à-dire, que les cordes également éloignées du centre ſont égales. Il eſt d'ailleurs évident que les plus petites cordes répondent aux plus petits arcs & réciproquement.

25. THÉOREME. *On ne peut faire paſſer aucune ligne droite entre la circonférence & la tangente; mais on peut y faire paſſer une infinité de courbes.* Car ſi *ab* (fig. 20) eſt tangente, *ca* lui ſera perpendiculaire (19); donc *ca* ſeroit oblique ſur la ligne *ad* qu'on voudroit faire paſſer entre la tangente *ab* & la circonférence; donc du point *c* menant *co* perpendiculaire ſur *ad*, *co* ſeroit plus courte que *ca* (19); donc le point *o* eſt dans le cercle; donc *ad* coupe le cercle, & par conſéquent ne paſſe pas entre la circonférence & la tangente; donc, &c. Mais ſi dans la figure 21 on prolonge *ac* juſqu'en *p*, & que du rayon *pa* & du point *p* comme centre on décrive le cercle *adh*, il eſt évident que *ab* ſera encore tangente à ce cercle, comme elle l'eſt au cercle *ao*, & de plus que ces deux cercles n'auront d'autre point commun que le point *a*; car le point *d*, *par exemple*, ne ſauroit être commun aux deux cercles. En effet tirant *dc*, on aura, par rapport au grand cercle, une ſécante intérieure, qui prolongée ne paſſeroit point par le centre *c*. Donc (24) $dc > ac = co$; donc le point *o* du petit cercle ne peut pas ſe confondre avec le point *d* du grand; donc ces deux cercles n'ont d'autre point commun que le point *a*, & le grand embraſſe le petit ſans le couper; donc, &c. En prolongeant le rayon *ap* on pourroit

décrire un troiſiéme cercle qui embraſſeroit le cercle *adh*, & n'auroit avec lui d'autre point commun que le point *a*, & ainſi de ſuite. Donc on peut faire paſſer autant de circonférences que l'on voudra entre la tangente *ab* & la petite circonférence, ſans couper ni l'une ni l'autre ligne.

REMARQUE. Cela vient de ce que la circonférence du cercle *adh* ſe détourne pour embraſſer la petite circonférence, & la circonférence d'un troiſiéme cercle ſe détourneroit de même pour embraſſer le cercle *adh*; mais la ligne droite *ad* allant toujours dans la même direction, doit couper la petite circonférence.

COROLLAIRE. De-là il ſuit que l'eſpace *bo*, ſi petit qu'il ſoit, peut ſe diviſer en une infinité de parties, puiſqu'en faiſant paſſer tant de cercles qu'on voudra (on prend ici la circonférence pour le cercle) entre la tangente & la circonférence, ces cercles couperont la ligne *ob* en tant de parties que l'on voudra.

## *De la meſure des Angles.*

26. Nous avons déja dit (7) que la meſure d'un angle qui a ſon ſommet au centre d'un cercle, doit s'eſtimer par le nombre des degrés, minutes, ſecondes, &c. de l'arc compris entre ſes côtés; de ſorte qu'un angle qui a ſon ſommet au centre du cercle, a pour meſure l'arc compris entre ſes côtés. D'où il ſuit qu'étant donné un angle *bac* (fig. 22), pour faire un autre angle *hfg* ſur la ligne *fg*, égal au premier, du point *a* & d'un intervale à diſcrétion *ac* décrivez l'arc *bc*, du point *f* comme centre & de la même ouverture de compas décrivez un arc indéfini *gh*, prenant

avec le compas la grandeur de l'arc *bc*, portez-la de *g* en *h*, par les points *f*, *h*, tirez la ligne *fh*, & l'angle *hfg* ſera égal à l'angle *bac* : car ces deux angles ſont meſurés par des arcs égaux décrits de la même ouverture de compas.

27. THÉORÈME. *L'angle à la circonférence formé par deux cordes* ab, ad, *ou par une tangente* ga *& par une corde* ba, *a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés* (fig. 12). Car ſi l'on ſuppoſe qu'un de ſes côtés ſoit un diametre, en tirant par le centre *c* la ligne *hf* parallele au côté *ba*, les angles *bad*, *fcd* (étant correſpondans) ſont égaux (13); mais l'angle *fcd* ayant ſon ſommet au centre, a pour meſure l'arc $fd = ah$ (parce que ces deux arcs meſurent des angles oppoſés au ſommet) $= bf$ à cauſe des paralleles *ba*, *fh* (23); donc $fd = bf$; donc $bad = fcd$ a pour meſure *fd* ou *bf*, ou la moitié de l'arc compris entre ſes côtés. Mais par la propriété de la tangente, la ligne *ca* lui eſt perpendiculaire, & par conſéquent l'angle *gad* eſt droit; donc *gad* a pour meſure la moitié de la demi-circonférence *abd*, ou $\frac{ab}{2} + \frac{bd}{2}$; or *bad* a pour meſure $\frac{bd}{2}$; donc *gab* a pour meſure $\frac{ab}{2}$; donc, &c. *

REMARQUE. Nous avons ſuppoſé qu'un des côtés *ad* de l'angle paſſoit par le centre, mais la

* L'angle formé par une corde & une tangente, s'appelle *angle du ſegment*, tel eſt l'angle *gab*. L'angle *bad* formé par deux cordes, ou par un diametre & une corde, eſt appellé *angle inſcrit*.

même chose a lieu dans le cas contraire (fig. 23); car l'angle $bAf$, entre les côtés duquel se trouve le centre $c$, peut être divisé en deux parties par le diametre $ad$, & par le Théorême présent, l'une de ses parties a pour mesure $\frac{bd}{2}$, & l'autre $\frac{df}{2}$; or ces deux moitiés valent $\frac{bf}{2}$; donc, &c. A l'égard de l'angle $gaf$, hors duquel se trouve le centre $c$, ayant tiré le diametre $ad$, il est visible, par le Théorême, que l'angle $dag$ a pour mesure $\frac{gd}{2} = \frac{df}{2} + \frac{fg}{2}$; mais l'angle $fad$ a pour mesure $\frac{df}{2}$; donc l'angle $gaf$ a pour mesure $\frac{fg}{2}$; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc l'angle $pab$ formé par une corde $ab$, & le prolongement $pa$ d'une autre corde, a pour mesure la moitié de la somme des arcs $ab$, $ag$ soutendus par ces cordes; car les angles $pab$, $bag$ sont deux angles contigus, qui par conséquent (9) valent deux angles droits, c'est-à-dire, la moitié du cercle entier. Or le seul angle $bag$ vaut la moitié de l'arc $bdg$; donc l'angle $pab$ a pour mesure la moitié du reste du cercle, c'est-à-dire $\frac{ab}{2} + \frac{ag}{2}$; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc 1°. les angles inscrits $a$ & $b$ appuyés sur le même arc $df$ sont égaux (fig. 24), & chacun d'eux vaut la moitié de l'angle central $dcf$. 2°. Un angle $bad$ appuyé sur le diametre $bd$, & qui a son sommet à la circonférence, est droit (fig. 25), parce qu'il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence $bfd$, ou 90°. L'angle $fad$ appuyé sur un arc plus petit que la

demi-circonférence eſt aigu, & l'angle *b a g*, appuyé ſur un arc *b f g* plus grand que la demi-circonférence eſt obtus. En général le plus grand angle eſt meſuré par la moitié d'un plus grand arc, & un plus petit angle par la moitié d'un plus petit arc, lorſqu'il eſt queſtion des angles inſcrits, ou des angles qui ont leur ſommet à la circonférence du cercle.

REMARQUE. Si deux angles *d c f*, *d a f* ſont appuyés ſur la même baſe *d f* (fig. 24) & que leur ſommet ſoit ſitué ſur la même ligne *a c* perpendiculaire à *d f*, celui qui aura ſon ſommet *a* plus éloigné de *d f*, ſera le plus petit, puiſqu'il eſt évident qu'à proportion que les côtés *d a*, *a f* s'alongent pour que le point *a* parvienne juſqu'à la circonférence du cercle *d f b*, l'angle *d a f* doit diminuer; à plus forte raiſon il diminuera davantage ſi les côtés ſe rencontrent au-delà de cette circonférence.

28. PROBLEME. *Sur l'extrémité de la ligne* a b (*qu'on ſuppoſe ne pouvoir être prolongée*) *mener une perpendiculaire* d b (*fig. 26*). D'un point quelconque *c* hors de cette ligne & d'un intervale *c b* décrivez un cercle *d b a* : par le point *a*, où ce cercle coupe la ligne *a b*, tirez le diametre *a c d*, & du point *d* la ligne *d b*, qui ſera perpendiculaire ſur *a b*. En effet l'angle *d b a* eſt appuyé ſur un diametre; donc (27) il eſt droit; donc, &c.

29. PROBLEME. *D'un point* a *hors d'un cercle* d p, *mener une tangente à ce cercle* (fig. 27). Diviſez en deux également la diſtance *a c* entre le point *a* & le centre du cercle donné; du point *o* milieu de la ligne *a c* & de l'intervale *a o*, décrivez un cercle *a p d* qui coupera le premier en *d* & en *p*. Par le point *a* & les points *d* & *p* tirez les lignes *a d*, *a p*, elles ſeront tangentes du cercle *a d p*; car les

angles $adc$, $apc$, étant appuyés sur le diametre $ac$, sont droits; donc les lignes $ap$, $ad$ sont perpendiculaires sur les rayons $cd$, $cp$; donc les lignes $ap$, $ad$ sont des tangentes (19).

30. THÉOREME. *L'angle excentrique* * b a d *a pour mesure la moitié de deux arcs* b d, f g *compris entre ses côtés prolongés* (fig. 28). Car ayant tiré $gh$ parallele à $fd$, les angles correspondans $bad$, $bgh$ seront égaux (13); or (27) la mesure de l'angle $bgh$ est $= \frac{bdh}{2} = \frac{bd}{2} + \frac{gh}{2}$; mais $dh = fg$ (23) à cause des paralleles $fd$, $gh$; donc la mesure de l'angle $bad$ est $= \frac{bd}{2} + \frac{fg}{2}$; donc, &c.

REMARQUE. Si la ligne $gh$ devenoit tangente, l'arc $gh$ s'évanouiroit, & alors $gf$ seroit égal à $gd$, & le Théorême auroit également lieu.

31. THÉOREME. *L'angle circonscrit* d a b (*c'est-à-dire dont le sommet est hors du cercle*) *a pour mesure la moitié de l'arc concave* b d, *compris entre ses côtés moins la moitié de l'arc convexe* g f (fig. 29). Car ayant tiré $gx$ parallele à $da$, les angles correspondans $dab$, $xgb$ seront égaux; mais l'angle inscrit $xgb$ a pour mesure $\frac{xb}{2}$; & $xb$ est égal à $db - dx$, & $dx$ est $= gf$ à cause des paralleles $df$, $gx$; donc $\frac{xb}{2} = \frac{db}{2} - \frac{fg}{2}$; donc, &c.

COROLLAIRE. Si la ligne $ad$ devient tangente, de maniere que $ad$ se confonde avec $ap$, l'arc $fpd$

* Un angle qui a son sommet entre la circonférence & le centre, est appellé *ex-centrique*; mais on appelle *angle circonscrit* celui qui a son sommet hors du cercle.

s'évanouira, les deux points *f* & *d* se confondront en *p*, & l'angle *pab* aura pour mesure $\frac{pnb}{2} - \frac{pg}{2}$. On voit aussi que l'angle *pam*, formé par deux tangentes *ap*, *am*, a pour mesure la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe, c'est-à-dire $\frac{pbm}{2} - \frac{pgm}{2}$.

## *Des Polygones.*

32. Une *figure rectiligne* ou un *polygone rectiligne*, est un espace renfermé par des lignes droites, qu'on appelle *côtés du polygone*, ou *de la figure*. Il est évident qu'il faut au moins trois lignes pour renfermer un espace. Les polygones prennent différens noms, selon le nombre de leurs côtés. Le *triangle* est un polygone de trois côtés, le *quadrilatere* en a quatre, le *pentagone* cinq, l'*exagone* six, l'*eptagone* sept, l'*octogone* huit, l'*énéagone* neuf, le *décagone* dix, l'*ondécagone* onze, le *dodécagone* douze, &c. On appelle *polygone régulier* celui dont les côtés sont égaux entr'eux aussi-bien que les angles; dans le cas contraire les polygones sont dits *irréguliers*. Les *polygones symmétriques* sont ceux qui sont composés des côtés paralleles & égaux deux à deux; d'où il suit qu'ils doivent avoir un nombre pair de côtés.

Un triangle, dont les trois côtés sont égaux entr'eux, s'appelle *triangle équilatéral* : tel est le triangle *bac* (fig. 30); si deux de ses côtés seulement sont égaux, on le nomme *isocelle*, tel est le triangle *bac* (fig. 31); mais si les trois côtés du triangle *baç* (fig. 32) sont inégaux, le triangle est

appellé *ſcalene.* Un triangle dont tous les angles ſont aigus s'appelle *acutangle*, celui qui a un angle droit s'appelle *triangle rectangle*, & l'on nomme *triangle obtuſangle* celui qui a un angle obtus. La figure 30 repréſente un triangle acutangle, la figure 31 un triangle rectangle, & la figure 32 un triangle obtuſangle. Dans un triangle le côté oppoſé à un angle s'appelle *la baſe* de cet angle ; ainſi *b c* eſt la baſe de l'angle *a* (fig. 32). Mais ſi l'angle *a* eſt droit (fig. 31) la baſe *b c* eſt appellée *hypothénuſe.*

33. THÉOREME. *Les trois angles d'un triangle quelconque* a b c *valent deux angles droits* (fig. 33). Ayant fait paſſer une circonférence de cercle par les trois points *b*, *a*, *c* (21), chaque angle aura pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés ; donc les trois angles *a*, *b*, *c* auront pour meſure $\frac{bc}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{ab}{2} = \frac{abca}{2} = 180°$ ; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc un triangle ne peut avoir qu'un ſeul angle droit ou un ſeul angle obtus, autrement la ſomme de ſes trois angles vaudroit plus de deux angles droits.

COROLLAIRE II. Si le triangle *b a c* eſt ſuppoſé rectangle en *a*, les angles *b* & *c*, ſitués ſur l'hypothénuſe *b c*, vaudront un angle droit, & ſeront complémens l'un de l'autre (7).

COROLLAIRE III. Si dans un triangle on connoît deux angles, on connoîtra le troiſiéme, en ôtant la valeur de ces deux angles de 180°.

COROLLAIRE IV. Dans un triangle *a b c*, le plus grand angle *a* eſt oppoſé au plus grand côté, & le plus petit angle *b* au plus petit côté *a c*, & réciproquement le plus grand côté eſt oppoſé

au plus grand angle, & le plus petit côté au plus petit angle; car si *a* est plus grand que *b*, donc la moitié de l'arc *bc*, mesure du premier angle, sera plus grande que la moitié de l'arc *ac*, mesure du second; donc l'arc *bc* sera plus grand que l'arc *ac*; donc la corde *bc* sera plus grande que la corde *ac*; donc 1°. &c. 2°. si la corde *bc* est plus grande que la corde *ac*, l'arc *bc* sera plus grand que l'arc *ac*, & la moitié du premier arc plus grande que la moitié du second, c'est-à-dire que la mesure de l'angle *a* sera plus grande que la mesure de l'angle *b*; ainsi l'angle *a* sera plus grand que l'angle *b*.

COROLLAIRE V. Il suit du dernier Corollaire que si les trois angles *a*, *b*, *c* sont égaux, les trois côtés opposés le seront aussi, c'est-à-dire qu'un triangle équiangle est équilatéral & réciproquement. De plus si deux angles *d* & *b* seulement sont supposés égaux, les côtés opposés à ces angles seront égaux, & réciproquement si un triangle a deux côtés égaux, les angles opposés à ces côtés seront égaux; donc dans un triangle isocelle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

34. THÉOREME. *L'angle extérieur* a c d *formé par un côté* a c *& le prolongement* c d *d'un autre côté vaut les deux angles intérieurs opposés* a *&* b (fig. 32). Car l'angle *a c d* avec l'angle *a c b* valent deux angles droits; mais le même angle *a c b* avec les deux autres angles *a* & *b* valent de même 180° (Théorême précédent); donc l'angle *a c d* vaut les deux angles *b* & *a* opposés; donc, &c.

35. THÉOREME. *Deux triangles* abc, dfg (fig. 34) *qui ont un angle* a *&* d *égal, & les côtés qui comprennent cet angle égaux de part & d'autre, sont*

*égaux en tout.* Car si l'on conçoit le côté *d f* exactement appliqué sur *a b*, le point *d* sur le point *a*, le point *f* sur le point *b*, ces deux côtés égaux se confondront ; & parce que l'angle *a* est égal à l'angle *d*, le côté *d g* tombera sur *a c* & le point *g* sur le point *c* ; donc *f g* tombera sur *b c* ; donc les deux triangles se confondront ; donc ils sont égaux.

COROLLAIRE. Deux triangles *a b c*, *d f g* qui ont leurs trois côtés égaux, chacun à chacun, sont égaux en tout. Car posant *d f* sur *a b*, ces deux côtés égaux se confondront ; or je dis que *d g* tombera sur *a c*, le point *g* sur le point *c*, & que l'angle *d* sera égal à l'angle *a* ; car autrement *f g* ne seroit pas $= b c$, puisque le côté *d g* s'écarteroit plus ou moins du côté *d f*, que *a c* de *b a* ; donc l'angle *a* est égal à l'angle *d*. Mais les deux côtés qui comprennent l'angle *a* & ceux qui comprennent l'angle *d* sont égaux ; donc par le Théorême, les deux triangles sont égaux.

36. THÉOREME. *Deux triangles* a b c, f d g *qui ont un côté* b c, f g *égal de part & d'autre, & les angles* b *&* c, f *&* g *sur ce côté, égaux chacun à chacun, sont égaux en tout.* Car posant *f g* sur *b c*, le point *f* sur le point *b*, le point *g* sur le point *c*, il est visible (à cause de $f = b$ & de $g = c$) que *f d* tombera sur *b a* & *g d* sur *c a* ; donc *d* tombera sur *a*, & les deux triangles se confondant ne feront qu'un seul & même triangle. Ils sont donc égaux.

37. PROBLEME. *Faire un triangle* a b c *égal au triangle* d f g. Ayant tiré $b c = f g$, faites (26) l'angle *a b c* égal à l'angle *d f g*, & l'angle *a c b* égal à l'angle *d g f*, tirant les lignes *a b*, *a c* jus-

qu'à ce qu'elles ſe rencontrent en *a*, vous aurez les deux triangles *b a c*, *d f g* qui auront un côté égal de part & d'autre, & les deux angles ſur ce côté égaux chacun à chacun; donc par le Théorême précédent ces triangles ſeront égaux.

38. THÉOREME. *La ſomme de tous les angles d'un Polygone* a b c d f (fig. 35) *vaut autant de fois deux angles droits, que le Polygone a de côtés moins deux.* Car ſi du ſommet d'un des angles *a* du Polygone on tire à tous les autres angles (excepté aux deux angles voiſins) des lignes *a d*, *a c*, il eſt viſible qu'on formera autant de triangles moins deux qu'il y a de côtés, & les angles de ces triangles ſeront formés des angles mêmes du Polygone. Mais les angles de chacun de ces triangles valent deux angles droits; ainſi les angles du Polygone valent autant de fois deux angles droits, qu'il a de côtés moins deux.

REMARQUE. Lorſque dans les Polygones il y a un angle rentrant *d** (fig. 36), le Théorême ne peut être vrai, à moins qu'on ne prenne pour cet angle ſon ſupplément à 360°, parce que les angles *a d f*, *a d c*, joints à l'angle *f d c*, valent 360° (11); or la ſomme des angles *a d f*, *a d c* jointe aux autres angles du Polygone, vaut autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc pour avoir la ſomme des angles d'un Polygone de 8 côtés, il faut multiplier 180° par 8 — 2 = 6, le produit 1080° ſera la valeur des angles du Polygone. En général appel-

* On appelle *angle rentrant* celui qui rentre dans la figure, *l'angle ſaillant* eſt celui qui ſort pour ainſi dire de la figure.

lant $n$ le nombre des côtés, $s$ la somme des angles du Polygone, $r$ l'angle droit, on aura $s = 2r \times (n - 2) = 2nr - 4r$.

COROLLAIRE II. Si le Polygone est régulier, la valeur de chaque angle se trouvera en divisant la somme des angles par le nombre des angles ou des côtés (parce que dans ce cas tous les angles du Polygone sont égaux (32)); ainsi la valeur de chaque angle sera $= \frac{2nr - 4r}{n}$. Dans le cas du triangle équilatéral, cette quantité, que j'appelle $x$, est $= 60°$; pour le quarré on a $x = 90°$, $108°$ pour le pentagone, $120°$ pour l'exagone, $135°$ pour l'octogone, &c.

39. THÉOREME. *La somme des angles extérieurs d'un Polygone vaut 4 angles droits, ou* $360°$ (fig. 37). Car chaque angle intérieur $abc$, joint à son extérieur $cbp$, vaut deux angles droits, puisque ce sont deux angles contigus; donc la somme des angles intérieurs & extérieurs vaut autant de fois deux angles droits qu'il y a d'angles ou de côtés. Mais (Théorême précédent) les seuls angles intérieurs valent autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux; donc les angles extérieurs valent seulement deux fois deux angles droits, ou quatre angles droits.

COROLLAIRE. Si le Polygone est régulier, les angles extérieurs seront égaux entr'eux aussi-bien que les intérieurs; donc l'angle extérieur d'un Polygone régulier se trouvera en divisant $360°$ par le nombre des angles ou des côtés, ou par $n$; ainsi la formule générale de la valeur $y$ de l'angle extérieur d'un Polygone régulier quelconque sera $y = \frac{360°}{n}$. Si $n = 8$ l'on aura $y = 45$; c'est-à-dire que l'angle

l'angle extérieur de l'octogone régulier vaut 45°.

40. THÉOREME. *Si par tous les angles* a, b, d *&c. d'un Polygone régulier* (fig. 38) *on tire des lignes* a c, b c, d c *&c. qui partagent ces angles en deux également ; ces lignes partageront le Polygone en autant de triangles égaux qu'il a de côtés.* Car l'angle *a* étant égal à l'angle *b* (puiſque le Polygone eſt ſuppoſé régulier), *b a c* moitié de *a* ſera = *a b c* moitié de *b* ; donc le triangle *b a c* a deux angles égaux *b a c*, *a b c* ; donc (33) les côtés *a c*, *b c* oppoſés à ces angles ſont égaux. On démontrera de même que le côté *b c* = *d c*, &c. ; donc les deux triangles *b a c*, *b d e* qui ont tous leurs côtés égaux ſeront égaux (35) ; on peut prouver la même choſe pour les autres triangles ; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc ſi du point *c* comme centre, & de l'intervalle *a c* on décrit un cercle, il paſſera par tous les angles du Polygone qui ſe trouvera inſcrit dans le cercle *; de ſorte qu'on peut toujours inſcrire un Polygone régulier dans un cercle.

REMARQUE. On appelle *rayon oblique* une ligne *a c* menée du centre *c* à un angle *a* quelconque du Polygone régulier ; mais on appelle *rayon droit* une perpendiculaire *c p* tirée du centre *c* ſur un côté quelconque *g h* du Polygone régulier.

COROLLAIRE I. Le point *c* eſt le centre du Polygone, & les angles au centre *a c b*, *b c d*, &c. oppoſés à des côtés égaux, ſont évidemment égaux : en effet les cordes *a b*, *d b* ne peuvent être égales ſans que les arcs correſpondans le ſoient ; donc les angles dont ces arcs ſont les meſures, ſont égaux.

* Un Polygone *inſcrit* dans un cercle, eſt un Polygone dont les côtés ſont des cordes ; un Polygone *circonſcrit* à un cercle, eſt celui dont les côtés ſont des tangentes du cercle.

COROLLAIRE II. Les angles au centre d'un Polygone régulier, ayant pour mesure le cercle entier, valent 360°, & chacun d'eux est égal à $\frac{360}{n}$ ($n$ étant le nombre des angles du Polygone); mais (39) les angles extérieurs d'un Polygone régulier valent aussi 360°, & chacun d'eux est $= \frac{360}{n}$; donc la somme des angles au centre d'un Polygone régulier est égale à la somme des angles extérieurs, & chacun des premiers est égal à chacun des seconds.

COROLLAIRE III. Si le Polygone régulier $abdfgh$ est un exagone, l'angle au centre sera de 60°; car l'angle au centre aura pour mesure la sixiéme partie de la circonférence du cercle, & à cause du triangle isocelle $bac$, chacun des angles sur la base $bc$ sera aussi de 60°; donc le triangle $bac$ sera équiangle & équilatéral; donc le côté $ab$ de l'exagone régulier est égal au rayon du cercle.

COROLLAIRE IV. Il suit du Corollaire précédent, que pour inscrire un Exagone régulier dans un cercle, il suffit de porter le rayon $ac$ du cercle 6 fois sur la circonférence; & pour inscrire un dodécagone régulier dans le cercle, il suffira de diviser en deux également les arcs $ba$, $bd$, &c. (22), & par les points de division tirant les lignes $ma$, $mb$, $nb$, $nd$, &c. l'on aura un dodécagone régulier inscrit.

REMARQUE. Etant donné un angle $bca$ pour le diviser en deux également, du sommet de l'angle $c$ on décrira l'arc $ba$ qu'on coupera en deux parties égales au point $m$, si par le point $c$ & par le point $m$ on tire la ligne $cm$, l'on aura les angles $acm$, $bcm$ mesurés par des arcs égaux $ma$, $bm$; donc ces angles sont chacun la moitié de l'angle $acb$; donc, &c.

41. THÉOREME. *Tous les rayons droits* c p, c q, *&c. d'un Polygone régulier ſont égaux.* Car le rayon oblique *c h* diviſant en deux également l'angle *h* (voyez le Théorême précédent), les triangles rectangles *c h p*, *c h q* ont le côté commun *h c*, & les angles ſur ce côté égaux. En effet *c h p* = *c h q*, mais *p* & *q* étant droits, les angles *q c h*, *p c h* ſont complémens des angles égaux *c h p*, *c h q*; donc ils ſont égaux; donc les triangles *c h p*, *c h q* ont deux angles égaux ſur un même côté; donc ils ſont égaux; donc *c p* = *c q*; donc, &c.

42. THÉOREME. *Le rayon droit d'un Polygone régulier eſt d'autant plus petit que le Polygone a moins de côtés:* par exemple, *le rayon droit du pentagone régulier* (fig. 39) *eſt plus petit que le rayon droit de l'exagone régulier.* Car moins le Polygone a de côtés, plus chacun de ſes côtés eſt grand; donc en ſuppoſant les Polygones inſcrits dans le même cercle, le rayon droit du pentagone ſera une perpendiculaire abaiſſée du centre ſur une plus grande corde; donc cette perpendiculaire ſera plus petite que ſi la corde étoit plus petite, c'eſt-à-dire, ſi le Polygone avoit plus de côtés: puiſque les cordes ſont d'autant plus éloignées du centre, qu'elles ſont plus petites; donc, &c.

43. PROBLEME. *Inſcrire un cercle dans un Polygone régulier* a b d f g (fig. 39). Tirez les rayons obliques *b c*, *d c* qui partagent les angles *b*, *d*, &c. en deux également. Menez par le centre *c* ſur le côté *f g* la perpendiculaire *c p*, qui coupera *f g* en deux également (20). Du point *c* comme centre & de l'intervalle *c p* décrivez un cercle *p p*, il eſt viſible que tous les rayons droits *c p*, *c p*, &c. étant égaux & perpendiculaires ſur les côtés *a g*, *g f*,

&c., ces côtés seront des tangentes du cercle ; donc tous les côtés de ce Polygone seront des tangentes du cercle, ou (ce qui revient au même) le Polygone sera circonscrit au cercle *p p*.

REMARQUE. Si du point *c* & de l'intervalle *cd* on décrit un second cercle *d b a g f*, le Polygone sera inscrit dans ce second cercle & circonscrit au premier.

44. PROBLEME. *Inscrire un Polygone régulier dans un cercle.* Cherchez, par le moyen du *rapporteur* (qui n'est autre chose qu'un demi-cercle *a p d* (fig. 40) divisé en degrés *), l'arc correspondant au côté du Polygone ; *par exemple*, l'arc de 72° s'il est question d'un pentagone. Du centre *c* du rapporteur & du cercle donné tirez le rayon *c m*, qui n'est autre chose que le rayon du rapporteur prolongé. Par le point *p* que je suppose répondre à la division 72 tirez le rayon *c n*, l'arc *m n* sera de 72°. Portant la corde *m n* cinq fois sur la circonférence, vous aurez le pentagone inscrit *n m s q x*. Il est visible que cette méthode ne peut s'étendre qu'aux Polygones, dont le nombre des côtés peut diviser exactement 360.

REMARQUE. Pour trouver géométriquement ** l'arc de 30°, ou pour diviser le quart de cercle *a f*

* Cet instrument se trouve dans les étuis de Mathématiques. On peut s'en servir pour partager un angle en deux également. Supposons, *par exemple*, qu'on ait un angle de 30°, ayant appliqué le centre du rapporteur sur le sommet de l'angle, ensorte que le diametre de l'instrument réponde à un des côtés, l'autre répondant à la division 30, on tirera par le centre du rapporteur & la division 15 une ligne qui coupera l'angle donné en deux également ; cela suppose que le nombre des degrés est pair.

** Une opération est géométrique lorsqu'on peut l'exécu-

(fig. 41) en trois parties égales, par le moyen de la regle & du compas; il suffit de porter le rayon du cercle d'abord de *a* en *m*, & ensuite de *f* en *n*, pour avoir les arcs *an*, *nm*, *mf* chacun de 30°. En effet, le rayon ou le côté de l'exagone est la corde de 60° (40); donc l'arc *am* = 60°, de même l'arc *fn* = 60°; donc l'arc *an* = *af* — *fn* = 90° — 60° = 30°. De même *mf* est de 30 degrés; donc aussi *nm* est de 30°.

Corollaire. Donc on peut facilement inscrire dans un cercle un dodécagone régulier, en portant 12 fois sur la circonférence la corde de 30 degrés.

*Des Lignes Proportionelles.*

45. On appelle *figures semblables* celles qui ayant un même nombre d'angles & de côtés, ont tous leurs angles égaux chacun à chacun, & les côtés qui comprennent ces angles proportionels.

Lemme. *Les lignes paralleles* a b, c g (fig. 42) *compriſes entre deux lignes paralleles* a c, b g *ſont égales.* Des points *a* & *c* ayant abaiſſé les perpendiculaires *ap*, *cp* ſur la ligne *bg*, prolongée s'il le faut, les angles *b* & *g* correſpondans ſeront évidemment égaux. De plus, les angles en *p* ſont égaux & droits, & les perpendiculaires *ap*, *cp* égales (puiſqu'elles meſurent la diſtance des paralleles, qui eſt par-tout la même); donc le troiſiéme angle *bap*, *gcp* dans les deux triangles *bap*, *gcb* ſera égal de part & d'autre; donc ces deux triangles ont un côté égal de part & d'autre, & les deux angles ſur ce côté égaux; ainſi ces deux triangles ſont égaux en tout (36); donc *ab* = *cg*.

ter par le moyen de la regle & du compas & ſans tâtonement, en ſuivant les principes de la Géométrie.

COROLLAIRE. Si deux lignes paralleles *ac*, *bg* ſont autant éloignées l'une de l'autre que deux autres lignes paralleles *xy*, *pp*, & que les paralleles *ab*, *cg* ſoient autant inclinées ſur les lignes *ac*, *bg* que les paralleles *xp*, *yp* le ſont entre les lignes *xy*, *pp*, l'on aura les lignes *ba*, *cg* égales entr'elles & aux lignes *xp*, *yp*.

46. THÉORÈME. *Si deux lignes* a b, a c (fig. 43) *qui ſe rencontrent en un point, ſont diviſées par des paralleles* m d, m g, &c. *également éloignées les unes des autres, un nombre quelconque des parties de la ligne* a b, *ſera au même nombre des parties de la ligne* a c, *comme une partie de* a b, *à une partie de* a c. Car les parties *dg*, *gf* ſont des obliques également inclinées entre paralleles également éloignées; de même les lignes correſpondantes *mm*, *mm* ſont également inclinées entre paralleles égales. Donc (45) les lignes *dg*, *gf* ſont égales entre elles auſſi-bien que les lignes correſpondantes *mm*, *mm*. D'ailleurs en tirant les perpendiculaires *dp*, *ap*, *mp*, &c., il eſt viſible que les triangles rectangles *apd*, *dpg* ont les côtés égaux *ap*, *dp*, les angles en *d* & en *g* correſpondans égaux, & à cauſe des angles droits *p*, les angles *pad*, *pdg* égaux, de ſorte que ces deux triangles ont les côtés *ap*, *pd* égaux & les angles ſur ces côtés égaux; donc ces triangles ſont égaux en tout & *ad* eſt = *dg*. Il n'eſt pas difficile de voir que les triangles *amp*, *mpm* ſont dans le même cas, & que par conſéquent *am* = *mm*. Cela poſé il eſt évident que *am* : 3 :: *am* : 3 :: *ad* : 3 :: *ad*, ou *am* : *ad* :: 3 : *am* : 3 : *ad*; & en général une partie quelconque *am* de la premiere ligne, eſt à une partie *ad* correſpondante de la ſeconde, comme un nom-

bre quelconque des parties de la premiere, au même nombre des parties de la ſeconde.

COROLLAIRE. L'on a de même comme deux parties de *a b* à deux parties de *a c*, ainſi trois parties de *a b* ſont à trois parties correſpondantes de *a c*. Et en général une partie quelconque de *a c* compriſe entre deux paralleles, ou entre le ſommet & une parallele eſt à la partie correſpondante de *a b* comme une autre partie de la premiere, compriſe entre deux paralleles, ou entre le ſommet *a* & une parallele, à la partie correſpondante de la ſeconde.

47. THÉOREME. *Deux triangles qui ont leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre ſont équiangles* (fig. 44). Soit le triangle *g f m* dont les côtés ſoient ſuppoſés perpendiculaires aux côtés du triangle *a b c*, il eſt viſible qu'en faiſant tourner le triangle *f g m* ſur le point *g*, le côté *f g* perpendiculaire ſur *a c* deviendra parallele au côté *a c* lorſque la ligne *g f* aura décrit un quart de cercle, de même *g m* ſera parallele à *b a* & *f m* à *b c*; c'eſt-à-dire que les côtés qui forment les angles correſpondans de ces deux triangles ſeront paralleles; donc les angles correſpondans ſont égaux (14) & les triangles équiangles.

COROLLAIRE. Il ſuit, de ce qu'on vient de dire, que les triangles dont les côtés ſont paralleles, ſont équiangles.

48. THÉOREME. *Les triangles équiangles ſont ſemblables, c'eſt-à-dire qu'ils ont leurs côtés homologues proportionels* (*les côtés homologues ſont ceux qui ſont oppoſés à des angles égaux*). Soient les deux triangles *a b c*, *d f g* (fig. 45) qu'on ſuppoſe équiangles. Poſant le point *d* ſur le point *a*, enſorte que le côté *d f* tombe ſur *a b*, il eſt viſible, à cauſe de l'angle *d* égal à l'angle *a*, que *d g* tom-

bera ſur $ac$ ; & prenant $as = df$, $ap = dg$, $fg$ tombera ſur $sp$, & le triangle $asp$ ſera égal au triangle $dfg$ ; donc l'angle $s = f$, & $p = g$. Mais par ſuppoſition $f = b$ & $g = c$ ; donc $s = b$ & $p = c$ ; donc les angles correſpondans $s$ & $b$ ſont égaux ; donc (15) $sp$ eſt parallele à $bc$ ; donc (46) $ab : ac :: as$ ou $df : ap = dg$. Si l'on avoit poſé l'angle $f$ ſur l'angle $b$, on auroit démontré de même que $ba : bc :: df : fg$. Il eſt évident (46) que $as : ap :: sb : pc :: ba : ac$.

49. REMARQUE. Si l'on tire la ligne $xa$ parallele à $bc$, on voit que les lignes $as$, $ap$ qui ſont autant inclinées entre les paralleles $xa$, $sp$ que les lignes $sb$ & $pc$ le ſont entre les paralleles $sp$, $bc$, ſont proportionelles à ces dernieres.

COROLL. I. Les triangles qui ont leurs côtés perpendiculaires ou paralleles l'un à l'autre ſont ſemblables, car (47) ces triangles ſont équiangles ; donc, &c.

COROLLAIRE II. Deux triangles $asp$, $abc$ qui ont un angle $a$ égal de part & d'autre, & des baſes $sp$, $bc$ paralleles, ſont équiangles & ſemblables.

50. THÉOREME. *Deux triangles qui ont un angle égal, & les côtés qui comprennent cet angle proportionels, ſont ſemblables.* Suppoſons l'angle $a$ dans le triangle $bac$, égal à l'angle $d$ du triangle $fgd$, & qu'on ait en même tems la proportion $ab : ac :: df : dg$. Prenant ſur $ab$ la ligne $as = df$, & tirant $sp$ parallele à $bc$, il eſt viſible que les deux triangles $asp$, $abc$ ſeront équiangles & ſemblables. Or $dfg = asp$ : car ( par ſuppoſition ) $ba : ac :: df : dg$ ; mais $fd = as$ ; donc $ba : ac :: sa : dg$. Mais à cauſe des paralleles $sp$, $bc$ l'on a (49) $ba : ac :: as = df : ap$ ; donc $ap = dg$ ; donc les deux triangles $dfg$, $asp$ ont un angle

*d* & *a* égal de part & d'autre, & les côtés qui comprennent cet angle égaux; donc ils ſont égaux en tout. Mais *asp* eſt ſemblable à *bac*; & par conſéquent *bac* eſt auſſi ſemblable à *dfg*; donc, &c.

51. THÉOREME. *Deux triangles* abc, dfg *qui ont leurs trois côtés proportionels ſont ſemblables.* Car ſi ſur *fg* on fait l'angle *gfh* égal à l'angle *b*, & *fgh* = *c*, il eſt évident que l'angle *a* ſera égal à l'angle *h*; donc les triangles *abc*, *hfg* ſeront équiangles & ſemblables. Or *hfg* = *dfg*: car. (par ſuppoſition) *bc* : *ab* :: *fg* : *fd*; mais à cauſe des triangles ſemblables *abc*, *hfg* on a de même *bc* : *ab* :: *fg*, *fh*; donc (puiſque les deux premiers termes de cette proportion ſont les mêmes) l'on a *fg* : *fd* :: *fg* : *fh*, ou (*alternando*) *fg* : *fg* :: *fd* : *fh*; mais *fg* = *fg*; donc *fd* = *fh*. De plus *bc* : *ac* :: *fg* : *dg*, & *bc* : *ac* :: *fg* : *gh*; donc *fg* : *dg* :: *fg* : *gh*, ou (*alternando*) *fg* : *fg* :: *dg* : *dh*; mais *fg* = *fg*; donc *dg* = *gh*; donc les trois côtés du triangle *dfg* ſont égaux aux trois côtés du triangle *hfg*; donc (35) ces deux triangles ſont égaux en tout. Mais *hfg* eſt ſemblable à *bac*; donc *dfg* eſt auſſi ſemblable au triangle *bac*; donc, &c.

52. THÉOREME. *Une ligne droite* ap *qui diviſe en deux également l'angle* bac *d'un triangle quelconque* bac (fig. 46), *coupe le côté oppoſé en deux parties* bp, pc *proportionelles aux côtés correſpondans* ab, ac. Par le point *b* tirez *bd* parallele à *pa*, & prolongez *ca* juſqu'à la rencontre de *bd*. A cauſe des paralleles *ap*, *db*, les triangles *apc*, *dbc* ſont ſemblables *, & (par les numéros 46

* Car à cauſe des paralleles *ap*, *db* les angles *cdb*, *cap* correſpondans ſont égaux auſſi-bien que les angles *cbd*, *cpa*; donc, &c.

& 49), l'on aura $pb : pc :: da : ac$. Mais à cauſe des paralleles $bd$, $ap$, l'angle $d = pac = bap$ (autre moitié de l'angle $bac$) $= abd$, puiſque ces angles ſont alternes-internes entre les paralleles $db$, $ap$; donc les angles $d$ & $b$ du triangle $dba$ ſont égaux, & par conſéquent les côtés qui ſont oppoſés à ces angles ſont égaux (33); donc $ba = da$. Mais nous venons de voir que $bp : pc :: da : ac$; donc en ſubſtituant, $bp : pc :: ab : ac$.

53. THÉOREME. *Si deux cordes* a b, g f *ſe coupent dans un cercle* (fig. 47), *les parties de l'une ſeront réciproques aux parties de l'autre; de ſorte que l'on aura la proportion* $ac : gc :: fc : cb$. Car ayant tiré les cordes $ag$ & $fb$, les deux triangles $gac$, $fcb$ ont les angles, oppoſés au ſommet, $acg$, $fcb$ égaux : de plus l'angle $a$ du premier & l'angle $f$ du ſecond ſont égaux (étant appuyés ſur le même arc $gb$); donc le troiſiéme angle eſt égal de part & d'autre; donc les deux triangles ſont équiangles & ſemblables; donc leurs côtés homologues ſont proportionels; & l'on a $ac : gc :: fc : cb$.

COROLLAIRE I. Si l'une des cordes $ab$ (fig. 48) eſt un diametre & que l'autre corde $fg$ lui ſoit perpendiculaire, à cauſe que cette perpendiculaire eſt diviſée en deux également au point $c$ (20), $fc$ ſera $= cg$; donc la proportion du Théorême deviendra $ac : fc :: cg$ ou $fc : cb$. C'eſt-à-dire qu'une perpendiculaire quelconque $fc$ ſur un diametre eſt moyenne proportionelle entre les deux parties de ce diametre.

COROLLAIRE II. Suppoſant le diametre $ab = a$, la perpendiculaire $fc = y$, la partie $ac$ du diametre compriſe entre l'extrémité $a$ & la rencontre de la perpendiculaire (on l'appelle *abſciſſe*) $= x$,

l'autre partie $cb$ du diametre ſera $a - x$, & la proportion du Corollaire précédent deviendra $x : y :: y : a - x$, ou (faiſant le produit des extrêmes égal à celui des moyens) $y^2 = ax - x^2$ *.

COROLLAIRE III. Le triangle $afb$ étant rectangle en $f$ (parce que l'angle $f$ eſt appuyé ſur un diametre), il s'enſuit que dans un triangle rectangle la perpendiculaire abaiſſée ſur l'hypothénuſe eſt moyenne proportionelle entre les deux parties de l'hypothénuſe déterminées par cette perpendiculaire.

54. PROBLÊME. *Trouver une moyenne géométrique entre deux lignes données* x & n. Joignez ces deux lignes, enſorte qu'elles ne faſſent qu'une ſeule & même ligne. Diviſez leur ſomme $ab$ en deux également au point $p$. De ce point comme centre & du rayon $pa$ moitié de $ab$ décrivez un cercle $bfag$, par le point d'union élevez ſur $ab$ la perpendiculaire $cf$ juſqu'à la rencontre de la circonférence en $f$, elle ſera moyenne proportionelle entre $x$ & $n$, par le premier Corollaire du Théorême précédent.

55. THÉOREME. *Si du ſommet* f *de l'angle droit d'un triangle rectangle quelconque on abaiſſe une perpendiculaire* fc *ſur l'hypothénuſe* ab, *ce triangle ſera diviſé en deux autres triangles* afc, bfc, *ſemblables au grand triangle & par conſéquent ſemblables*

* C'eſt ce qu'on appelle *l'équation du cercle*, & cette propriété convient à toutes les perpendiculaires $fc$; de ſorte qu'en donnant pluſieurs valeurs ſucceſſives à $x$ & prenant les racines des quantités $ax - x^2$ correſpondantes, on déterminera les $fc$ correſpondantes aux $x$, & faiſant paſſer une courbe par tous les points $f$, on aura un cercle d'autant plus exact que les $y$ ſeront plus exacts & plus près les uns des autres.

*entr'eux.* Car 1°. le triangle *afc* a un angle droit en *c*, & un angle *a* commun avec le grand triangle qui a auſſi un angle droit en *f*; donc le troiſiéme angle eſt égal de part & d'autre; donc ces deux triangles ſont équiangles & ſemblables. 2°. Le triangle *bfc* a un angle *b* commun avec le grand triangle, un angle droit en *c* comme le grand triangle en a un en *f*; donc ces deux triangles ſont équiangles; donc les deux petits triangles ſont ſemblables au grand triangle, & par conſéquent ſemblables entr'eux.

COROLLAIRE I. Il ſuit de-là que *ac* : *af* :: *af* : *ab*, parce que *ac*, *af* côtés du petit triangle *afc* ſont homologues aux côtés *af*, *ab* du grand triangle *afb*. De même *bc*, *fb* côtés du triangle *fcb* étant homologues aux côtés *bf*, *ba* du grand triangle, l'on a *bc* : *bf* :: *bf* : *ba*; c'eſt-à-dire, chaque côté du triangle rectangle *afb* eſt moyen proportionel entre l'hypothénuſe & le ſegment correſpondant *. Il eſt viſible auſſi que les deux triangles *acf*, *cfb* donnent *ac* : *cf* :: *cf* : *cb*, ou que la perpendiculaire *fc* eſt moyenne proportionelle entre les deux parties de l'hypothénuſe, ainſi que nous l'avons dit ci-deſſus.

COROLLAIRE II. Les côtés *af*, *fb* étant des cordes tirées du même point *f* aux extrémités du diametre *ab*, il ſuit du Corollaire précédent que ſi de l'extrémité *f* d'une corde *af* ou *fb* l'on abaiſſe une perpendiculaire ſur le diametre *ab* qui paſſe par l'autre extrémité de la même corde, cette corde ſera moyenne proportionelle entre le diametre & le ſegment correſpondant.

* Les parties d'une ligne s'appellent auſſi les *ſegmens* de cette ligne.

56. THÉOREME. *Deux sécantes extérieures* a b, a c *tirées d'un même point à la partie concave* b c *de la circonférence, sont réciproquement proportionelles à leurs parties extérieures au cercle* (fig. 49). Ayant tiré les lignes $b\,d$, $c\,f$, l'on a les triangles $a\,d\,b$, $a\,f\,c$ semblables, puisqu'ils ont un angle $a$ commun, & les angles $b$ & $c$ appuyés sur le même arc $f\,d$; & partant $a\,b : a\,c :: a\,d : a\,f$.

COROLLAIRE. Si l'arc $d\,c$ s'évanouit, le point $c$ tombera sur le point $d$, la sécante $a\,c$ deviendra tangente (fig. 50), & l'on aura toujours $a\,b : a\,c :: a\,c : a\,f$. Ainsi la tangente sera moyenne proportionelle entre la sécante entiere $a\,b$, & sa partie hors du cercle.

On dit qu'une ligne $a\,b$ est divisée *en moyenne & extrême raison* (fig. 51), lorsqu'elle est divisée en deux parties $a\,d$, $d\,b$ telles que la ligne entiere est à l'une de ces parties, comme celle-ci est à l'autre partie.

57. PROBLEME. *Diviser une ligne* a b *en moyenne & extrême raison.* Sur l'extrémité $b$ de cette ligne, élevez la perpendiculaire $o\,b = \frac{a\,b}{2}$, du point $o$ comme centre, avec le rayon $o\,b$, décrivez le cercle $c\,b\,f$, par le point $a$ & le centre $o$ du cercle, tirez la sécante $a\,c$, & prenant $a\,d = a\,f$, je dis que $a\,b : a\,d :: a\,d : d\,b$. Car $o\,b$ étant perpendiculaire sur $a\,b$, $a\,b$ sera tangente; donc (Corollaire précédent) $a\,c : a\,b :: a\,b : a\,f = a\,d$, & (*dividendo*) $a\,c - a\,b$, ou $a\,c - c\,f$ (à cause du diametre $c\,f = a\,b$), ou $f\,a = a\,d : a\,b :: a\,b - a\,f = a\,b - a\,d = d\,b : a\,f = a\,d$; donc $a\,d : a\,b :: b\,d : a\,d$, ou mettant les antécédens à la place des conséquens & réciproquement (ce qui ne peut détruire la proportion, puisque le produit des extrêmes reste égal à celui des moyens) $a\,b : a\,d :: a\,d : b\,d$.

58. PROBLEME. *Diviser une ligne donnée* a b (fig. 52) *en parties proportionelles aux parties d'une autre ligne* a c. Faites avec ces lignes un angle quelconque $c\,a\,b$. Ayant joint les

extrémités *b* & *c* par la ligne *cb*, par les points de diviſion de la ligne *ac*, menez des paralleles à la ligne *cb* juſqu'à la rencontre de la ligne *ab*. A cauſe des paralleles *dx*, *fp*, &c. la ligne *ab* aura toutes ſes parties proportionelles aux parties correſpondantes de *ac* (46).

59. PROBLEME. *Diviſer une ligne* ad *en parties égales* (fig. 53). Prenez une ligne indéfinie *bc* plus grande que *ad*, portez autant d'ouvertures égales de compas ſur cette ligne que vous voulez avoir de parties égales dans *ad*, diſpoſez enſuite *ad* parallelement à *bc*, par le point *b* & l'extrémité *c* de la derniere diviſion, tirez les lignes *ba*, *cd* qui ſe rencontreront en un point quelconque *x* au-deſſus de *ad* (nous ſuppoſons $bc > ad$); du point *x* aux points *m*, *n*, *p*, &c. des diviſions de la ligne *bc*, menez les lignes *xp*, &c. ces lignes diviſeront *ad* en parties égales aux points *o*, *i*, *s*, &c. En effet à cauſe des paralleles *ao* & *pb*, *oi* & *pm*, les triangles *xao*, *xbp* ſont ſemblables entr'eux, auſſi-bien que les triangles *xio*, *xpm*; donc $bp : ao :: xp : xo$. De même les deux derniers triangles dont nous venons de parler donnent $pm : oi :: px : xo$; donc $bp : pm :: ao : oi$; donc $ao = oi$. On démontrera de même que $oi = is$ en ſe ſervant des triangles *xpm*, *aio* & des triangles *xmn*, *xis*; & quel que ſoit le nombre des parties égales de *bc*, en procédant de cette maniere l'on démontrera que les parties correſpondantes de *ad* ſont toutes égales entr'elles.

60. PROBLEME. *Trouver une quatriéme proportionelle à trois lignes données* a, b, c (fig. 54). Avec les lignes indéfinies *pr*, *ps* je fais un angle quelconque *p*. Je porte la ligne *a* ſur *pr* de *p* en *x*, & *b* ſur *ps* de *p* en *g*, je tire *xg*. Portant enſuite *c* de *x* en *o*, & tirant *oq* parallele à *xg*; il eſt évi-

dent (à cauſe des paralleles $xg$, $oq$) que $px : xo :: pg : gq$, ou que $a : c :: b : gq$; donc $gq$ eſt la ligne cherchée. Si $b = c$, $gq$ ſera troiſiéme proportionelle aux lignes $a$ & $b$.

61. DÉFINITION. Deux Polygones ſont appellés *ſemblables* lorſqu'ils ont un même nombre d'angles, & les côtés qui comprennent ces angles proportionels.

62. THÉOREME. *Deux Polygones ſemblables peuvent être diviſés par des diagonales qui partent des angles homologues en un même nombre de triangles ſemblables* (fig. 55). Du point $a$ du pentagone $abcdf$ tirez les diagonales $ac$, $ad$, & du point $g$ correſpondant du pentagone ſemblable $ghilm$ tirez les diagonales $gi$, $gl$; je dis que les triangles $afd$, $adc$, $acb$ ſont ſemblables aux triangles $gml$, $gli$, $gih$. Puiſque les Polygones ſont ſemblables, les angles correſpondans $f$ & $m$ ſont égaux, & les côtés qui comprennent ces angles proportionels (61); donc (50) les triangles $afd$, $gml$ ſont ſemblables; donc $fd : ml :: ad : gl$; or $fd : ml :: dc : li$ (par la propriété des Polygones ſemblables); donc $ad : gl :: dc : li$, ou (*alternando*) $ad : dc :: gl : li$; mais l'angle $d = l$ & l'angle $adf = glm$; donc $gli = adc$; donc les triangles $adc$, $gli$ ont un angle égal, & les côtés autour de cet angle proportionels; donc ils ſont ſemblables. On démontrera la même choſe pour les triangles $acb$, $ghi$; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc les périmetres ou contours des figures ſemblables $p$ & $x$, ſont entr'eux comme deux côtés homologues (c'eſt-à-dire ſemblablement ſitués dans les figures) quelconques $af$, $gm$, ou comme deux diagonales homologues $ad$, $gl$ ſem-

blablement tirées dans les figures. Car à cauſe de la ſimilitude des figures $p$ & $x$, $af : gm :: fd : ml :: dc : li :: bc : ih :: ba : hg$; donc la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens, c'eſt-à-dire, le périmetre de $p$ eſt au périmetre de $x$ comme $af : gm$, ou comme $ad : gl$, à cauſe des triangles ſemblables $afd$, $gml$.

COROLLAIRE II. Donc les périmetres de deux Polygones réguliers d'un même nombre de côtés ſont entr'eux comme un des côtés du premier Polygone à un des côtés du ſecond. Car les Polygones réguliers d'un même nombre de côtés ſont des Polygones ſemblables.

63. THÉOREME. *Deux Polygones réguliers ſemblables, c'eſt-à-dire, d'un même nombre de côtés, ont leurs périmetres proportionels à leurs rayons droits & obliques* (fig. 56). Car les rayons obliques $oa$, $rs$ partagent les angles égaux $a$ & $r$ en parties égales; mais à cauſe des angles droits $x$ & $p$ les triangles $rxs$, $aop$ ont deux angles égaux $p$ & $x$, $pao$ & $srx$; donc le troiſiéme angle eſt égal de part & d'autre, & les deux triangles ſont ſemblables; ainſi $rs : oa :: sx : op :: rx : pa$; mais $xr$ eſt la moitié de $rn$ & $pa$ la moitié de $ag$ (parce que la perpendiculaire abaiſſée du centre ſur une corde d'un cercle diviſe cette corde en parties égales), & les moitiés ſont comme les tous; donc les rayons droits & obliques ſont comme les côtés qui (62) ſont entre eux comme les périmetres; donc les périmetres ſont entr'eux comme les rayons droits & comme les rayons obliques; & en général comme les lignes ſemblablement tirées, qui néceſſairement ſont entr'elles comme les côtés & les rayons droits ou obliques.

COROLLAIRE. Donc les circonférences des cercles

cercles ſont entr'elles comme leurs rayons, & par conſéquent comme leurs diametres, comme les arcs *ſemblables*, c'eſt-à-dire, d'un même nombre de degrés, comme les cordes de ces arcs, &c. : car les cercles peuvent être conſidérés comme des polygones réguliers d'un même nombre de côtés infiniment petits; donc, &c.

64. THÉOREME. *De tous les Polygones réguliers inſcrits au cercle, celui-là eſt le plus grand qui a plus de côtés, au contraire de tous les Polygones circonſcrits, celui qui a le moins de côtés eſt le plus grand.* Car dans la fig. 39 le pentagone inſcrit differe plus de ſon cercle que l'exagone inſcrit (fig. 38) ne differe du ſien; mais il eſt viſible auſſi qu'en circonſcrivant un quarré & un octogone à un cercle (fig. 57), le quarré différera plus du cercle que l'octogone & ſera plus grand que l'octogone; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc ſi un Polygone régulier inſcrit ou circonſcrit avoit un très-grand nombre de côtés, il ne différeroit pas ſenſiblement du cercle, & l'on pourroit prendre l'un pour l'autre ſans erreur ſenſible.

*De la meſure & du rapport des Surfaces.*

65. La *ſurface plane* eſt celle qui n'a ni enfoncement ni élevation, & ſur laquelle par conſéquent une ligne droite peut s'appliquer exactement. La *ſurface courbe* au contraire eſt telle qu'on ne peut lui appliquer exactement une ligne droite : telle eſt la ſurface d'une boule.

DÉFINITION. Un quadrilatere *abcd* qui a ſeulement deux côtés *ab*, *cd* paralleles (fig. 58) eſt appellé *trapeze*. S'il n'a aucun côté parallele (fig. 59) on l'appelle *trapézoïde*. S'il a ſes côtés paralleles

deux à deux, on le nomme *parallélogramme* (fig. 60). Si les côtés du parallélogramme ſont égaux & que les angles ne ſoient pas droits, il prend le nom de *rhombe*, & celui de *rhomboïde* lorſque les côtés oppoſés ſeulement ſont égaux. Si les angles du parallélogramme ſont droits (fig. 61), on l'appelle *rectangle*; mais ſi les angles étant droits les côtés ſont égaux, il ſe nomme *quarré* (fig. 62). Une ligne *b c* (fig. 58, 60, 62) menée d'un angle d'un quadrilatere à l'angle oppoſé s'appelle *diagonale*. Une ligne *c d* (fig. 58) ſur laquelle on conçoit qu'eſt poſée la figure *c a b d*, ou le triangle *c b d*, eſt appellée *baſe* de cette figure, ou du triangle *c b d*. Une ligne *a p* tirée du ſommet d'un angle *a* perpendiculairement ſur la baſe *c d* (fig. 63), prolongée, s'il le faut, eſt appellée *hauteur* du triangle *a c d*. Si on mene la perpendiculaire *p m* entre les côtés paralleles d'un trapeze (fig. 58), ou d'un parallélogramme (fig. 60), cette perpendiculaire ſera la hauteur du trapeze ou du parallélogramme.

66. PROBLEME. *Décrire un parallélogramme dont un des côtés ſoit égal à la ligne donnée* a (fig. 64), *l'autre côté égal à la ligne* b, *& l'angle compris entre ces côtés* = g. Tirez $c d = a$, faites enſuite l'angle $a c d = g$ (26). Prenez $a c = b$, tirez *a b* parallele & égal à *c d*, tirant enſuite *b d*, vous aurez le parallélogramme cherché. Si l'angle *g* étoit droit, le parallélogramme ſeroit un rectangle, & un quarré ſi les côtés étoient de plus ſuppoſés égaux.

67. REMARQUE. Nous avons démontré (45) que les paralleles entre paralleles étoient égales; donc les côtés oppoſés d'un parallélogramme ſont toujours égaux entr'eux.

68. THÉOREME. *Une diagonale* b c *partage un*

*parallélogramme quelconque* a b d c *en deux triangles égaux*. En effet $a\,b = c\,d$ & $b\,d = a\,c$ (remarque précédente); & la ligne $b\,c$ étant commune aux deux triangles $a\,b\,c$, $c\,d\,b$, ces triangles ont leurs côtés égaux chacun à chacun; donc (35) ils sont égaux en tout.

COROLLAIRE. Donc un triangle eſt la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur *.

69. THÉOREME. *Un parallélogramme & un rectangle de même baſe & de même hauteur ſont égaux en ſurface.* Des extrémités $a$, $b$ du côté oppoſé à la baſe ayant abaiſſé les perpendiculaires $a\,p$, $b\,p$ ſur cette baſe prolongée s'il le faut; les triangles $a\,c\,p$, $b\,d\,p$ auront les angles correſpondans $c$ & $d$ égaux, & les angles droits en $p$; donc ils ſont ſemblables & ont de plus les angles égaux ſur les côtés égaux $a\,c$, $b\,d$; donc ils ſont égaux en tout, & $d\,p = c\,p$; donc $p\,p = a\,b = c\,d$; donc le parallélogramme $a\,c\,d\,b$ & le rectangle $a\,p\,p\,b$ ont même baſe & même hauteur (puiſqu'ils ſont compris entre les mêmes paralleles). De plus pour avoir le rectangle il ſuffit d'ajouter au parallélogramme le triangle $b\,d\,p$ & d'en retrancher en même tems le triangle $a\,c\,p = b\,d\,p$; donc ces deux figures ſont égales; donc, &c.

70. THÉOREME. *La ſurface d'un rectangle eſt égale au produit de la baſe par ſa hauteur* (fig. 65). Suppoſant la baſe $c\,d$ de 6 pieds, la hauteur $a\,c$ de 4; diviſez $c\,d$ en 6 parties égales & $c\,a$ en 4. Par les points de diviſion de $c\,d$ menez des pa-

* Le triangle $c\,b\,d$ a pour hauteur la perpendiculaire $b\,p$ auſſi-bien que le parallélogramme $a\,b\,c\,d$.

ralleles au côté *a c*, & par les points de diviſion de *a c* des paralleles à *c d*, vous aurez quatre tranches, dont chacune contiendra 6 quarrés égaux, chacun au quarré *p o c o* (*p o c o* eſt évidemment un pied quarré) ; donc le rectangle vaut 4 fois 6 pieds quarrés ou 24 pieds quarrés, produit * de la baſe 6 par la hauteur 4 ; donc, &c.

REMARQUE. Si l'on conçoit que la baſe *c d* (fig. 66) monte parallelement à elle-même le long de *a c* & qu'elle laiſſe par-tout des traces d'une largeur très-petite, il eſt évident qu'il y aura autant de traces égales que la hauteur peut contenir de fois la largeur d'une de ces traces, & que la ſomme de ces traces eſt égale à ſa ſurface du rectangle ; donc il faudra multiplier une de ces traces par le nombre qui exprime combien de fois ſa largeur eſt contenue dans la hauteur, & en ſuppoſant l'épaiſſeur de la trace infiniment petite, il faudra de même multiplier la trace ou ligne *c d* par la hauteur *a c* ; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc un parallélogramme eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur ; car (69) un parallélogramme & un rectangle de même baſe & de même hauteur ſont égaux.

COROLLAIRE II. Donc un triangle eſt égal au produit de ſa baſe par la moitié de ſa hauteur, ou au produit de ſa hauteur par la moitié de ſa baſe, ou à la moitié du produit de ſa baſe par ſa hauteur.

* On ne peut pas multiplier une ligne *c d* par une ligne *c a* ; mais on prend le nombre des quarrés qu'on peut former ſur *c d* (en prenant *p c* pour hauteur), autant de fois que la ligne *p c* eſt contenue dans *a c*. C'eſt ce qu'on doit entendre quand on dit qu'on multiplie la baſe par la hauteur.

Car un triangle eſt la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur (68).

COROLLAIRE III. Donc un triangle eſt égal à un parallélogramme de même baſe, mais d'une hauteur deux fois moindre.

71. THÉOREME. *La ſurface d'un trapeze* abcd (fig. 58) *eſt égale au produit de ſa hauteur* mp *par la moitié de la ſomme des deux baſes oppoſées & paralleles* ab, cd. Car la diagonale *bc* partage le trapeze en deux triangles de même hauteur que le trapeze (puiſqu'ils ſont compris entre mêmes paralleles) & dont la baſe de l'un eſt *ab* & celle de l'autre *cd*; donc la ſurface de l'un eſt $mp \times \frac{ab}{2}$, celle de l'autre étant $= mp \times \frac{cd}{2}$; donc la ſurface du trapeze eſt $= mp \times \frac{(ab+cd)}{2}$; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc la ſurface d'un trapeze eſt égale au produit de ſa hauteur *mp* multipliée par une ligne *xg*, menée par le milieu *x* du côté *ac* parallelement à la baſe *cd*. En effet les triangles *abc*, *xnc* (ſemblables à cauſe des paralleles *ab*, *xn*) donnent $ab : xn :: ac : cx :: 2 : 1$. De même les triangles ſemblables *bcd*, *bng* donnent $bd : bg :: cd : ng :: 2 : 1$ (puiſque les lignes *ac*, *bd* compriſes entre les paralleles *ab*, *cd* & coupées par une parallele *xg* doivent être coupées proportionnellement, & la premiere étant coupée en deux également, la ſeconde doit l'être de même); donc $xn = \frac{ab}{2}$, & $ng = \frac{cd}{2}$; donc $xg = \frac{ab+cd}{2}$; donc $mp \times \frac{(ab+cd)}{2} = mp \times xg$; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc (Calcul 61) $xg$ eſt moyenne proportionnelle arithmétique entre les baſes paralleles du trapeze.

COROLLAIRE III. Donc pour avoir la ſurface d'une figure curviligne $apxb$ (fig. 67), ayant tiré la ligne $x$A qu'on diviſera en parties égales & aſſez petites pour que les arcs compris entre les lignes $pp$ perpendiculaires à $x$A ſoient cenſés des lignes droites, ou du moins puiſſent être conſidérés comme des droites ſans une erreur conſidérable; il eſt viſible qu'il y aura autant de trapezes qu'il y a de points de diviſion, en y comprenant le triangle $pxp$ que nous conſidérons comme un trapeze, dont la baſe ſituée en $x$ eſt infiniment petite, ou $= 0$. Cela poſé, parce que tous ces trapezes ont une même hauteur $= xn$, il faudra multiplier la demi-ſomme de leurs baſes par la hauteur $nx$, le produit donnera la ſurface cherchée. Or il eſt viſible que chaque baſe $pp$ doit être priſe deux fois, parce qu'elle appartient à deux trapezes, tandis que la premiere baſe $ab$, ou la derniere (ſi elle exiſtoit) ne doivent être priſes qu'une fois; donc la moitié de toutes ces baſes ſe trouvera en ajoutant enſemble la moitié des deux extrêmes avec toutes celles du milieu. La ſomme multipliée par $nx$ donnera la ſurface cherchée. On peut voir par-là comment on pourroit meſurer la ſurface de flotaiſon d'un vaiſſeau.

72. THÉOREME. La ſurface d'un polygone régulier $abdfgh$ (fig. 38) eſt égale au produit de ſon périmetre par la moitié de ſon rayon droit $cq$. Car un tel polygone eſt compoſé d'autant de triangles égaux que ce polygone a de côtés, & chacun de ces triangles $ahc$ eſt égal au produit du côté $ah$ par la moitié de ſa hauteur $cq$; donc la ſurface entiere

du polygone eſt égale au produit de tous les côtés (ou, ce qui revient au même, au produit de ſon périmetre) par la moitié du rayon droit, ou au produit du rayon droit par la moitié du périmetre; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc la ſurface d'un cercle eſt égale au produit de ſa circonférence par la moitié du rayon, ou au produit du rayon par la moitié de la circonférence; car un cercle peut être regardé comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, dans lequel le rayon oblique ne differe pas du rayon droit; donc, &c.

COROLLAIRE II. Il ſuit du dernier Corollaire que la ſurface d'un ſecteur *a c d* eſt égale au produit de l'arc *a d* qui termine ce ſecteur par la moitié du rayon (fig. 68); car ce ſecteur peut être regardé comme une partie déterminée du cercle, *par exemple*, la ſixiéme; il faudra donc multiplier l'arc *a d* ou la ſixiéme partie de la circonférence par la moitié du rayon, & l'on aura la ſurface cherchée. Ou bien d'une autre maniere, conſidérant le ſecteur comme compoſé d'une infinité de triangles, tels que *a x c*, *x c b*, qui ont tous leur ſommet au centre & dont les baſes ſont des portions infiniment petites de la circonférence, l'on aura la ſurface de chacun de ces triangles en multipliant ſa baſe par la moitié du rayon ou de ſa hauteur; donc la ſurface totale eſt égale au produit de toutes les baſes, ou de l'arc *a d* par la moitié du rayon *a c*.

73. THÉOREME. *De tous les polygones réguliers iſopérimetres, c'eſt-à-dire, qui ont des périmetres égaux, celui qui a le plus de côtés eſt le plus grand.* Soit un pentagone régulier circonſcrit au cercle *m* (fig. 69), & un exagone régulier du même périmetre circon-

ſcrit au cercle *a*. Il eſt viſible (64) que le cercle *a* eſt plus grand que le cercle *m*; ainſi le rayon $ap > mp$: or en inſcrivant ces figures dans des cercles, *ap* & *mp* ſeroient les rayons droits de ces polygones. Mais (Théoreme précédent) pour avoir les ſurfaces de ces polygones, il faut multiplier les périmetres qui ſont ici égaux, par *ap* & par *mp*; donc le premier produit, c'eſt-à-dire la ſurface de l'exagone, ſera plus grande que le ſecond produit; ou la ſurface du pentagone; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc de tous les polygones réguliers iſopérimetres le cercle eſt le plus grand, car on peut regarder le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.

74. THEOREME. *Un cercle* a d m (fig. 68) *eſt égal à un triangle rectangle* c m n, *dont la baſe* m n *eſt égale à la circonférence du cercle, & la hauteur* c m *égale au rayon du cercle.* Car (72) la ſurface du cercle eſt égale au produit de ſa circonférence *mn* par la moitié de ſon rayon *cm*; or la ſurface du triangle rectangle *cmn* eſt égale au même produit (70); donc, &c.

COROLLAIRE. Donc la couronne circulaire *mdapu*, compriſe entre deux circonférences concentriques, eſt égale au produit de la demi-ſomme de ces circonférences par la diſtance *um* de ces circonférences. Car tirant *uq* parallele à *mn*, les triangles ſemblables *cuq*, *cmn* donneront $cu : cm :: uq : mn$; or les circonférences de ces cercles ſont entr'elles comme leurs rayons *cu* & *cm* (63), & par conſéquent comme *uq* & *mn*; donc la grande eſt à la petite comme $mn : uq$; or la grande eſt égale à *mn* (par ſuppoſition), donc la petite eſt égale à *uq*; donc le petit cercle eſt égal à

$uq \times \frac{uc}{2}$, & le grand eſt égal à $mn \times \frac{cm}{2}$, c'eſt-à-dire que le petit cercle eſt égal au petit triangle $cuq$, & le grand eſt égal au triangle $cmn$; donc la couronne circulaire eſt égale au trapeze $uqmn = \frac{(uq+mn)}{2} \times \frac{um}{2}$ (71); donc, &c.

75. THEOREME. *Deux parallélogrammes dont l'un ſoit appellé* p *& l'autre* q, *ſont entr'eux comme les produits de leur baſe par leur hauteur. Car ſoit* h *la hauteur*, b *la baſe du premier*, f *la hauteur*, g *la baſe du ſecond.* La ſurface du premier ſera (70) $p = hb$, celle du ſecond ſera $q = fg$; donc $p:q :: hb:fg$; or la raiſon de $hb:fg$ eſt le produit des raiſons $h:f$ & $b:g$; donc la raiſon de $p:q$ eſt compoſée des raiſons de la hauteur à la hauteur & de la baſe à la baſe; & partant les parallélogrammes ſont entr'eux en raiſon compoſée des baſes & des hauteurs, ou comme les produits des baſes par les hauteurs.

COROLLAIRE I. Donc les triangles ſont en raiſon compoſée des baſes & des hauteurs; car les triangles ſont les moitiés des parallélogrammes de même baſe & de même hauteur; mais les moitiés ſont comme les tous; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc les parallélogrammes qui ont même baſe ſont comme leurs hauteurs, & s'ils ont même hauteur ils ſont comme leurs baſes; il en eſt de même des triangles.

COROLLAIRE III. Donc deux parallélogrammes ſeront égaux ſi leurs hauteurs ſont en raiſon inverſe de leurs baſes. Car ſi $h:f :: g:b$, on aura $hb = fg$, ou $p = q$ : ce qui a lieu auſſi pour les triangles.

COROLLAIRE IV. Si les parallélogrammes ſont ſemblables, ils ſont entr'eux comme les quarrés

de leurs baſes, ou de leurs hauteurs, ou même comme les quarrés de leurs côtés homologues. Car dans les parallélogrammes ſemblables $abdc$, $fhig$ (fig. 70) les deux triangles $acp$, $fhp$ ſont ſemblables (à cauſe des angles homologues égaux $c$ & $h$, & des angles droits $p$ & $p$); donc $ac : fh :: ap : fp$; or $ac : fh :: cd : hi$ (puiſque les parallélogrammes ſont ſuppoſés ſemblables; donc $cd : hi :: ap : fp$. C'eſt-à-dire que la raiſon des baſes eſt égale à celle des hauteurs; donc la raiſon qui en eſt compoſée eſt doublée, & par conſéquent égale à la raiſon des quarrés des termes d'une des raiſons compoſantes, ou égale à la raiſon des quarrés des baſes, ou des quarrés des hauteurs, ou des quarrés des côtés $ac$ & $fh$ qui ſont entr'eux comme les hauteurs $ap$ & $fp$; donc $p : q : b^2 : g^2 :: h^2 : f^2 :: (ac)^2 : (fh)^2$.

COROLLAIRE V. Les ſurfaces des triangles ſemblables $cad$, $hfi$ (parce que ces triangles ont un angle $c$ & $h$ égal de part & d'autre, & les côtés qui comprennent cet angle proportionnels) ſont entr'elles comme les quarrés de leurs baſes $cd$ & $hi$, de leurs hauteurs $ap$ & $fp$, de leurs côtés homologues $ac$ & $fh$, & par conſéquent auſſi de leurs côtés $ad$, $fi$ qui ſont dans le même rapport que $ac$ & $fh$. Cela eſt évident, car ces triangles ſont moitié des parallélogrammes ſemblables; donc, &c.

COROLLAIRE VI. La ſurface d'un parallélogramme dont la hauteur eſt $h$ & la baſe $b$ eſt égale à la ſurface d'un quarré, dont le côté $a$ eſt moyen proportionnel entre $h$ & $b$. Car ſi $h : a :: a : b$, l'on a $hb = a^2$; or $hb$ eſt la ſurface du parallélogramme & $aa = a^2$ celle du quarré; donc, &c.

76. THÉOREME. *Le quarré de l'hypothénuſe d'un*

*triangle rectangle* b a c *eſt égal à la ſomme des quarrés* o & m *faits ſur les côtés qui comprennent l'angle droit* a (fig. 71). Car la perpendiculaire *ap* abaiſſée de l'angle droit ſur l'hypothénuſe divife le triangle *abc* en deux triangles ſemblables entr'eux, & au grand triangle (55); donc ces triangles ſont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; & le grand triangle eſt à la ſomme des deux autres comme le quarré de l'hypothénuſe du grand triangle à la ſomme des quarrés des hypothénuſes des deux autres. Mais la ſurface du grand triangle eſt égale à la ſomme de ſurfaces des deux petits triangles; ainſi le quarré de l'hypothénuſe *bc* eſt égal à la ſomme des quarrés *o* & *m* faits ſur les deux côtés qui comprennent l'angle droit.

Remarque. On peut démontrer la même choſe de cette autre maniere. Selon ce que nous avons déja dit (55), chaque côté du triangle *abc* eſt moyen proportionnel entre l'hypothénuſe & le ſegment correſpondant fait par la perpendiculaire *ap*; donc $o = (ba)^2 = bc \times bp = bpnx$, & $m = (ac)^2 = bc \times pc = p \times qc$; donc $o + m = (bc)^2 = bcqn$.

Corollaire I. Donc le quarré de la diagonale *bc* d'un quarré *bacd* (fig. 62) eſt double du quarré du côté $ac = ba$: car le triangle rectangle *bac* eſt iſocelle; donc le quarré de la diagonale eſt double du quarré de l'un des côtés égaux *ac*, ou *ba*; c'eſt-à-dire, que l'on a $(bc)^2 = 2 \cdot (ac)^2 = 2 \cdot (ab)^2$. Donc appellant *a* le côté, le quarré de la diagonale ſera $2a^2$ & celui du côté ſera $a^2$; donc le quarré de la diagonale ſera à celui du côté comme $2a^2 : a^2 :: 2 : 1$, & la diagonale ſera au côté comme $\sqrt{2} : 1$; mais $\sqrt{2}$ eſt incommenſurable avec l'unité ou tout autre nombre quelconque; donc le rapport de la diagonale au côté n'eſt pas de nombre à nombre.

Corollaire II. Soit *a* l'hypothénuſe, *b* l'un

des côtés, $c$ l'autre côté d'un triangle rectangle, l'on aura $a^2 = b^2 + c^2$; donc $b^2 = a^2 - c^2$, & $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$. De même $c^2 = a^2 - b^2$ & $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$; l'on a auſſi $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$; donc étant donnés les deux côtés pour avoir l'hypothénuſe, on prendra la racine de la ſomme de leurs quarrés; mais étant donné un côté & l'hypothénuſe l'on aura l'autre côté en retranchant le quarré du côté donné du quarré de l'hypothénuſe, & prenant la racine du reſte.

77. THÉOREME. *Les ſurfaces des polygones ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues ou même de leurs lignes homologues.* Car (fig. 55) les polygones ſemblables $abcdf$, $ghilm$ peuvent être diviſés en triangles ſemblables par les lignes homologues $ac$, $ad$ & $gi$, $gl$ (62). De même les polygones réguliers ſemblables (fig. 56) peuvent être diviſés en un même nombre de triangles ſemblables par leurs rayons obliques; or les aires ou ſurfaces de ces triangles ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; donc (fig. 55) l'aire du polygone $p$ eſt à l'aire du polygone $x$ comme la ſomme des aires qui compoſent la ſurface du premier à la ſomme des aires qui compoſent la ſurface du ſecond: mais (à cauſe que les polygones ſemblables ont leurs côtés & par conſéquent les quarrés de ces côtés, auſſi-bien que les triangles faits ſur ces côtés, proportionnels) on peut conſidérer les aires qui compoſent la ſurface $p$ comme la ſomme des antécédens, & les aires qui compoſent la ſurface $x$ comme la ſomme des conſéquens d'une ſuite de raiſons égales; donc $p : x$ comme l'aire du triangle $afd$ eſt à l'aire du triangle ſemblable $gml :: (af)^2 : (gm)^2 :: (ad)^2 : (gl)^2$.

COROLLAIRE I. Donc (fig. 56) les polygones réguliers ſemblables ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues *a g*, *h r*, ou comme les quarrés de leurs périmetres, qui ſont entr'eux comme les côtés de ces polygones, leſquels côtés ſont entr'eux (63) comme les rayons droits ou obliques; donc les ſurfaces des polygones réguliers ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés des côtés, des périmetres, des rayons droits, & des rayons obliques.

COROLLAIRE II. Donc les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs lignes homologues, des circonférences, des cordes des arcs ſemblables, des arcs ſemblables, des rayons & des diametres; de ſorte que le rayon d'un cercle étant ſuppoſé double de celui d'un autre cercle, le premier ſera au ſecond comme 4:1.

COROLLAIRE III. Donc les demi-cercles faits ſur l'hypothénuſe & les côtés d'un triangle rectangle *a b c* (fig. 72) ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres; mais le quarré du diametre du demi-cercle *b a c*, c'eſt-à-dire, le quarré de l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés des deux autres diametres, ou des deux côtés *a b*, *a c*; donc le grand demi-cercle eſt égal à la ſomme des deux autres. Et ſi le triangle *b a c* (fig. 73) eſt iſocelle, le demi-cercle *b a c* ſera le double du demi-cercle *b o a*, ou *a o c*. C'eſt pourquoi ſi du quart de cercle *p b x a*, & du demi-cercle *b a o*, on retranche le ſegment commun *a x b a*, l'on aura le triangle *b a p* égal à la lunule *b o a x b* *; or nous dirons bientôt com-

* On appelle les lunules *a o b x a*, *a o c x a lunules d'Hypocrate*, parce que ce Géometre en a trouvé le premier la quadrature.

ment on peut quarrer un triangle ; donc on peut quarrer cette lunule.

COROLLAIRE IV. Pour faire un demi-cercle $bma$ (fig. 72) qui ſoit à un autre demi-cercle $anc$ dans un rapport donné de 2 : 1 ; *par exemple*, prenez $bp$ de 2 pieds, ou 2 pouces, &c., & $pc$ d'un pied, ou d'un pouce, &c. Sur $bc$, comme diametre, décrivez un demi-cercle. Par le point $p$ tirez la perpendiculaire $pa$ juſqu'à la rencontre de la demi-circonférence, tirant enſuite les cordes $ba$, $ac$, le triangle $bac$ ſera rectangle en $a$ (parce que l'angle $a$ eſt appuyé ſur un diametre), & chacun des côtés $ba$ ($b$), $ac$ ($c$) ſera moyen proportionnel entre l'hypothénuſe ($a$) & le ſegment correſpondant ; de ſorte qu'en faiſant $bp = x$, $pc = p$, l'on aura $b^2 = ax$, $c^2 = ap$ ; donc $b^2 : c^2 :: ax : ap :: x : p$. Mais les demi-cercles faits ſur les côtés $b$ & $c$ ſont comme les quarrés $b^2$ & $c^2$ de leurs diametres ; donc ces demi-cercles ſont entr'eux comme les ſegmens $x$ & $p$ ; donc, &c.

78. PROBLEME. *Etant donnée une figure* p, *en conſtruire une ſemblable* x ; *de ſorte que* p *ſoit à* x *dans un rapport donné de* 1 *à* 2, *par exemple* (fig. 74). Ayant pris une ligne $bc$ (fig. 72) à diſcrétion, coupez cette ligne en deux parties $bp$, $pc$, de maniere que $pb$ ſoit à $pc$ dans le rapport donné de $x$ à $p$, ayant enſuite mené les lignes $ba$, $ac$. Prenez ſur $ac$ (prolongée s'il le faut) $ad = af$, tirez $dx$ parallelement à $bc$, $ax$ ſera le côté homologue $gm$. Pour trouver les autres côtés de $x$, faites $ab : af :: ax = gm : z$, $z$ ſera $= gh$ côté homologue à $ba$. Ou bien cherchez une quatriéme proportionnelle aux lignes $af$, $ab$, $gm$, cette quatriéme proportionnelle ſera $= gh$. Pour avoir $ml$, faites $af$ :

$fd :: gm : ml$, & ainſi des autres. Faites enſuite les angles $g$, $m$, $l$, &c. égaux aux angles correſpondans $a$, $f$, $d$, &c. Diſpoſez les côtés trouvés autour de ces angles, & le Problême ſera réſolu. Car vous aurez $x : p :: (gm)^2 : (af)^2$. Mais $gm$ (de la fig. 74) eſt $= ax$ (fig. 72), & $af$ (fig. 74) eſt $= ad$ (fig. 72); donc $x : p :: (ax)^2 : (ad)^2 :: (ab)^2 : (ac)^2$ (à cauſe des paralleles $bc$, $xd$ qui rendent les triangles $bac$, $adx$ ſemblables) $:: bp : pc$ (77), ou ici comme 2 : 1. Si le polygone $p$ étoit régulier, tous ſes côtés & ceux du polygone $x$ ſeroient égaux entr'eux.

79. PROBLEME. *Etant donnée la hauteur* h *& la baſe* b *d'un parallélogramme* a b d c (fig. 70), *trouver un quarré qui lui ſoit égal en ſurface.* Soit le côté de ce quarré $= x$. En faiſant $h : x :: x : b$, l'on aura $x^2 = hb$, & $x = \sqrt{(hb)}$; c'eſt-à-dire, que le côté du quarré cherché eſt moyen proportionnel entre la baſe & la hauteur du parallélogramme. Or l'on ſait trouver (54) une moyenne proportionnelle entre deux lignes; donc, &c.

COROLLAIRE I. Si le parallélogramme eſt rectangle, ſa hauteur ne differe pas de ſon côté perpendiculaire à la baſe; & il n'y a rien à changer à la méthode.

COROLLAIRE II. Pour quarrer un triangle $cad$, il ſuffit de prendre une moyenne proportionnelle entre la baſe & la moitié de la hauteur, ou entre la hauteur $ap$ & la moitié de la baſe $cd$. Car le quarré de cette ligne ſera égal à la ſurface du triangle.

COROLLAIRE III. Pour quarrer un polygone régulier il ſuffit de prendre une moyenne géométrique entre ſon périmetre & la moitié de ſon rayon droit, ou entre ſon rayon droit & la moitié de ſon périmetre. Car un polygone régulier eſt égal

au produit de ſon périmetre par la moitié de ſon rayon droit (72) ; il eſt donc égal à un rectangle, dont la baſe ſeroit égale au périmetre & la hauteur égale à la moitié du rayon droit ; donc, &c.

COROLLAIRE IV. Donc la ſurface d'un cercle *a d m* (fig. 68) eſt égale à un quarré, dont le côté ſeroit moyen proportionnel-géométrique entre la circonférence & la moitié du rayon. En effet ce cercle eſt égal au triangle rectangle *c m n*, dont la baſe *m n* égale à la circonférence, & la hauteur *c m* égale au rayon du cercle ; donc (Corollaire II) la ſurface de ce cercle eſt égale au quarré dont le côté eſt moyen géométrique entre *m n* & $\frac{cm}{2}$ ; donc, &c.

REMARQUE. On pourroit donc quarrer le cercle géométriquement ſi étant donnée la circonférence on pouvoit trouver géométriquement le diametre, & par conſéquent le demi-diametre ou le rayon ; mais on n'a pu juſqu'ici trouver en nombres le rapport du diametre à la circonférence. Le rapport approché du diametre à la circonférence, donné par *Archimede*, eſt celui de 7 : 22. Celui de *Métius* eſt de 113 : 355. Un autre Géometre le donne de 100 : 314. Si l'on fait le diametre = 1, la circonférence ſera = 3 · 14159 à-peu-près, de ſorte que ce rapport eſt 1 : 3 · 14159 : mais ces rapports ne ſont qu'approchés. Si l'on veut ſavoir quel doit être à-peu-près le côté d'un quarré égal à un cercle de 14 pieds de diametre, on peut faire 7 : 22 :: 14 : $x = \frac{22 \times 14}{7} = 44$, circonférence du cercle donné. Multipliant la circonférence 44 par $\frac{7}{2}$, moitié du rayon, le produit 154 pieds quarrés ſera la ſurface du cercle, & prenant une moyenne géométrique entre la circonférence & la moitié du rayon, on

on aura le côté du quarré cherché, ou bien en nombres prenant la racine de 154, en s'en tenant aux dixiémes vous aurez le côté du quarré égal à 12·4, c'eſt-à-dire que le côté cherché eſt de 12 pieds & quatre dixiémes de pied à-peu-près. En ſe ſervant d'un rapport plus exact, de celui de *Métius*, *par exemple*, on trouvera dans les différens cas des circonférences fort approchées. Si étant donnée la circonférence on demandoit le diametre, on le trouveroit avec la même facilité par une ſimple regle de trois. Si, *par exemple*, on demande le diametre d'un cercle dont la circonférence ſeroit de *66* pieds, l'on fera $22:7::66:x=21$ à-peu-près; c'eſt-à-dire, que le diametre cherché eſt à-peu-près de 21 pieds.

80. PROBLEME. *Réduire un polygone quelconque* f a b c d (fig. 75) *en un polygone de même ſurface, & qui ait un côté de moins.* Tirez la diagonale *f c*, & par le point *d* menez-lui la parallele *d p* juſqu'à la rencontre de *a f* prolongée s'il le faut, par le point *c* & le point *p* tirez la ligne *p c*, la figure *a b c p* aura évidemment un côté de moins que la figure propoſée, & de plus lui ſera égale en ſurface : car par cette opération vous retranchez le triangle *f d c*, mais auſſi vous ajoutez le triangle *f c p* : or ces deux triangles ſont égaux en ſurface, ayant même baſe *f c* & même hauteur, puiſqu'ils ont leur ſommet ſur une même ligne *d p* parallele à leur baſe. En opérant de même on réduira *a b c p a* en une figure de trois côtés, c'eſt-à-dire, en triangle.

COROLLAIRE I. Donc on peut réduire un polygone rectiligne en un triangle de même ſurface.

COROLLAIRE II. Donc on peut quarrer tout

polygone rectiligne, puiſque (79) nous ſavons quarrer un triangle.

REMARQUE. On peut avoir la ſurface d'un polygone quelconque, en réduiſant ce polygone en triangles par le moyen des diagonales que l'on tirera dans ce polygone; cherchant enſuite les ſurfaces de chacun de ces triangles, la ſomme de ces ſurfaces donnera la ſurface du polygone. Pour avoir la ſurface d'un triangle, dont on connoît la baſe, il ſuffit de chercher ſa hauteur pour la multiplier par la moitié de la baſe; or la hauteur ſe trouve en abaiſſant une perpendiculaire du ſommet d'un angle ſur la baſe oppoſée, laquelle baſe doit être priſe pour la baſe du triangle.

## DES PLANS.

81. *Le Plan* eſt une ſurface unie, qui n'a ni enfoncement ni élévation. Nous conſidérerons les Plans comme ayant une étendue infinie.

Un Plan eſt dit *perpendiculaire* ſur un autre Plan, lorſqu'il le rencontre ſans pencher d'un côté ni de l'autre. De même une ligne eſt dite *perpendiculaire* ſur un Plan, lorſqu'elle rencontre ce Plan ſans pencher d'aucun côté.

82. THÉOREME. 1°. *Si une ligne* a c b * *rencontre un Plan* d m g (fig. 76), *la rencontre ſera un point* c. 2°. *Une ligne* d c *ne peut avoir deux points communs avec un Plan, ſans être toute entiere ſur ce Plan, autrement elle ne ſeroit pas droite.* 3°. *La poſition d'un Plan* d c m *eſt déterminée par trois points* d, c, m *qui ne ſont pas en ligne droite*; car il eſt viſible qu'alors le Plan auquel ces trois

* Il faut concevoir le point *a* au-deſſus du Plan de la figure.

points appartiennent ſera fixe. 4°. *Si un plan* p c d *rencontre un plan* g m c, *la ſection* c d *ſera une ligne droite :* puiſque cette ſection eſt commune à l'un & l'autre plan. 5°. *Si deux plans paralleles, c'eſt-à-dire qui ne s'approchent ni ne s'éloignent, tels que* a b & f g (fig. 77) *ſont coupés par un troiſiéme Plan* a b f g, *les ſections* a b, f g *ſeront évidemment dans le Plan coupant & paralleles entre elles ;* car autrement les Plans *a b, f g* ſe rencontreroient, ce qui ne peut être, puiſqu'ils ſont paralleles. 6°. *Si une ligne* a c (fig. 76) *eſt perpendiculaire ſur un Plan* d c m, *elle doit être perpendiculaire ſur toutes les lignes* c g, c d, *&c. tirées ſur ce plan par le point de rencontre ;* car autrement elle pencheroit d'un côté ou de l'autre. Donc les angles *a c g, a c d* doivent être droits. 7°. *On ne peut d'un point* a *hors d'un Plan, ou d'un point* c *dans un Plan mener deux perpendiculaires à ce Plan :* car il eſt viſible que les lignes *a g* & *c p* penchent plus d'un côté que de l'autre. 8°. *La commune ſection* a b (fig. 78) *des deux Plans* g m, p n *perpendiculaires ſur un troiſiéme plan* c d, *eſt perpendiculaire ſur ce troiſiéme Plan.* Si par le point *b* commun aux deux plans *g m, p n* on mene une perpendiculaire *a b* au plan *c d*, cette perpendiculaire doit ſe trouver dans les deux Plans, autrement elle pencheroit d'un côté ou de l'autre. Cette perpendiculaire eſt donc la ſection commune des deux plans.

83. THÉOREME. *L'inclinaiſon de deux Plans* b n, b q (fig. 79) * *doit s'eſtimer par l'angle* d x p,

* Il faut concevoir la ligne *x d* (qui appartient au ſecond Plan) comme ayant ſon extrémité *d* en l'air.

*formé par deux lignes* dx, px, *perpendiculaires sur la section* ab *de ces deux Plans, & menées l'une dans le plan* bn *& l'autre dans le Plan* bq. Car si l'on conçoit d'abord les deux Plans exactement appliqués l'un sur l'autre, & qu'ensuite ces Plans viennent à s'écarter, le point *d* en s'éloignant du point *p* décrira l'arc *p d* mesure de l'angle *p x d*, ou de l'angle que forment les deux Plans *b n*, *b q*.

REMARQUE. L'inclinaison d'une ligne *p c* sur un plan *m c d* (fig. 76) est égale à l'angle *p c d* formé par la ligne *p c* & la ligne *c d* menée du point *c* où *p c* rencontre le Plan, au point *d* où la perpendiculaire abaissée de l'extrémité *p* de cette ligne rencontre le même plan. Car si l'on conçoit *c p* couchée sur *c d*, en écartant ensuite la ligne *c p* de *c d*, le point *x* qui se trouvoit en *d* au commencement du mouvement décrira l'arc *d x*, mesure de l'angle *p c d*, qui est évidemment l'inclinaison de *c p* par rapport au plan.

84. THÉOREME. *La distance d'un point* p *à un Plan se mesure par la perpendiculaire* pd *abaissée de ce point sur le Plan.* Car *p d* est plus courte que *c p*, puisque *p d* est perpendiculaire sur la ligne *c d*, tandis que *c p* lui est oblique.

85. THÉOREME. 1°. *Si plusieurs Plans se coupent dans la même ligne, les angles qu'ils formeront autour de cette ligne vaudront précisément* 360°. 2°. *Si plusieurs Plans paralleles sont coupés par un Plan quelconque, les angles correspondans, les angles alternes-internes, alternes-externes seront égaux, & deux angles soit intérieurs, soit extérieurs du même côté du Plan coupant, l'un appartenant à l'un des Plans paralleles, & le second à un autre, vaudront deux angles droits.* 3°. *Si*

*un Plan en coupe un autre, les deux angles de ſuite que forment ces Plans vaudront deux angles droits. De même deux Plans ſeront paralleles, ſi étant coupés par un troiſiéme Plan, les angles correſpondans ſont égaux, ſi les angles alternes-internes ou alternes-externes ſont égaux, &c.* Tout cela ſuit évidemment de la nature des Plans, & de la meſure de l'angle de l'inclinaiſon des Plans qui ſe rencontrent.

86. THÉOREME. *Deux droites* d c, g c *qui ſe rencontrent en un point* c, *ſont toujours dans un même Plan.* Car la ſurface *g c d*, dans laquelle ſe trouvent ces droites eſt évidemment un Plan.

87. THÉOREME. *Deux droites* a c, p d *perpendiculaires ſur un Plan* g c d *ſont paralleles.* Car joignant par la ligne *c d* les points de rencontre de ces lignes avec le Plan, les lignes *a c*, *p d* ſeront perpendiculaires ſur la même ligne *c d* (82); donc ſelon ce que nous avons dit ci-deſſus (18), ces lignes ſont paralleles.

88. THÉOREME. *Si deux Plans ſont paralleles, une ligne perpendiculaire à l'un des deux ſera perpendiculaire à l'autre.* Car autrement ce ſecond Plan ſeroit incliné ſur une perpendiculaire au premier; donc il ſeroit auſſi incliné au premier; donc il ne lui ſeroit pas parallele, ce qui eſt contre la ſuppoſition; donc, &c.

DÉFINITION. On appelle *angle ſolide* un angle *c* (fig. 80) formé par le concours de pluſieurs angles plans, (un *angle plan* eſt la ſurface compriſe entre les côtés d'un angle rectiligne,) *a c b*, *a c d*, *d c b* *: tel eſt, *par exemple*,

* Il faut concevoir le point *c* élevé au-deſſus du plan de la baſe *a b d*.

un des coins d'un dé à jouer. Il eſt évident que deux angles plans *acb*, *acd* ne ſuffiſent pas pour former un eſpace, qu'il en faut au moins trois pour former un angle ſolide, & que deux quelconques de ces trois ſont plus grands que le troiſiéme. *Par exemple*, les deux angles *acb*, *acd* pris enſemble forment une ſurface anguleuſe *dcacb* plus grande que le troiſiéme angle plan *dcb*.

89. THÉOREME. *Tous les angles qui forment un angle ſolide valent toujours moins de* 360° (fig. 81). Car les angles *dcf*, *fcg*, &c. autour du point *c* valent ſeulement 360°; donc ſi l'on ſuppoſe qu'on éleve en l'air le point *c* juſqu'en *a*, *par exemple*, les côtés *dc*, *fc*, *cg*, &c. s'allongeront & deviendront *da*, *fa*, *ga*, &c. les baſes *df*, *fg*, &c. reſtant les mêmes; donc les angles *fcd*, *fcg*, &c. diminueront; donc les angles plans qui forment l'angle ſolide *a* vaudront moins de 360°.

## DES SOLIDES.

90. Le *Solide géométrique*, duquel ſeul il eſt ici queſtion, eſt une étendue qui a les trois dimenſions, longueur, largeur & profondeur *. On appelle *priſme* un Solide, dont la groſſeur eſt la même dans toute ſa longueur. On peut le concevoir formé par le mouvement d'un plan qu'on nomme *baſe du priſme*, qui monte parallelement à lui même le long du côté *dh* du priſme (fig. 82), & qui laiſſe partout des traces d'une épaiſſeur fort petite. Le priſme eſt appellé *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *exagonal*, &c. ſelon que le plan générateur eſt un triangle, un quadrilatere, un pentagone, &c. De cette génération du priſme, il ſuit que chaque côté du *polygone générateur* doit

* Le corps eſt un aſſemblage de parties matérielles qui ſe trouvent ſouvent dans l'eſpace que nous appellons *ſolide*. Cependant bien des gens donnent le nom de *ſolide* au corps, confondant mal-à-propos le *ſolide géométrique* avec le *ſolide phyſique*.

décrire un parallélogramme pendant le mouvement de ce polygone générateur. Si le polygone générateur eſt un cercle (fig. 83), le priſme eſt appellé *cylindre*. Si le plan générateur eſt un parallélogramme, le priſme prend le nom de *parallélipipede*. Si le plan générateur eſt un parallélogramme rectangle, on a un *parallélipipede rectangle*. Si le plan générateur eſt perpendiculaire dans ſon mouvement au côté, le priſme eſt *droit*; s'il lui eſt oblique, le priſme, le cylindre, le parallélipipede ſont dits *obliques*. Si le plan générateur eſt un quarré, & que dans ſon mouvement il ſoit perpendiculaire au côté *a d* (fig. 84), le ſolide ſera un *cube*, pourvu que le côté *a d* ſoit égal au côté *a b* du quarré générateur. Une ligne droite tirée du centre de la baſe ſupérieure au centre de la baſe inférieure d'un priſme ou d'un cylindre, s'appelle *l'axe* du priſme ou du cylindre : telle eſt la ligne *a a* (fig. 82 & 83). Si l'axe eſt perpendiculaire ſur les baſes ſupérieure & inférieure (qui ſont toujours paralleles), les priſmes & cylindres ſont appellés *droits*; mais ſi l'axe eſt oblique ſur les baſes, le priſme eſt dit *oblique*, & ſa hauteur doit s'eſtimer par une perpendiculaire menée entre les deux baſes paralleles, en en prolongeant une s'il le faut.

Une *pyramide* eſt un ſolide dont la baſe eſt un polygone, & qui eſt terminée par des ſurfaces triangulaires qui forment un angle ſolide, qu'on appelle *le ſommet de la pyramide* (fig. 85). Si l'on fait mouvoir une ligne *a d* de maniere que ſon extrémité *a* reſtant fixe, l'extrémité *d* parcoure le contour du polygone *b d f g h*, cette ligne engendrera dans ce mouvement la ſurface latérale du ſolide, qu'on appelle *pyramide*. Si le plan de la

baſe eſt un triangle, un quadrilatere, un pentagone, &c. la pyramide eſt appellée *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, &c. Si le plan de la baſe eſt un cercle (fig. 86) la pyramide prend le nom de *cône*, de ſorte qu'un cône n'eſt autre choſe qu'un ſolide, dont la baſe eſt un cercle & qui finit en pointe. Une ligne tirée du ſommet du cône ou de la pyramide au centre de la baſe, s'appelle *l'axe* du cône ou de la pyramide. Si l'axe eſt perpendiculaire à la baſe, la pyramide eſt *droite*, de même dans ce cas le cône eſt *droit*. Une ligne *a m* (fig. 85) abaiſſée du ſommet du cône ou de la pyramide perpendiculairement ſur le plan de la baſe prolongée s'il le faut, meſure la hauteur de la pyramide ou du cône. L'apothême d'une pyramide droite (fig. 81), dont la baſe eſt un polygone régulier (nous déſignerons dans la ſuite cette pyramide en l'appellant ſimplement *pyramide droite*), eſt une ligne *a p* tirée du ſommet perpendiculairement ſur un des côtés de la baſe de la pyramide.

Si un demi-cercle *a m b* ſe meut autour du diametre *a b* (fig. 87) il engendrera un ſolide rond, dont tous les points de la ſurface ſeront également éloignés du point *c* qu'on nomme *centre* : ce ſolide s'appelle *ſphere* ou *globe*. L'arc *a n* engendrera une *calotte ſphérique n a l*, le ſecteur circulaire *n c l* engendrera un *ſecteur ſphérique n a l c*, & le demi-ſegment *n a g* engendrera un *ſegment ſphériqne n a l g*. La partie de la ſurface ſphérique compriſe entre deux plans paralleles *m p*, *n l* s'appelle une *zone*.

91. Les ſolides ſont *réguliers* ou *irréguliers*. Les ſolides réguliers ſont ceux qui ſont terminés de tous côtés par des faces égales & régulieres.

Les ſolides irréguliers ſont ceux qui ſont terminés par des ſurfaces qui n'ont point ces conditions.

Il y a cinq ſolides réguliers. Le *tétraedre*, qui n'eſt qu'une pyramide terminée par 4 triangles égaux & équilatéraux (fig. 88). Le *cube* ou l'*exaedre* (fig. 84) terminé par ſix quarrés égaux. L'*octaedre* (qui n'eſt qu'une double pyramide quadrangulaire) eſt terminé par 8 triangles égaux & équilatéraux (fig. 89). Le *dodécaedre* eſt terminé par 12 pentagones égaux & équilatéraux (fig. 90). Enfin l'*icoſaedre* eſt terminé par 20 triangles égaux & équilatéraux (fig. 91).

92. COROLLAIRE I. Parce que les Solides réguliers ſont terminés de tous côtés par des figures régulieres égales, il eſt clair qu'on peut les inſcrire dans une ſphere, de maniere que tous leurs angles ſe trouvant à la ſurface de la ſphere, leur centre ſe confonde avec celui de la ſphere.

93. COROLLAIRE II. Si donc l'on tire des angles de chacun de ces Solides des lignes au centre de la ſphere, il eſt viſible que ces Solides ſeront compoſés d'autant de pyramides égales qu'ils ont de faces, que le ſommet commun de ces pyramides étant au centre de la ſphere, leurs baſes ſont les faces mêmes de ces Solides.

94. PROBLEME. *Trouver le développement des Solides réguliers.* Pour le tétraedre (fig. 92) coupez ſur une carte un triangle équilatéral *a b c*, diviſez les côtés de ce triangle en deux également en *x* & tirant des lignes par les points de diviſion, vous aurez 4 triangles égaux & équilatéraux. Le triangle *x x x* ſera la baſe, les autres triangles ſeront les faces du tétraedre, que vous formerez facilement en pliant la figure, de ſorte que les lignes *x x* ſervent de plis, & que les points *a b c* aillent ſe joindre en un ſeul point. La figure 93, compoſée de 6 quarrés égaux, repréſente le développement du cube. La figure 94, compoſée de deux triangles équilatéraux & tellement aſſortis qu'ils aient chacun la moitié d'un de leurs côtés commune, repréſente les 8 triangles qui forment la face de l'octaedre. La figure 95 repréſente le développement du dodécaedre, & enfin la figure 96 repréſente celui de l'icoſaedre.

95. THÉOREME. *Il n'y a que cinq Solides réguliers.* Car les angles plans qui forment un angle ſolide valent toujours moins de 360° (89); donc trois angles de triangle

équilatéral pourront former l'angle ſolide du tétraedre : en effet l'angle du triangle équilatéral vaut 60° ; donc ſes trois angles valent ſeulement 180°. L'angle ſolide de l'octaedre ſera compoſé de quatre angles plans, chacun de 60° ; donc il ſera de 240°. L'angle de l'icoſaedre, compoſé de 5 angles plans chacun de 60°, vaut 300°, moindres que 360°. Mais 6 angles de 60° valant 360°, il eſt viſible qu'on ne pourra pas former d'angle ſolide avec 6 triangles égaux & équilatéraux ; à plus forte raiſon on n'en pourra pas former avec un plus grand nombre. Voilà donc les ſeuls Solides réguliers qu'on peut former avec le triangle équilatéral. Avec trois angles de quarré, qui valent enſemble 3 fois 90°, ou 270°, on pourra former l'angle du cube ou de l'exaedre ; mais on ne pourra former d'angle ſolide avec 4 angles de quarré, ni avec un plus grand nombre. Enfin l'angle du pentagone régulier valant 108° (38), on peut avec 3 angles de pentagone régulier former l'angle ſolide du dodécaedre, qui vaudra 324°, mais 4 de ces angles valent plus de 360° ; donc on ne peut former d'autre Solide régulier avec le pentagone, que le ſeul dodécaedre. A l'égard des autres polygones, *par exemple*, de l'exagone, de l'eptagone, &c. il eſt viſible qu'on ne peut s'en ſervir pour former un angle ſolide ; car pour former un angle ſolide, il faut au moins 3 angles plans, dont la ſomme ſoit moindre que 360° ; or 3 angles d'exagone, d'eptagone, &c. ne peuvent pas donner une ſomme moindre que 360° ; donc, &c.

96. REMARQUE. Le triangle équilatéral, le quarré & le pentagone régulier ſont les ſeuls polygones avec leſquels on puiſſe former un Solide régulier. Mais on ne peut pas ſe ſervir de tous ces polygones pour remplir l'eſpace qui eſt autour d'un point *o*, en n'employant que des polygones de même eſpece (fig. 97). Car l'eſpace autour d'un point *o* vaut 360° (11), mais 6 angles de triangle équilatéral valent auſſi 360° ; donc on peut avec 6 angles de triangle équilatéral remplir l'eſpace autour d'un point. 4 angles de quarré valent 360 ; donc 4 angles de quarré peuvent remplir l'eſpace autour d'un point. 4 angles de pentagone valent plus de 360°, & 3 angles de pentagone valent moins de 360° ; ainſi l'on ne peut pas ſe ſervir du pentagone régulier pour remplir l'eſpace autour d'un point. 3 angles d'exagone valent 360° ; par conſéquent on peut avec 3 angles d'exagone remplir l'eſpace au-

tour d'un point; mais 3 angles d'eptagone, d'octogone, &c. valant plus de 360°, & deux de ces angles valant moins de 360° (parce qu'un angle ne peut jamais valoir 180°, autrement il n'y auroit point d'angle, mais une seule ligne droite), il s'ensuit qu'on ne peut point les employer pour remplir l'espace autour d'un point. C'est pourquoi pour carreler une chambre en n'employant que des polygones de même espece, on ne peut se servir que du triangle équilatéral, du quarré ou de l'exagone. On préfere ordinairement ce dernier à cause que ses angles obtus sont plus solides que ceux des deux autres.

97. PROBLEME. *Trouver le développement de la surface latérale du prisme droit.* La surface latérale du prisme droit (fig. 82) étant composée d'autant de parallélogrammes de même hauteur, qu'il y a de côtés dans le polygone générateur, la surface latérale du prisme sera égale à un parallélogramme rectangle *acdb*, dont la hauteur *ac* sera égale au côté *dh* du prisme & dont la base *ab* est égale au périmetre de la base du prisme.

REMARQUE. Si le prisme étoit oblique en prenant la ligne *ac* égale à la hauteur des parallélogrammes qui composent la surface latérale du prisme, l'on auroit une surface égale à la surface latérale du prisme.

COROLLAIRE. Le rectangle *cabd* peut représenter le développement du cylindre droit *dha* (fig. 83) en prenant *ac*=*hd*, & faisant *ab* égale à la circonférence du cercle de la base. Si le prisme est oblique, on prendra *ac* égale à la distance qu'il y a entre les circonférences des bases supérieure & inférieure, & l'on aura une surface égale à la surface latérale du prisme, mais non pas son développement.

98. THÉOREME. *Trouver le développement de la surface latérale de la pyramide* (fig. 98). Cette surface étant composée d'autant de triangles qu'il

y a de côtés dans la baſe de la pyramide, il eſt clair que la ſurface latérale d'une pyramide qui auroit cinq faces égales reſpectivement aux triangles qui forment la figure 98, a cette même figure pour développement.

COROLLAIRE. Le développement de la ſurface d'un cône droit ſera un ſecteur de cercle *a b d* (fig. 99), dont le rayon *a b* ſera égal au côté du cône (on appelle auſſi ce côté *l'apothême du cône*), & l'arc *b d* égal à la circonférence de la baſe de ce cône; car tous les points de la circonférence de la baſe du cône droit étant également éloignés du ſommet, la ſurface latérale du cône droit eſt égale à la ſomme de tous les triangles qui ont leur ſommet au ſommet du cône, & leur baſe ſur la circonférence de la baſe du cône; or tous ces triangles ſont évidemment égaux au ſecteur *b a d*; donc, &c.

99. DÉFINITION. On appelle *ſolides ſemblables* ceux qui ont un même nombre d'angles homologues égaux, dont toutes les faces ſont des figures ſemblables (qui par conſéquent peuvent ſe réduire en triangles ſemblables) & dont toutes les dimenſions ſont proportionnelles.

COROLLAIRE. Si l'on tire deux diagonales homologues dans deux Solides ſemblables, ces diagonales feront avec les côtés homologues (ou même avec des lignes homologues quelconques) des triangles ſemblables; donc ces diagonales ſont entre elles comme les côtés homologues ou diagonales homologues, &c.

100. THÉOREME. *La ſurface d'un Solide quelconque eſt égale à la ſomme des ſurfaces des faces de ce Solide*: ce Théorême eſt évident.

COROLLAIRE. Donc en meſurant les faces

d'un Solide, on aura aiſément la ſurface de ce Solide.

101. THÉOREME. *La ſurface d'un Solide régulier eſt égale à la ſurface d'une des faces multipliée par le nombre des faces du Solide.* Car la ſurface d'un Solide régulier eſt compoſée d'un certain nombre de faces égales (91); donc la ſurface totale d'un tel Solide eſt égale à la ſurface de l'une quelconque de ces faces, multipliée par le nombre des faces.

102. THÉOREME. *La ſurface latérale d'un priſme eſt égale au produit d'un des côtés du priſme par le périmetre d'une ſection du priſme faite perpendiculairement à l'axe du priſme.* Car nous avons dit que que la ſurface latérale d'un priſme étoit compoſée d'autant de parallélogrammes qu'il y a de côtés dans le polygone générateur; mais chacun de ces parallélogrammes, tel que *l i g f* (100) eſt égal au produit du côté *f i* ou *g l* du priſme par la ligne *x p* perpendiculaire à *g l* ou *i f*; donc la ſurface latérale eſt égale au produit d'un des côtés *g l* du priſme par le nombre des perpendiculaires *x p*, ou par le périmetre de la ſection faite perpendiculairement à l'axe ou au côté du priſme.

COROLLAIRE. Donc la ſurface d'un priſme droit & d'un cylindre droit (fig. 82 & 83) eſt égale au produit du côté *h d* par le contour de la baſe: parce qu'alors cette baſe eſt perpendiculaire au côté. A l'égard du cylindre oblique (fig. 100), on meſurera, ſi l'on veut, la circonférence *p p* avec un fil *, & multipliant cette circonférence par le

* Cette circonférence perpendiculaire au côté *h d* ne ſera pas un cercle, mais une courbe qu'on appelle *ellipſe* & dont nous parlerons dans les Sections Coniques.

côté *h d* perpendiculaire au plan de la circonférence *p p*.

REMARQUE. En mesurant les surfaces des bases & les ajoutant à la surface latérale, l'on aura la surface totale ; or il est aisé d'avoir la surface des bases qui sont des polygones ou des cercles, dont on peut trouver la surface du moins par approximation.

103. THÉOREME. *La surface latérale d'une pyramide droite* b d f g h ( fig. 81 ) *est égale au produit du périmetre* b d f g h *par la moitié de son apothême* a p. Car puisque la pyramide est droite & sa base un polygone régulier, les triangles qui forment la surface latérale sont égaux entre eux ; or la surface d'un de ces triangles *d a f*, *par exemple*, est égale au produit du côté *d f* par la moitié de l'apothême *a p*, hauteur du triangle ; donc la surface totale est égale au produit du périmetre de la base par la moitié de l'apothême de la pyramide, ou au produit de l'apothême par la moitié du périmetre de la base.

COROLLAIRE. Donc la surface latérale d'un cône droit *a b p d* (fig. 86) est égale au produit de son côté, ou apothême *b a* par la moitié de la circonférence de la base, ou au produit de la moitié de l'apothême par la circonférence de la base.

REMARQUE I. Si la pyramide est oblique (fig. 85) on mesurera chacun des triangles qui forment sa surface latérale, & l'on aura la surface totale. A l'égard du cône oblique, on divisera sa circonférence en parties *b p* assez petites pour que chacune puisse être regardée, sans erreur sensible, comme une ligne droite, & mesurant la surface de chaque triangle *b a p*, ajoutant ensuite toutes ces surfaces,

l'on aura la ſurface latérale du cône oblique d'autant plus exactement que les lignes *b p* auront été priſes plus petites *.

REMARQUE II. A l'égard de la baſe ſoit de la pyramide, ſoit du cône, on voit bien comment il faut la meſurer, puiſqu'elle eſt un polygone ou un cercle.

104. THÉOREME. *La ſurface latérale d'une pyramide droite tronquée en* m n m, *ſuppoſant les deux baſes paralleles* (fig. 81), *eſt égale au produit du reſte de l'apothême* a p *par la moitié de la ſomme des périmetres des deux baſes.* Car ſi l'on conçoit un plan, coupant *mnm* parallele à la baſe, ce plan retranchera la petite pyramide *man* & la partie *n a* de l'apothême *a p*, & les faces latérales du tronc ſeront évidemment des trapezes, dont la hauteur commune ſera le reſte *n p* de l'apothême, & les baſes ſeront les côtés mêmes des baſes de la pyramide tronquée; donc la ſurface latérale de cette pyramide ſera égale à la ſurface d'un trapeze, dont une de baſes ſeroit le périmetre de la baſe inférieure, & l'autre baſe le périmetre de la baſe ſupérieure de la pyramide tronquée; or (71) la ſurface d'un trapeze eſt égale au produit de ſa hauteur par la moitié de la ſomme de ſes baſes; donc, &c.

REMARQUE. Si la pyramide étoit oblique on chercheroit la ſurface de chaque trapeze *d mtf*, la ſomme de toutes ces ſurfaces donneroit la ſurface cherchée. De même pour le cône oblique (fig. 85), ſuppoſant que la partie *b p* de la circonférence

* La ſurface exacte du cône oblique ne peut pas ſe trouver par la Géométrie Élémentaire; elle demande le ſecours du Calcul intégral.

de la baſe inférieure ne differe pas ſenſiblement d'une ligne droite, on cherchera la ſurface de chaque trapeze $b\,M\,n\,p$, la ſomme de ces ſurfaces donnera la ſurface du cône tronqué oblique d'autant plus exactement que les lignes $b\,p$ approcheront plus d'être droites.

COROLLAIRE I. La ſurface latérale d'une pyramide tronquée droite (fig. 81) eſt égale au produit de ſon apothême $n\,p$ par le périmetre $o\,o$ de la ſection $o\,o$ que je ſuppoſe paſſer par le milieu des côtés $m\,d$, $m\,g$ parallelement aux baſes; car chacun des côtés de cette ſection ſera la moitié de la ſomme des baſes du trapeze correſpondant; donc le périmetre de cette ſection ſera la moitié de la ſomme des périmetres des deux baſes; or (par le Théorême) le produit de cette demi-ſomme par l'apothême eſt égale à la ſurface latérale de la pyramide tronquée; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc la ſurface latérale du cône droit tronqué (en ſuppoſant ſes deux baſes paralleles) eſt égale au produit de ſon apothême $n\,d$ par le périmetre $o\,o$ de la ſection faite par le milieu d'un des côtés $n\,d$ parallelement aux baſes (fig. 86). Car un cône droit tronqué n'eſt autre choſe qu'une pyramide droite tronquée, dont les baſes ſont des cercles; donc par le Corollaire précédent cette ſurface eſt égale au produit de l'apothême $n\,d$ par la circonférence $N\,o\,o$ du cercle décrit par le milieu du côté $n\,d$ parallelement aux baſes.

105. THÉOREME. *La ſurface d'une ſphere décrite par la révolution du demi-cercle* a m b (fig. 87) *autour du diametre* a b * *eſt égale au produit de la circonfé-*

* Toutes les lignes tirées par le centre de la ſphere & *rence*

*rence d'un de ſes grands cercles par ſon diametre.* Des points *m*, *i*, *n*, ou des extrémités & du milieu de l'arc *m i n* (qui en le ſuppoſant extrêmement petit, ſera ſenſiblement une portion de la tangente *t t*), ayant abaiſſé les perpendiculaires *m d*, *i x*, *n g* ſur le diametre *a b*, & du point *m* la perpendiculaire *m o* ſur *n g*; les triangles *m o n*, *n g c* ayant tous leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre ſeront ſemblables (49). Donc l'on a *n c* : *n g* ou *i x* (parce que l'arc *m n* étant fort petit, *i x* eſt ſenſiblement égale à *n g*) :: *m n* : *m o*; mais les circonférences étant entr'elles comme leurs rayons (63), l'on a la circonférence dont *n c* eſt le rayon, & à la circonférence dont *i x* eſt le rayon comme *m n* : *m o*; donc le produit de *m o* par la circonférence du rayon *n c*, ou par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere, eſt égal au produit de *m n* (côté du cône tronqué décrit par *m n g d* pendant la révolution du demi-cercle *a m b* autour de *a b*) par la circonférence décrite par le rayon *x i* autour de *x*, c'eſt-à-dire, par la circonférence d'un cercle décrit par le milieu *i* de ce cône tronqué parallelement à ſes baſes. Or (104) ce produit eſt égal à la ſurface du cône tronqué décrite par *m n*; donc la ſurface décrite par chaque arc *m n* eſt égale au produit de la circonférence d'un grand cercle de la

terminées de part & d'autre à ſa ſurface, ſont appellées *diametres de la ſphere*; mais on appelle *axe* celui des diametres autour duquel la ſphere eſt cenſée tourner. On nomme *grands cercles de la ſphere* ceux qui ont pour centre le centre même de la ſphere; mais ceux qui ont leurs centres hors du point *c*, ſur un diametre quelconque *a b*, ſont des petits cercles de la ſphere. Une ligne *c n* tirée du centre à la ſurface de la ſphere eſt un *rayon*.

ſphere par chaque ligne correſpondante $mo = dg$ (hauteur du cône tronqué correſpondant), ou par la partie du diametre correſpondante à cet arc ; donc la ſurface totale décrite par tous les arcs $mn$, c'eſt-à-dire, la ſurface totale de la ſphere, eſt égale au produit de la circonférence d'un grand cercle par la ſomme des parties du diametre correſpondantes à tous les arcs $mn$, c'eſt-à-dire, par le diametre $ab$ de la ſphere ; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc la ſurface d'une calotte ſphérique $map$, eſt égale au produit de la circonférence d'un grand cercle de la ſphere par la hauteur $ad$ de cette calotte, & la ſurface d'une zône $mnlp$ eſt égale au produit de la circonférence d'un grand cercle par la hauteur $dg$ de la zône.

REMARQUE I. La ſurface d'un ſecteur ſphérique $nalc$ eſt égale à la ſurface de la calotte $nal$, plus la ſurface latérale du cône $ncl$.

REMARQUE II. Puiſque pendant la révolution du demi-cercle $amb$ autour du diametre $ab$ tout point $m$ de ce demi-cercle décrit un cercle dont $mp$ eſt le diametre ; il eſt viſible que la ſection d'une ſphere par un plan quelconque $mdp$ ſera un cercle.

COROLLAIRE. La ſurface de la ſphere eſt égale à la ſurface latérale du cylindre qui lui eſt circonſcrit, c'eſt-à-dire, qui la touche par côté, ſupérieurement & inférieurement (fig. 101). Car la baſe d'un tel cylindre a un diametre égal à celui de la ſphere, & ſa hauteur eſt auſſi égale au diametre $ab$ de la ſphere ; mais la ſurface latérale du cylindre droit eſt égale au produit de ſon côté ou de ſon axe $ab$ par la circonférence de ſa baſe (102) ; donc, &c.

*Du rapport des Surfaces des Solides.*

106. THÉOREME. *Les ſurfaces latérales* S, *s des deux priſmes ou cylindres ſont entr'elles comme les produits des périmetres* P, *p de la ſection faite perpendiculairement à leur axe par leurs côtés, ou, ce qui revient au même, par leurs axes* H, *h. Ainſi l'on aura* S : *s* :: PH : *ph*. Car nous avons vu (102) que le produit des périmetres de ces ſections multipliées par les côtés, étoient égaux aux ſurfaces latérales de priſmes ou cylindres; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc ſi les périmetres P & *p* ſont égaux, l'on aura S : *s* :: H : *h*; & ſi H = *h*, l'on aura S : *s* :: P : *p*. (Voyez les raiſons & proportions dans le calcul).

COROLLAIRE II. Si P : *p* :: *h* : H, alors PH = *ph*; & S = *s*. C'eſt-à-dire que ſi les périmetres des ſections perpendiculaires à l'axe des deux priſmes ou cylindres ſont en raiſon inverſe de leurs axes, les ſurfaces latérales de ces priſmes ou de ces cylindres ſeront égales.

COROLLAIRE III. Si les priſmes ou cylindres ſont ſemblables, on aura S : *s* :: P² : *p*² :: H² : *h*². Car la raiſon S : *s* étant égale à la raiſon de PH : *ph*, qui eſt compoſée de raiſons P : *p* & H : *h*, leſquelles raiſons ſont égales lorſque les priſmes ou cylindres ſont ſemblables (99); dans ce cas la raiſon de S : *s* ſera une raiſon doublée de P : *p* & H : *h*; donc, &c. En général les ſurfaces, même totales des ſolides ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs dimenſions homologues. Car deux ſolides ſemblables ayant toutes leurs dimenſions homologues proportionnelles, leurs ſurfaces doi-

vent être en raiſon des produits des dimenſions proportionnelles, ou comme les quarrés de ces dimenſions.

COROLLAIRE IV. Il ſuit du dernier Corollaire que les ſurfaces des ſpheres ſont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diametres : car les ſpheres ſont des ſolides ſemblables, dont les rayons ou diametres ſont des lignes homologues.

107. THÉOREME. *La ſurface de la ſphere eſt à celle d'un de ſes grands cercles, comme* 4 : 1. C'eſt-à-dire qu'elle eſt quadruple de la ſurface d'un de ſes grands cercles : car la ſurface de la ſphere eſt égale au produit de la circonférence $c$ d'un de ſes grands cercles par le diamètre $d$ de ce même grand cercle ; tandis que la ſurface de ce grand cercle eſt égale au produit de la même circonférence $c$ par la moitié du rayon, ou par le quart du diametre $d$ ; donc ces deux ſurfaces ſont entr'elles comme $cd$ : $\frac{cd}{4}$ :: 1 : $\frac{1}{4}$ :: 4 : 1.

108. THÉOREME. *La ſurface totale du cylindre circonſcrit eſt à la ſurface de la ſphere comme* 3 : 2. Car (105) la ſurface de la ſphere eſt égale à la ſurface latérale du cylindre circonſcrit ; donc la ſurface latérale du cylindre circonſcrit vaut 4 grands cercles de la ſphere ; c'eſt pourquoi en y comprenant les baſes, dont chacune eſt un grand cercle de la ſphere, la ſurface totale du cylindre vaudra 6 grands cercles de la ſphere ; ainſi cette ſurface eſt à celle de la ſphere comme 6 : 4, ou 3 : 2 ; donc, &c.

109. THÉOREME. *La ſurface totale du cône équilatéral* (fig. 102) *eſt à la ſurface de ſa baſe comme* 3 : 1. Pour avoir

la ſurface latérale du cône équilatéral $g\,d\,f$, il faut multiplier la circonférence de la baſe par la moitié du côté $g\,d = g\,f$, (*voyez* le n°. 103); mais pour avoir la ſurface de la baſe, il ſuffit de multiplier cette même circonférence par la moitié de ſon rayon, ou par le quart de $g\,f$; donc la ſurface latérale de ce cône vaut deux fois la ſurface de la baſe; donc la ſurface latérale plus la ſurface de la baſe, vaut trois fois la ſurface de la baſe; donc, &c.

110. THÉOREME. *La ſurface de la ſphere eſt à la ſurface du cône équilatéral circonſcrit comme* 4 : 9 *. Du centre $c$ de la ſphere inſcrite dans le cône $g\,d\,f$ ayant tiré les rayons $c\,g$, $c\,f$, $c\,d$; à cauſe du triangle équilatéral $g\,d\,f$, les arcs $d\,f$, $d\,g$, $g\,f$ ſeront égaux auſſi-bien que leurs cordes. Donc ils vaudront chacun la troiſiéme partie du cercle ou 120°; donc du point $c$ tirant la perpendiculaire $c\,b\,a$ ſur le milieu de $g\,f$, les arcs $g\,a$, $a\,f$ vaudront chacun 60°, & leurs cordes $g\,a$, $a\,f$ ſeront égales aux rayons $c\,g$, $c\,f$; ainſi les points $g$ & $f$ ſont également éloignés de $c$ & de $a$, & $g\,f$ coupe $c\,a$ en deux également en $b$. Donc $c\,b$ eſt la moitié de $c\,a$ ou de $c\,g$; or $(g\,c)^2 = (c\,b)^2 + (g\,b)^2$ (76); donc en faiſant $g\,c = 1$, $c\,b$ ſera $= \frac{1}{2}$, $(c\,b)^2 = \frac{1}{4}$, & $(g\,b)^2 = \frac{1}{4}$. Mais les ſurfaces des cercles ſont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons; donc le cercle dont le rayon eſt $c\,b$, eſt au cercle dont le rayon eſt $g\,b$, comme $\frac{1}{4} : \frac{1}{4}$, ou comme 1 : 3. C'eſt-à-dire que le grand cercle de la ſphere inſcrite étant 1, la baſe du cône circonſcrit ſera 3; mais la ſurface de la ſphere vaut 4 de ſes grands cercles, tandis que la ſurface totale du cône équilatéral vaut 3 fois la ſurface de ſa baſe; donc ces ſurfaces ſont entr'elles comme $1 \times 4 : 3 \times 3 :: 4 : 9$; donc, &c.

111. THÉOREME. *Si à une ſphere* (fig. 101) *on circonſcrit un cylindre & un cône équilatéral, les ſurfaces de ces trois ſolides ſeront entr'elles comme* 4 : 6 : 9. Cela ſuit évidemment des n^os^. 108 & 110.

COROLLAIRE. Donc la ſurface du cylindre circonſcrit eſt moyenne proportionnelle entre la ſurface de la ſphere & celle du cône équilatéral circonſcrit.

* Un cône circonſcrit à une ſphere eſt celui qui la touche en deſſous & par côté.

112. THÉOREME. *La ſurface de la ſphere circonſcrite au cône équilatéral* (fig. 102) *eſt quadruple de celle de la ſphere inſcrite dans le même cône.* Car le rayon *c g* de la premiere eſt double du rayon *c b* de la ſeconde (par la démonſtration de l'avant dernier Théorême); c'eſt pourquoi ces ſurfaces ſont entr'elles comme 4 : 1 (106); donc, &c.

## *De la ſolidité des Solides & de leur rapport.*

113. THÉOREME. *La ſolidité d'un priſme ou d'un cylindre droit ou oblique* (fig. 81 & 100) *eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur.* Car ſi l'on conçoit un priſme ou un cylindre engendré par le mouvement de ſa baſe, qui laiſſe en montant parallelement à elle-même des traces d'une épaiſſeur infiniment petite, il eſt évident qu'il faudra multiplier une de ces traces par le nombre de fois que ſon épaiſſeur eſt contenue dans la hauteur, ou, ce qui revient au même, multiplier la baſe par la hauteur * ; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc les priſmes & les cylindres droits & obliques ſont en raiſon compoſée de leurs baſes & de leurs hauteurs.

COROLLAIRE II. Donc ſi les baſes des deux cylindres A & *a* (il en eſt de même de deux priſmes) ſont B & *b*, les hauteurs H & *h*, le pre-

* Comme multiplier c'eſt prendre le multiplicande un certain nombre de fois déſigné par le multiplicateur, il eſt évident qu'on ne peut multiplier par une ligne. Seulement on conçoit la baſe d'une certaine épaiſſeur & l'on prend cette baſe autant de fois que ſon épaiſſeur eſt contenue dans la hauteur. Rien n'empêche cependant qu'on ne continue de dire le produit de la baſe par la hauteur, pourvu qu'on entende par-là ce que nous venons de dire.

mier ſera au ſecond comme BH : *b h*. Si H = *h*, l'on aura A : *a* :: B : *b*. Si B = *b*, on aura A : *a* :: H : *h*. Si B : *b* :: *h* : H, alors BH = *bh*, & A = *a*.

114. THÉOREME. *Deux pyramides triangulaires de même baſe & de même hauteur ſont toujours égales en ſolidité* (fig. 103). Car les deux pyramides ayant même hauteur, il eſt évident qu'elles ſeront compriſes entre les mêmes plans paralleles, & que ſi on les coupe par des plans *x x* paralleles à leurs baſes, le nombre des tranches ſera le même de part & d'autre, & l'épaiſſeur des tranches correſpondantes ſera auſſi la même; or les ſurfaces *o m n*, *s p i* des tranches correſpondantes ſeront égales. En effet les triangles *b c d*, *m o n* ſont ſemblables; car tous les côtés de l'un ſont paralleles aux côtés correſpondans de l'autre, *o m* eſt parallele à *b c*, *m n* à *b d* & *o n* à *d c*; donc ſi l'on conçoit que le triangle *m o n* deſcende le long de *o c*, de maniere que *o m* reſte toujours parallele à *b c*, lorſque le point *o* tombera ſur le point *c*, le côté *o m* tombera ſur *b c*, *o n* ſur *c d*, & *m n* ſera parallele à *b d*; donc ces deux triangles auront un angle commun & des baſes paralleles; donc ils ſont ſemblables. On démontrera de même que le triangle *p s i* eſt ſemblable au triangle *f g h*, égal à *b c d* (par ſuppoſition). De plus les triangles ſemblables *b a c*, *a o m* donnent *b c* : *o m* :: *b a* : *a m*, & les triangles ſemblables *a f g*, *a p s* donnent *f g* : *p s* :: *a f* : *a p*. Mais les triangles ſemblables *b a f*, *a m p* donnent *b a* : *a m* :: *a f* : *a p*, donc *b c* : *o m* :: *f g* : *p s*, & (*b c*)² : (*m o*)² :: (*f g*)² : (*p s*)²; & parce que les triangles ſemblables ſont entr'eux comme les quarrés des côtés homologues, l'on a *b c d* : *m o n* :: *f g h* :

*p s i*, ou *b c d* : *f g h* :: *m o n* : *p s i*. Mais *b c d* = *f g h*, par supposition ; donc *m o n* = *p s i*. donc les deux pyramides contiennent un nombre égal de tranches égales ; donc elles sont égales.

COROLLAIRE I. Deux pyramides quelconques de même base & de même hauteur sont égales ; car si l'on partage les bases de ces pyramides en un même nombre de triangles égaux chacun à chacun, & qu'on conçoive par le sommet de ces pyramides, des lignes tirées aux trois angles de chacun de ces triangles, il est visible que chacune de ces pyramides sera divisée en un même nombre de pyramides triangulaires, qui auront des bases & des hauteurs égales chacune à chacune ; or par le Théorême ces pyramides triangulaires sont égales ; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc deux cônes, l'un droit & l'autre oblique de même base & de même hauteur sont égaux : car un cône est une pyramide, dont la base est un cercle ; donc, &c.

115. THÉOREME. *Un prisme triangulaire droit* a b c d f g (fig. 104) *vaut trois pyramides de même base & de même hauteur.* Ayant tiré les lignes *b f*, *b d*, *d c*, on peut concevoir le prisme divisé en trois pyramides, dont l'une *b d f g*, a même base *d g f* & même hauteur *g b* que le prisme. Celle-ci étant ôtée, le reste se divise en deux pyramides *a c d b*, *c d f b*. Les deux pyramides *a c d b*, *b d f g* sont égales, puisqu'elles ont chacune pour base une des bases du prisme, & pour hauteur un des côtés du prisme. De plus la pyramide *a c b d* est = *c d f b*; [illegible] la diagonale *c d* partageant le parallélogramme *a [illegible] f* en deux parties égales, ces deux pyramides ont chacune pour base la moitié de ce parallélogramme, &

leur ſommet en *b*. Elles ont donc même hauteur & des baſes égales, ce qui les rend égales ; donc les trois pyramides ſont égales ; donc le Théorême eſt également vrai lorſque le priſme triangulaire n'eſt pas droit *.

COROLLAIRE I. Tout priſme eſt triple d'une pyramide de même baſe & de même hauteur. *Par exemple*, un priſme pentagonal eſt triple d'une pyramide pentagonale de même baſe & de même hauteur (fig. 82). Car ſi l'on diviſe les baſes de ce priſme en un même nombre de triangles égaux, & que de tous les angles correſpondans des triangles de l'une des baſes, ou même des lignes aux angles correſpondans des triangles de l'autre baſe, on peut concevoir facilement le priſme diviſé en un certain nombre de priſmes triangulaires, *par exemple*, ici en 5 ; or chacun de ces priſmes eſt triple d'une pyramide triangulaire de même baſe & de même hauteur ; donc le priſme entier eſt triple de la ſomme de ces cinq pyramides triangulaires ; mais ces cinq pyramides triangulaires ſont évidemment égales à une ſeule pyramide pentagonale de même hauteur, & dont la baſe ſeroit égale à la ſomme des baſes de ces pyramides ; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc le cylindre eſt triple du cône de même baſe & de même hauteur. Car le cylindre eſt un priſme dont la baſe eſt un cercle, & le cône une pyramide dont la baſe eſt auſſi un cercle.

* Cela a lieu également ſoit qu'on ſuppoſe le priſme droit ou oblique ; car les pyramides *b d f g*, *a b c d* ayant chacune pour baſe une des baſes du priſme, & leurs ſommets, l'une en *b* & l'autre en *d* ont évidemment même hauteur que le priſme ; de plus *a c b d* = *d c b f*.

COROLLAIRE III. Donc pour avoir la ſolidité d'une pyramide ou d'un cône, il ſuffit de multiplier la baſe par le tiers de la hauteur. Car la ſolidité du priſme étant égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur, celle de la pyramide, qui n'eſt que le tiers de celle du priſme, doit être égale au produit de la baſe par le $\frac{1}{3}$ de la hauteur; donc, &c.

COROLLAIRE IV. Donc la ſurface des polyedres réguliers eſt égale au produit de leur ſurface par le tiers de la perpendiculaire abaiſſée du centre ſur le milieu d'une des faces du polyedre, (nous appellerons cette perpendiculaire *rayon droit*). En effet on peut (93) concevoir chaque polyedre régulier comme compoſé d'autant de pyramides égales que le polyedre a de faces : ces pyramides ont leur ſommet commun au centre du polyedre, leur hauteur eſt égale au rayon droit, & leur baſe eſt une des faces du polyedre; donc chacune de ces pyramides eſt égale à une des faces multipliée par le $\frac{1}{3}$ du rayon droit, & leur ſomme, ou la ſolidité du polyedre eſt égale au produit de toutes les faces, c'eſt-à-dire, au produit de la ſurface du polyedre par le $\frac{1}{3}$ du rayon droit du polyedre.

COROLLAIRE V. La ſolidité de la ſphere eſt égale au produit de ſa ſurface par le $\frac{1}{3}$ de ſon rayon. Car on peut concevoir la ſphere comme compoſée d'une infinité de pyramides qui ont leur ſommet au centre, dont la baſe de chacune eſt une portion infiniment petite de la ſurface de la ſphere, & dont la hauteur eſt égale au rayon de la même ſphere; or la ſomme de toutes ces pyramides eſt égale à une ſeule pyramide qui auroit pour baſe la ſurface entiere, & pour hauteur le rayon de la ſphere; donc, &c.

COROLLAIRE VI. Il ſuit du Corollaire précédent que la ſolidité du cylindre circonſcrit à une ſphere eſt à la ſolidité de la ſphere comme 3 : 2. Car ſoit $c$ la ſurface d'un grand cercle de la ſphere, ſa ſurface ſera $= 4c$ (107); & faiſant le rayon de

la ſphere $= r$, la ſolidité ſera $= 4\frac{cr}{3} = \frac{4}{3}cr$. Mais la ſolidité du cylindre circonſcrit eſt $= c \times 2r$ (113); donc la ſolidité du cylindre circonſcrit eſt à la ſolidité de la ſphere comme $2cr : \frac{4}{3}cr :: 2 : \frac{4}{3} :: 6 : 4 :: 3 : 2$; donc, &c.

COROLLAIRE VII. Il ſuit du dernier Corollaire que la ſphere eſt les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonſcrit.

COROLLAIRE VIII. Il ſuit du Corollaire précédent que la ſolidité de la ſphere eſt double de celle d'un cône qui auroit pour baſe un grand cercle de la ſphere, ou la baſe même du cylindre circonſcrit, & pour hauteur le diametre même de la ſphere, ou la hauteur du cylindre circonſcrit. Car un tel cône eſt le tiers du cylindre circonſcrit; donc ce cône ſera $= 1$, ſi le cylindre circonſcrit eſt $= 3$; donc la ſphere qui eſt au cylindre circonſcrit comme $2 : 3$ ſera à ce cône comme $2 : 1$; donc, &c.

116. THÉOREME. *La ſphere eſt au cône équilatéral circonſcrit comme* 4 : 9 (fig. 102). Car la baſe du cône équilatéral eſt égale à trois grands cercles de la ſphere inſcrite (démonſtration du n°. 110). De plus $cb$ rayon de la ſphere eſt $= \frac{cg}{2} = \frac{cd}{2}$; donc le rayon de la ſphere inſcrite eſt le tiers de la hauteur du cône. Faiſant $cb = r$, & la ſurface d'un grand cercle de la ſphere inſcrite $= c$, $3c$ ſera la baſe du cône, $3r$ ſa hauteur, $3c \times r$ ſa ſolidité (115). Mais la ſolidité de la ſphere (115) eſt $= \frac{4}{3}cr$; donc la ſolidité de la ſphere eſt à celle du cône équilatéral circonſcrit comme $\frac{4}{3}cr : 3cr :: \frac{4}{3} : 3 :: 4 : 9$.

COROLLAIRE. Il ſuit de-là & du n°. 115 que ſi à une ſphere on circonſcrit un cylindre & un cône équilatéral, leurs ſolidités ſeront comme $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot\cdot} 4 : 6 : 9$. C'eſt-à-dire, (111) dans le rapport de leurs ſurfaces.

117. PROBLEME. *Trouver la ſolidité d'un cône droit tronqué* pood (fig. 86). Suppoſant l'axe $cs$ de ce cône prolongé

juſqu'à ce qu'il rencontre le côté $do$ auſſi prolongé & tirant $xo$ parallele à l'axe, les triangles ſemblables $dox$, $aac$, donneront $dx = dc - cx = dc - os : ox = sc :: dc : ac$. C'eſt-à-dire, la différence des rayons des deux baſes eſt à l'axe du cône tronqué comme le rayon de la baſe inférieure eſt à l'axe du cône entier. Ce cône entier étant connu, on en ôtera la ſolidité du petit cône $aoo$, dont on connoît la baſe $oo$, & dont il eſt aiſé de connoître la hauteur qui eſt égale à $sa$ quand le cône eſt droit, comme nous le ſuppoſons ici, le reſte donnera la ſolidité du cône tronqué, ce qui eſt évident.

118. Deux priſmes (il en eſt de même de deux cylindres) A & $a$ ſont en raiſon compoſée de leurs baſes B & $b$, & de leurs hauteurs H & $h$. Car le premier eſt $= Bh$, & le ſecond eſt $= bh$; donc $A : a : BH : bh$. Si $B = b$, l'on aura $A : a :: H : h$. Si $H = h$, l'on aura $A : a :: B : b$. Si $B : b :: h : H$, alors $Bh = bh$, & $A = a$. Ainſi deux priſmes ou deux cylindres ſont égaux lorſque leurs baſes ſont en raiſon inverſe de leurs hauteurs.

COROLLAIRE I. Les pyramides & les cônes ſont en raiſon compoſée de leurs baſes & de leurs hauteurs, & tout ce que nous venons de dire du rapport des priſmes & des cylindres doit s'appliquer aux pyramides & aux cônes qui ſont les tiers de ces ſolides.

COROLLAIRE II. Donc ſi à un cylindre on circonſcrit un cube (fig. 105), le cube ſera au cylindre comme le quarré du diametre au cercle de la baſe du cylindre. Mais le cercle de la baſe eſt égal au produit de ſa circonférence $c$ par la moitié de ſon rayon $r$, ou par le quart de ſon diametre $2r$; donc le quarré du diametre eſt à la ſurface du cercle comme $4r^2 : c\frac{2r}{4}$, ou comme $4r : \frac{c}{2} :: 8r : c$; donc le cube eſt au cylindre inſcrit comme le quadruple du diametre d'un cercle eſt à ſa circonférence.

119. THÉOREME. *Le cube eſt à la ſphere inſcrite comme*

*6 diametres d'un cercle à la circonférence de ce cercle* (fig. 106). Car ſoit la circonférence $= c$, le rayon $= r$; le diametre ſera $2r$, côté du cube dont la baſe $4r^2$ multipliée par la hauteur $2r$, donnera $8r^3$ ſolidité du cube. Celle de la ſphere inſcrite étant égale au produit de ſa ſurface (qui eſt égale à quatre de ſes grands cercles, c'eſt-à-dire $= 2rc$) par le tiers de ſon rayon, ſera $2rc \times \frac{1}{3}r = \frac{2}{3}cr^2$; donc les ſolidités du cube & de la ſphere inſcrite ſont entr'elles comme $8r^3 : \frac{2}{3}cr^2$, ou comme $4r : \frac{c}{3}$ (en diviſant par $2rr$), ou comme $12r : c$; c'eſt-à-dire, comme 6 diametres à la circonférence.

COROLLAIRE. Donc en ſe ſervant du rapport d'*Archimède*, le cube ſera à la ſphere inſcrite comme $6 \times 7 : 22$, ou comme $42 : 22 :: 21 : 11$.

120. THÉOREME. *Deux parallélipipedes ſemblables ſont entr'eux comme les cubes des longueurs & largeurs des baſes, & des hauteurs.* Soit A la largeur de la baſe, B la longueur de cette même baſe, $h$ la hauteur du premier parallélipipede, $a$ la largeur, $b$ la longueur de la baſe du ſecond parallélipipede & $h$ ſa hauteur. La baſe du premier ſera AB & ſa ſolidité ſera $=$ ABH, de même la ſolidité du ſecond ſera $abh$ (par le n°. 113); donc le premier eſt au ſecond comme ABH : $abh$; or à cauſe de la ſimilitude de ces ſolides, les trois dimenſions du premier $p$ ſont proportionnelles aux trois dimenſions du ſecond $q$. Donc la raiſon de $p$ à $q$ eſt compoſée de trois raiſons égales; donc elle eſt triplée, & égale à la raiſon des cubes des termes d'une des raiſons compoſantes (voyez les raiſons compoſées dans le calcul). C'eſt pourquoi $p : q : A^3 : a^3 :: B^3 : b^3 :: H^3 : h^3$.

COROLLAIRE. Les priſmes triangulaires ſemblables ſont évidemment moitiés des priſmes parallélipipedes ſemblables, puiſque les baſes de

ces prismes sont des triangles semblables moitiés des parallélogrammes semblables, bases des parallélipipedes semblables;donc les prismes triangulaires semblables (& il en est de même de tous les prismes semblables, puisqu'ils sont évidemment composés d'un égal nombre de prismes triangulaires semblables) sont en raison triplée de leurs côtés homologues, de leurs hauteurs, &c. Cela doit s'entendre aussi des cylindres semblables, qui ne sont autre chose que des prismes semblables, mais dont les bases sont des cercles.

COROLLAIRE II. Il suit du Corollaire précédent que les pyramides & les cônes semblables sont en raison triplée de leurs dimensions homologues; car les pyramides semblables sont le $\frac{1}{3}$ des prismes semblables, & les cônes semblables le $\frac{1}{3}$ des cylindres semblables; or les $\frac{1}{3}$ sont comme les tous; donc, &c.

COROLLAIRE III. Il suit du dernier Corollaire que les polyedres réguliers semblables, *par exemple*, les tétraedres semblables, sont en raison triplée de leurs rayons droits, ou en général de leurs dimensions homologues : car les polyedres réguliers semblables sont composés d'un même nombre de pyramides semblables; donc, &c.

COROLLAIRE IV. Il suit du Corollaire second que les spheres sont comme les cubes de leurs rayons, ou de leurs diametres. Car on peut considérer deux spheres comme composées d'un même nombre de pyramides semblables qui ont leur sommet au centre, leur base sur la surface, & dont la hauteur est égale au rayon de chaque sphere; donc ces spheres sont entr'elles comme les cubes de leurs rayons, ou de leurs diametres; car les diametres sont doubles des rayons.

REMARQUE. On peut démontrer ce Corollaire de cette autre maniere. Soit $r$ le rayon, $c$ la circonférence d'un grand cercle de la premiere ſphere A, $d$ le rayon, $f$ la circonférence de la ſeconde ſphere $a$. La premiere $A = 2rc \times \frac{r}{3} = \frac{2r^2e}{3}$. La ſeconde ſphere $a = \frac{2d^2f}{3}$; donc $A : a :: \frac{2r^2e}{3} : \frac{2d^2f}{3} :: r^2c : d^2f$ (en diviſant par $\frac{2}{3}$); mais les grands cercles de ces ſpheres ont leurs circonférences proportionnelles à leurs rayons; donc $r : d :: c : f$; donc $\frac{r}{d} = \frac{c}{f}$; donc $\frac{r^2c}{d^2f} = \frac{r^2}{d^2} \times \frac{c}{f} = \frac{r^2}{d^2} \times \frac{r}{d} = \frac{r^3}{d^3}$. C'eſt-à-dire que la raiſon de $A : a$ eſt triplée de la raiſon des cubes des rayons, ou des diametres. Puiſque évidemment $A : a :: r^3 : d^3 :: 8r^3 : 8d^3$. Or $8r^3$ & $8d^3$ ſont les cubes des diametres $2r$ & $2d$; donc ſi $r = 1$ & $d = 2$, l'on aura $A : a :: 1 : 8$.

121. THÉOREME. *Un parallélipipede, dont les dimenſions* a, b, h *ſont en proportion continue, peut être réduit en un cube de même ſolidité que lui.* Car puiſque $a : b :: b : h$, l'on a $b^2 = ah$, & en multipliant les deux membres de cette équation par $b$, il vient $b^3 = abh$; or $abh$ exprime la ſolidité du parallélipipede, & $b^3$ la ſolidité d'un cube dont le côté $= b$; donc, &c.

122. PROBLEME. *Faire un cube double d'un autre cube.* Soit $a$ le côté du cube propoſé, $a^3$ ſera ſa ſolidité, $2a^3$ le cube double cherché. Les côtés de ces cubes ſont entr'eux comme $\sqrt[3]{(a^3)} : \sqrt[3]{(2a^3)} = a\sqrt[3]{(2)}$; or il n'eſt pas poſſible de trouver exactement la racine troiſiéme de 2, par laquelle il faudroit multiplier le côté du cube donné pour avoir celui du cube cherché; donc le Problême eſt impoſſible arithmétique-

ment. Si l'on veut ſe contenter d'une approximation, on prendra la valeur de $\sqrt[3]{2}$ en décimales, on aura 1·2 en ſe tenant aux dixiémes; & multipliant le côté $a$ par 1·2 on aura le côté d'un cube à-peu-près double du propoſé. En pouſſant l'aproximation de $\sqrt[3]{2}$ plus loin, on auroit un cube qui approcheroit plus du cube demandé. On ne peut pas non plus trouver par l'arithmétique un cube triple, quadruple, quintuple, &c. d'un cube propoſé, parce que 3, 4, 5, &c. ne ſont pas des cubes; mais on peut trouver un cube d'une multiplicité exprimée par un nombre cube; ainſi on peut trouver un cube octuple d'un autre cube $a^3$. Car l'on aura le cube demandé $= 8a^3$; or le côté d'un tel cube eſt $= 2a$; donc, &c. *

123. PROBLEME. *Meſurer la ſolidité d'une muraille dont l'épaiſſeur eſt de 3 pieds, la longueur de 12 & la hauteur de 10.* Je multiplie la longueur 12 par l'épaiſſeur 3, le produit 36 pieds quarrés donne la baſe de la muraille. Cette baſe étant mutipliée par la hauteur 10, le produit eſt 360 pieds cubes; ſolidité de la muraille.

124. PROBLEME. *Meſurer un obéliſque* (c'eſt une pyramide de pierre ou de marbre) *dont la baſe eſt de 12 toiſes quarrées, & la hauteur de 30 toiſes.* Je multiplie la baſe par le tiers de la hauteur, le produit 120 me fait voir que la ſolidité cherchée eſt de 120 toiſes cubes.

REMARQUE. On meſure les ſolidités en pieds cubes, pouces cubes, toiſes cubes, &c. La toiſe cube vaut 216 pieds cubes, parce que la toiſe vaut 6 pieds, & que le cube de 6 eſt 216. Le pied cube vaut 1728 pouces cubes, parce que le

* On peut faire un cube double d'un autre en ſe ſervant des lignes courbes pour trouver le côté de ce cube, ainſi qu'on le verra dans la ſuite de cet Ouvrage.

pied

pied vaut 12 pouces & que le cube de 12 eſt 1728. Le pouce cube vaut 1728 lignes cubes, & la ligne cube vaut 1728 points cubes; parce que le pouce vaut 12 lignes, & la ligne 12 points.

125. PROBLEME. *Trouver la ſolidité d'une ſphere dont le diametre eſt ſuppoſé de* 14 *pieds.* Je cherche par le rapport d'*Archiméde* la circonférence d'un grand cercle de cette ſphere, en diſant 7 : 22 :: 14 :: $x$ (circonférence cherchée) = 44. Multipliant cette circonférence par le diametre 14, le produit 616 me fait voir que la ſurface de cette ſphere eſt de 616 pieds quarrés. Multipliant cette ſurface par le tiers du rayon ou par $\frac{7}{3}$, le produit eſt $1437 + \frac{1}{3}$ pieds cubes, ſolidité demandée. On trouveroit un produit plus exact en ſe ſervant du rapport de *Métius*.

126. PROBLEME. *Trouver la ſolidité d'un corps fort irrégulier, tel que le caillou* p (fig. 107). Ayant mis ce corps *p* dans un vaſe cylindrique ou priſmatique *a b f*, verſez dans ce vaſe de l'eau ou du ſable bien fin, ayant ſoin de rendre ſa ſurface parallele à celle du vaſe, juſqu'à ce que le corps *p* en ſoit entiérement couvert. Marquez en *c d* la hauteur du ſable ou de l'eau, ôtez enſuite le corps *p* du vaſe, le ſable reſtant remplira l'eſpace *m f g n*. Donc l'eſpace *m c d n* ſera l'eſpace qu'occupoit le corps *p*; or il eſt aiſé de meſurer cet eſpace en multipliant ſa hauteur *c m* par la baſe du vaſe; donc il eſt aiſé de meſurer la ſolidité du corps *p* *.

## *De la Trigonométrie.*

127. *La Trigonométrie* eſt l'art de réſoudre ce Problême : *Trois de ces cinq choſes, deux angles*

* Il peut y avoir une petite erreur à cauſe du ſable qui peut s'attacher au caillou, ou de l'eau qui peut s'attacher à ſa ſurface ou s'introduire dans les pores du caillou; mais c'eſt trop peu de choſe pour y avoir égard.

*& trois côtés d'un triangle étant données, trouver les deux autres.*

Soit un angle quelconque *a c b* (fig. 108), décrivez du ſommet *c* avec un rayon à volonté un cercle *a h p g*, prolongez *a c* juſqu'en *p*, & élevez en *c* la ligne *c h* perpendiculaire ſur *a c*. Il eſt évident que l'arc *h b* eſt complément de l'arc *b a* *; de même l'angle *h c b* meſuré par cet arc eſt complément de l'angle *b c a* meſuré par l'arc *b a*. L'angle *b c p* eſt ſupplément de l'angle *b c a* & réciproquement; il en eſt de même des arcs qui meſurent ces angles.

Le *ſinus* d'un arc *b a* eſt une ligne *b d* abaiſſée d'une des extrêmités *b* de cet arc perpendiculairement ſur le rayon *c a* qui paſſe par l'autre extrêmité du même arc; *b d* eſt auſſi le *ſinus* de l'angle *b c a* meſuré par cet arc. La perpendiculaire *a n* élevée à l'extrêmité *a* d'un des des rayons *c a* juſqu'à la rencontre du rayon *c b* prolongé s'appelle la *tangente* de ce même arc *b a* ou de l'angle *b c a* meſuré par cet arc. La droite *c n* compriſe entre le centre *c* ou le ſommet de l'angle & la rencontre de la tangente ſe nomme la *ſécante* de l'arc *b a* ou de l'angle *b c a*. On appelle *ſinus-verſe* d'un arc *a b*, la partie *d a* du rayon compriſe entre le ſinus *b d* (qu'on appelle auſſi *ſinus droit*) & l'arc *a b*. La perpendiculaire *b i*, ſinus de l'arc *b h*, laquelle eſt = *c d*, ſe nomme le *ſinus du complément* ou le *co-ſinus* de l'arc *b a* ou de l'angle *b c a*; *i h* ſinus verſe de *h b* complément

* Le complément d'un angle aigu eſt la différence de cet angle avec un angle droit, de même le complément d'un arc $< 90°$ eſt la différence de cet arc avec 90°. Le ſupplément d'un angle ou d'un arc eſt ce qui manque à cet angle ou à cet arc pour valoir 180°.

de *b a*, s'appelle le *co-ſinus verſe* de *b a*. Il eſt évident que *h m* eſt la tangente de l'arc *h b*, ou de l'angle *h c b*, complément de *b c a* : on l'appelle la *co-tangente* de l'angle *b c a* ou de l'arc *b a* qui en eſt la meſure. La *ſécante c m* de *h b* eſt appellée la *co-ſécante* de *b a* ou de l'angle *b c a*. Nous ferons le ſinus = *ſin.*, le rayon = *r*, le co-ſinus = *co-ſin.*, la tangente = *tang.*, la co-tangente = *co-tang.*, la ſécante = *séc.*, la co-ſécante = *co-séc.*, le ſinus verſe = *ſin. v.*, le co-ſinus verſe = *co-ſin. v.* ; de ſorte que pour dire le ſinus d'un arc *a*, nous dirons *ſin. a*, &c.

128. Il ſuit de ce que nous venons de dire, que le ſinus, le co-ſinus, la tangente & la co-tangente d'un angle obtus *b c p* ſont égaux reſpectivement au ſinus, co-ſinus, tangente & co-tangente de l'angle aigu *b c a*, qui eſt ſon ſupplément ; car *b d* étant une perpendiculaire abaiſſée de l'extrêmité *b* de l'arc *b h p* ſur le rayon *p c* (prolongé) qui paſſe par l'autre extrêmité *p* du même arc, eſt évidemment le ſinus de l'arc *b h p* auſſi-bien que de l'arc *b a*. De même la tangente de l'arc *b h p* eſt évidemment *p o* (127) ; mais *p o* = *a n* : car les triangles rectangles *n a c*, *p c o* ſont ſemblables, à cauſe des angles droits *n a c*, *c p o*, & de *p c o* = *b c a*. D'ailleurs ils ont les côtés *c p* & *c a* égaux, & les angles ſur ces mêmes côtés égaux ; donc ils ſont égaux, & *p o* eſt = *n a*. Et parce que *h b* eſt complément de *b h p*, auſſi-bien que de *b a*, *d c* eſt le co-ſinus de *b h p*, auſſi-bien que de *b a* ; de même la co-tangente de *p h b*, comme celle de *b a*, eſt = *h m* *.

* *p o* étant dirigée dans un ſens oppoſé à *a n* eſt négative. Mais nous ne faiſons ici attention qu'à la grandeur & non au ſigne des lignes *p o*, *h m*, &c.

129. Si l'on prolonge $bd$ juſqu'à la rencontre de la circonférence en $g$, à cauſe de $bg$ perpendiculaire ſur $ca$, $bd$ ſera $= gd$ (20), & par conſéquent $ba = ag$; donc le ſinus d'un arc $ba$ eſt la moitié d'une corde $bg$ qui ſoutend un arc double de $ba$. Or le diametre eſt la plus grande des cordes; donc le plus grand des ſinus eſt égal au rayon $hc$, ſinus de l'arc $ha$, moitié de la demi-circonférence $hax$. Ce ſinus eſt appellé *ſinus total*, parce qu'il eſt le plus grand des ſinus; de ſorte que les ſinus croiſſent à meſure que les arcs $ab$ augmentent depuis o juſqu'à 90°, après quoi ils vont en diminuant juſqu'à 180°, où le ſinus eſt o.

130. Il ſuit de ce que nous venons de dire, que le ſinus de 30° eſt égal à la moitié du rayon. Car ſi l'arc $bag$, eſt ſuppoſé de 60°, la corde $bg$ ſera égale au rayon, & le ſinus $bd$ de l'arc $ba$ de 30° ſera $= \frac{bg}{2} = \frac{r}{2}$.

Plus l'arc $ba$ ſera grand, plus la tangente $an$ & la ſécante $cn$ croîtront, cela eſt évident : car lorſque le point $b$ s'éloigne de $a$, il eſt viſible que le point $n$ doit auſſi s'éloigner de $a$, c'eſt-à-dire que $an$ doit augmenter; mais $an$ ne peut croître à moins que $cn$ ne croiſſe. De plus $an$ & $cn$ deviendront infinies lorſque le point $b$ tombera ſur $h$ : car $nc$ tombera alors ſur $hc$, & par conſéquent ſera parallele à la ligne $an$; donc ces droites ne pourront ſe rencontrer quelques prolongées qu'elles ſoient, c'eſt pourquoi on les regarde alors comme infinies.

A cauſe des paralleles $bd$ & $hc$ on aura $bi = cd$, c'eſt-à-dire que le co-ſinus d'un arc $ba$ eſt égal à la partie du rayon compriſe entre le centre & le

ſinus du même arc; & parce que $da = ca - cd$, il eſt viſible que le ſinus verſe $da$ d'un arc $ab < 90°$ eſt égal à la différence du rayon & du co-ſinus du même arc. Mais $dp$, ſinus verſe du ſupplément $bhp$, eſt égal à $pd = pc + cd$; c'eſt-à-dire, que le ſinus verſe d'un arc plus grand que 90° eſt égal à la ſomme du rayon & du co-ſinus de ſon ſupplément $ab$. Connoiſſant donc le co-ſinus, on aura facilement le ſinus verſe.

131. THÉOREME. *La tangente de 45° eſt égale au rayon.* Soit ſuppoſé l'arc $ab$ de 45°, à cauſe de l'angle droit $can$, l'angle $cna$ complément de l'angle $nca$ ſera de 45°, parce que l'angle $nca$ eſt ſuppoſé de 45°; donc le triangle $nac$ ſera iſocelle, & $na = ca = r$; donc, &c.

132. THÉOREME. *L'on a toujours les proportions ſuivantes.* 1°. *Le rayon eſt au co-ſinus d'un arc ou d'un angle, comme la tangente de cet arc ou de cet angle eſt à ſon ſinus, ou* r : co-ſin. :: tang. : ſin. Car les triangles $cdb$, $can$ ſont ſemblables à cauſe des paralleles $bd$ & $an$; donc $ca : cd :: an : bd$, ou *r : co-ſin. :: tang. : ſin.* 2°. *r : ſin. :: co-tang. : co-ſin*; car les triangles ſemblables $hcm$, $icb$ donnent $r\,(hc) : ic = db = ſin.$ :: $hm$ (co-tang. de $ab$) : $ib$ (co-ſin. de $ba$), ou *r : ſin. :: co-tang. : co-ſin.* 3°. *Tang. : r :: r : co-tang.*; car les triangles $hcm$, $nca$ ont un angle droit, le premier en $h$, le ſecond en $a$; de plus l'angle $m$ de l'un eſt égal à l'angle $bcd$ de l'autre, ces deux angles étant alternes-internes à cauſe des paralleles $ca$, $hm$: ainſi ces deux triangles ſont ſemblables; & partant $na : ca :: hc : hm$, ou *tang. : r :: r : co-tang.* $= \frac{rr}{tang.}$.

133. COROLLAIRE I. Donc on a 1°. $\textit{sin.} = \frac{\textit{tang.} \times \textit{co-sin.}}{r}$; 2°. $\textit{co-sin.} = \frac{\textit{co-tang.} \times \textit{sin.}}{r}$; 3°. $\textit{tang.} = \frac{r^2}{\textit{co-tang.}}$. * 4°. En supposant $r = 1$, la premiere équation donne $\textit{sin.} = \textit{tang.} \times \textit{co-sin.}$, ou $\textit{tang.} = \frac{\textit{sin.}}{\textit{co-sin.}}$. 5°. De la seconde équation on tire aisément $\textit{co-tang.} = \frac{\textit{co-sin.}}{\textit{sin.}} = \frac{1}{\textit{tang.}}$, parce que la troisiéme formule donne $\textit{co-tang.} = \frac{r^2}{\textit{tang.}} = \frac{1}{\textit{tang.}}$. 6°. De $\textit{co-tang.} = \frac{1}{\textit{tang.}}$, l'on tire co-tang. $a \times$ tang. $a = 1 =$ co-tang. $b \times$ tang. $b$ ($a$ & $b$ désignent des arcs ou des angles). Si dans la quatriéme formule on substitue la valeur $\frac{1}{\textit{co-tang.}}$ de $\textit{tang.}$,

* Lorsque l'arc dont on veut avoir la tangente devient un quart de cercle, sa co-tangente $= 0$, & alors tang. $= \frac{rr}{0} = \infty$, en considérant 0 comme une quantité infiniment petite; d'ailleurs dans ce cas la tangente est infinie, comme on l'a dit ci-dessus n°. 130, parce qu'avant que la sécante & la tangente soient devenues paralleles, ces lignes se sont rencontrées sous un angle infiniment petit; donc alors elles étoient infinies, & comme on suppose que ces lignes n'ont pas diminué en devenant paralleles, on les regarde encore comme infinies; & elles ne doivent pas être regardées comme infinies précisément, parce qu'elles sont paralleles : car deux lignes paralleles sont deux lignes indéterminées qui ne peuvent véritablement jamais se rencontrer, mais qui ne sont pas plutôt infinies que finies.

l'on aura, en multipliant par *co-ſin.*, la formule $ſin. = \frac{co\text{-}ſin.}{co\text{-}tang.}$. Subſtituant dans la ſeconde formule $\frac{1}{tang.}$ à la place de *co-tang.* (en ſuppoſant toujours $r = 1$) on a $co\text{-}ſin. = \frac{ſin.}{tang.}$.

134. COROLLAIRE II. Il ſuit de la troiſiéme formule du Corollaire précédent, c'eſt-à-dire, de l'équation $tang. = \frac{r^2}{co\text{-}tang.}$, que ſi l'on a deux arcs *a* & *b*, l'on aura tang. *a* : tang. *b* :: $\frac{r^2}{\text{co-tang. } a}$ : $\frac{r^2}{\text{co-tang. } b}$, ou (parce que les fractions qui ont même numérateur, ſont en raiſon inverſe des dénominateurs) tang. *a* : tang. *b* :: co-tang. *b* : co-tang. *a*, c'eſt-à-dire que les tangentes ſont en raiſon inverſe des co-tangentes. La même choſe peut ſe démontrer encore de cette maniere : par le Théorême précédent, *tang.* : *r* :: *r* : *co-tang.* ; donc tang. *a* × co-tang. $a = r^2$, & tang. *b* × co-tang. $b = r^2$ ; donc tang. *a* × co-tang. *a* = tang. *b* × co-tang. *b* ; donc tang. *a* : tang. *b* :: co-tang. *b* : co-tang. *a*.

135. PROBLEME. *Etant donné le ſinus* a f *d'un arc* a m, *trouver le ſinus d'un arc double* a m b (fig. 109). Menons *b d* perpendiculaire ſur *c a*, & du point *c* la perpendiculaire *c m* ſur le milieu *f* de la corde *b a*. Puiſque *a f* eſt connue, ſon double *a b* le ſera auſſi or les triangles *c f a*, *b d a*, ayant un angle commun en *a*, & de plus chacun un angle droit, ſont ſemblables ; donc *c a* : *c f* :: *b a* : *b d* ou *r* : *co-ſin.* de l'arc donné :: 2 *ſin.* du même arc : *ſin.* de l'arc double.

REMARQUE I. Nous avons ſuppoſé le co-ſinus $cf$ donné, parce que le ſinus $af$ étant connu il eſt viſible par la propriété du triangle rectangle $cfa$, que $cf = \sqrt{[(ca)^2 - (fa)^2]}$, ou $co\text{-}ſin. = \sqrt{[r^2 - (ſin.)^2]}$, & réciproquement on voit que $ſin. = \sqrt{[r^2 - (co\text{-}ſin.)^2]}$; c'eſt-à-dire que pour avoir le co-ſinus, lorſqu'on connoît le ſinus, il faut du quarré du rayon ſouſtraire le quarré du ſinus & prendre la racine du reſte, & pour avoir le ſinus quand on connoît le co-ſinus, il faut retrancher le quarré du co-ſinus du quarré du rayon & prendre la racine du reſte.

REMARQUE II. Si l'on vouloit avoir le ſinus de l'arc ſimple $am$, étant donné le ſinus & le co-ſinus de l'arc double $ab$, on remarqueroit que $(ba)^2 = (bd)^2 + (da)^2$, par la propriété du triangle rectangle, ou $(ba)^2 = ſin.^2 a + (ſin.v.)^2 a$, en ſuppoſant l'arc double $= a$; donc $ba = \sqrt{[(ſin.)^2 a + (ſin.v.)^2 a]}$, & $af = \frac{ba}{2} = ſinus$ de l'arc ſimple $= \frac{1}{2}\sqrt{[ſin.^2 a + (ſin.v.)^2 a]}$; or connoiſſant le ſinus, on connoîtra facilement le co-ſinus auſſi-bien que le ſinus verſe $da$ qui eſt ici $= ca - cd$. Voyez le n° 130.

136. PROBLEME, *Connoiſſant les ſinus de deux arcs* $dl$, $al$ *trouver les ſinus de leur ſomme ou de leur différence* (fig. 111.). Soit l'arc $dl = b$, l'arc $al = a$. Il eſt évident que $dq$ eſt le ſinus de l'arc $abd$, ſomme de ces deux arcs; & ſi l'on prend $lb = dl$, $bx$ ſinus de $al - bl$, ou de $al - dl$ ſera le ſinus de la différence. Puiſqu'on connoît le ſinus de $a$ & de $b$, on connoît auſſi leur co-ſinus (135). Des points $d$, $b$, $b$ ayant abaiſſé des perpendiculaires ſur $cq$, du point $b$ la perpendiculaire $bp$

ſur $d\,q$, du point $o$ milieu de la corde $d\,b$ les perpendiculaires $o\,g$, $o\,m$, & tiré la ligne $c\,o$ qui, paſſant par le centre & le milieu de la corde $d\,b$, eſt néceſſairement perpendiculaire à cette corde (20); à cauſe des paralleles $p\,b$, $g\,o$ les lignes $d\,p$, $d\,b$ ſeront diviſées proportionnellement en $g$ & en $o$; or $d\,b$ eſt diviſée en deux également en $o$: donc $d\,p$ eſt auſſi diviſée en deux également en $g$, & $d\,g = g\,p$. Mais les triangles ſemblables $c\,l\,n$, $c\,o\,m$ donnent $c\,l : c\,o :: l\,n : o\,m$, ou $r$ : co-ſin. $b$ :: ſin. $a$ : $o\,m = \frac{\text{ſin. } a \times \text{co-ſin. } b}{r}$. Les triangles $c\,l\,n$, $d\,g\,o$ ayant (par conſtruction) tous leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre ſont ſemblables (49); donc $c\,l : c\,n :: d\,o : g\,d$, ou $r$ : co-ſin. $a$ :: ſin. $b$ : $g\,d = \frac{\text{ſin. } b \times \text{co-ſin. } a}{r}$. Mais $d\,q = o\,m + d\,g = q\,g + g\,d$, & $b\,x = g\,q - p\,g = q\,g - d\,g$; donc $d\,q$ ou ſin. $(a + b) = \frac{\text{ſin. } a \times \text{co-ſin. } b + \text{ſin. } b \times \text{co-ſin. } a}{r}$, & $b\,x$ ou ſin. $(a - b) = \frac{\text{ſin. } a \times \text{co-ſin. } b - \text{ſin. } b \times \text{co-ſin. } a}{r}$. C'eſt-à-dire, *le ſinus de la ſomme de deux arcs* a & b (*nous ſuppoſons* a *plus grand que* b) *eſt égal au produit du ſinus de* a *par le co-ſinus de* b, *plus le produit du ſinus de* b *par le co-ſinus de* a, *le tout diviſé par le rayon; & le ſinus de la différence de ces mêmes arcs eſt égal au produit du ſinus de* a *par le co-ſinus de* b, *moins le produit du ſinus de* b *par le co-ſinus de* a, *le tout diviſé par le rayon.*

137. PROBLEME. *Connoiſſant les co-ſinus de deux arcs* a & b, *trouver le co-ſinus* c q *de leur ſomme, & le co-ſinus* c x *de leur différence.* A cauſe des paral-

leles $d\,q$, $o\,m$, $b\,x$, il eſt viſible que les lignes $d\,b$, $q\,x$ ſont diviſées proportionnellement en $o$ & en $m$, mais la ligne $d\,b$ eſt diviſée en deux également en $o$; donc $q\,x$ eſt auſſi diviſée en deux également en $m$. Cela poſé, les triangles ſemblables $c\,l\,n$, $c\,o\,m$ donnent $c\,l : c\,o :: c\,n : c\,m$, ou $r$ : co-ſin. $b$ :: co-ſin. $a$ : $c\,m = \frac{\text{co-ſin.}\,a \times \text{co-ſin.}\,b}{r}$. Les triangles ſemblables $c\,l\,n$, $d\,g\,l$ donnent $c\,l : l\,n :: d\,o : g\,o = q\,m = m\,x$, ou $r$ : ſin. $a$ :: ſin. $b$ : $q\,m = \frac{\text{ſin.}\,a \times \text{ſin.}\,b}{r}$; donc $c\,q = c\,m - q\,m = \frac{\text{co-ſin.}\,a \times \text{co ſin.}\,b - \text{ſin.}\,a \times \text{ſin.}\,b}{r}$, & $c\,x = cm + m\,x = \frac{\text{co-ſin.}\,a \times \text{co-ſin.}\,b + \text{ſin.}\,a \times \text{ſin.}\,b}{r}$. C'eſt-à-dire le co-ſinus de la ſomme de deux arcs eſt égal au produit des co-ſinus de ces arcs moins le produit de leurs ſinus, & le co-ſinus de la différence des deux arcs eſt égal au produit des co-ſinus de ces arcs, plus le produit de leurs ſinus, le tout diviſé par le rayon.

138. THEOREME. *La ſomme des ſinus de deux arcs* a d = a, a b = b (fig. 112) *eſt à la différence de ces mêmes ſinus, comme la tangente de la moitié de la ſomme de ces arcs eſt à la tangente de la moitié de leur différence : ou ſin.* a + *ſin.* b : *ſin.* a − *ſin.* b :: *tang.* $\frac{(a+b)}{2}$ : *tang.* $\frac{(a-b)}{2}$, nous ſuppoſons $a > b$. Ayant tiré le diamétre $d\,g$, prenez $d\,q = a\,d$, menez la corde $d\,q$ qui ſera néceſſairement perpendiculaire ſur $a\,g$. Par le point $b$ tirez $b\,m$ parallele à $g\,a$, & par conſéquent perpendiculaire ſur $d\,q$; du point $m$ menez les cordes $m\,d$, $m\,q$, & d'un rayon $m\,c$ égal à ce-

lui du cercle $adgmq$, décrivez l'arc $xc$ qui rencontre $bm$ en $c$, & par le point $c$ tirez la ligne $ncp$ perpendiculaire à $bm$ ; les lignes $nc$, $cp$ ſeront les tangentes des angles $dmb$, $bmq$ ( qui ayant leur ſommet à la circonférence du cercle, ont pour meſure la moitié des arcs $db$ & $bq$ compris entre leurs côtés ). Or $db = ad - ab = a - b$, & $bq = ba + aq = ad + ba = a + b$ ; donc ces angles ( que je déſignerai par les valeurs des arcs qui les meſurent ) ſont, le premier $= \frac{a-b}{2}$, & le ſecond $= \frac{a+b}{2}$ ; donc $nc =$ tang. $\frac{(a-b)}{2}$, & $cp =$ tang. $\frac{(a+b)}{2}$. De plus $oq = oi + iq = bh + di$ eſt la ſomme des ſinus des arcs $a$ & $b$, & $do = di - oi$ eſt leur différence. Mais à cauſe des paralleles $dq$, $np$ les triangles $moq$, $mcp$ ſont ſemblables, auſſi bien que les triangles $mdo$, $mnc$, & les premiers donnent $oq : cp :: mo : mc$, tandis que les derniers donnent $do : nc :: mo : mc$ ; donc $oq : cp :: do : nc$, ou, *alternando*, $oq : do :: cp : nc$, ou ſin. $a$ + ſin. $b$ : ſin. $a$ — ſin. $b$ :: tang. $\frac{(a+b)}{2}$ : tang. $\frac{(a-b)}{2}$.

COROLLAIRE. Donc on a auſſi co-ſin. $a$ + co-ſin. $b$ : co-ſin. $a$ — co-ſin. $b$ :: co-tang. $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ : tang. $\left(\frac{a-b}{2}\right)$. Car les co-ſinus ſont les ſinus des complémens ; donc par le Théorême la ſomme des ſinus des complémens eſt à leur différence comme la tangente de la moitié de la ſomme des complémens à la tangente de la moitié de la différence de ces complémens

Mais la moitié de la ſomme des complémens des deux arcs, eſt le complément de la moitié de la ſomme de ces arcs, & la demi-différence des complémens eſt égale à la demi-différence de ces arcs. Donc, &c.

Il eſt facile maintenant de trouver tous les ſinus. Le ſinus de 30° étant donné (130), on trouvera facilement celui de 15° (135), enſuite celui de $7° \frac{1}{2}$, puis celui de $3° \frac{1}{4}$, & ainſi de ſuite en allant par les moitiés juſqu'à la douzieme opération qui donne le ſinus de $52'' \; 44''' \; 3'''' \frac{1}{4}$. Et parce que les ſinus des arcs fort petits ſe confondent avec ces arcs & leur ſont proportionnels, on fera comme cet arc eſt à ſon ſinus, ainſi l'arc d'une minute eſt à ſon ſinus. Ayant le ſinus d'une minute on trouvera facilement celui de 2′ (135). Suppoſant enſuite l'arc de $1' = b$, celui de $2' = a$, on trouvera (136) celui de 3′. Faiſant enſuite celui-ci = $a$ & celui de $1' = b$, on aura de même celui de 4′, & ainſi de ſuite juſqu'à 30°. Ayant le ſinus de 30° pour avoir celui d'un arc plus grand, *par exemple*, celui de 35°, on fera $a = 30°$, & $b = 5°$. Pour avoir celui de 30° 1′, on fera $a = 30°$ & $b = 1'$, & ainſi de ſuite juſqu'à 60°. Ayant le ſinus de 60° pour avoir le ſinus d'un arc plus grand, *par exemple* celui de 62°, on fera $a = 60°$, $b = 2°$, & ainſi de ſuite juſqu'à 90°. A l'égard des arcs plus grands que 90°, comme leurs ſinus ſont les mêmes que ceux de leurs ſupplémens, on n'aura aucune peine à les trouver : ainſi les ſinus de 100° ſera le même que celui de 80°. A l'égard des co-ſinus il eſt aiſé de les avoir dès que l'on connoît les ſinus ; puiſque le co-ſinus eſt égal à la racine quarrée de la différence du quarré du rayon au quarré du ſinus

(135). A l'égard des tangentes, les triangles rectangles ſemblables $cdb$, $can$ (*fig.* 108) donnent $cd : db :: ca : an$, ou co-ſin. : ſin. :: $r$ : tang. Donc connoiſſant le ſinus & le co-ſinus d'un arc, on trouvera aiſément la tangente de cet arc. On aura auſſi facilement la co-tangente par la proportion tang. $r$ :: $r$ : co-tang. Suppoſant le rayon de 10000000000 parties égales, le ſinus de 30° ſera de 5000000000 de ces mêmes parties, on trouvera en ſuite, par ce que nous venons de dire, les nombres qui déſignent les ſinus, les co-ſinus & les tangentes des arcs plus grands ou plus petits que 30°. A l'égard des logarithmes de ces mêmes ſinus qu'on trouve dans les tables, ayant trouvé les nombres qui déſignent les ſinus, on a cherché leurs logarithmes qu'on a mis à la place de ces ſinus dans les tables dont on ſe ſert maintenant, de ſorte qu'à préſent on ne fait guere uſage que des logarithmes tant des ſinus que des co-ſinus, tangentes & co-tangentes.

Si l'on veut avoir la ſécante par le moyen du co-ſinus & du rayon, on remarquera que les triangles ſemblables $bcd$, $nca$ donnent (en faiſant l'angle $bca = a$) co-ſin. $a : bc = r :: ca = r : cn =$ ſéc. $a = \frac{rr}{\text{co-ſin. } a}$. On voit auſſi que $cn =$ ſéc. $a = \sqrt{[rr + (\text{tang.})^2 a]}$ & $cm =$ co-ſéc. $a = \sqrt{[rr + (\text{co-tang.})^2 a]}$.

Remarque I. Le ſinus d'un arc $ah$ de 90° eſt égal au rayon; mais ſon co-ſinus eſt = 0: car le co-ſinus $cd$ ou $bi$ devient 0 lorſque l'arc $bh$ devient 0, c'eſt-à-dire, lorſque l'arc $ab$ devient $ah$.

REMARQUE II. Pour avoir la corde d'un arc donné, cherchez le ſinus de la moitié de cet arc; le double ſera la corde cherchée. *Par exemple*, pour avoir la corde d'un arc de 40°, cherchez dans les tables le ſinus de l'arc de 20°, le double de ce ſinus ſera la corde cherchée; mais cette corde appartiendra à un cercle, dont le rayon ſera celui des tables. Pour avoir la corde de 40° dans un cercle donné, faites cette regle de trois. Le rayon des tables eſt au rayon du cercle donné comme la corde trouvée eſt à la corde demandée. Cette regle eſt fondée ſur ce que dans deux cercles, les cordes de deux arcs ſemblables ſont entr'elles comme les rayons de ces cercles.

139. THÉOREME. *Etant donné un angle, que j'appellerai* a, *l'on a la proportion, le ſinus de l'angle* a *eſt à la ſomme du rayon & du co-ſinus du même angle, comme la tangente de la moitié de l'angle* a *eſt au rayon.* Soit l'angle ACP (fig. 110) = $a$, l'angle inſcrit ABP ſera la moitié de $a$, & menant par le centre C de l'arc AP, la ligne CN parallele à BP, l'angle NCA = PBA ſera = $\frac{a}{2}$, & AN ſera = tang. $\frac{a}{2}$. Mais les triangles rectangles ſemblables BPD, NCA donnent PD : DB :: NA : CA, ou ſin. $a$ : $r$ + co-ſin. $a$ :: tang. $\frac{a}{2}$ : $r$. Donc $r$ + co-ſin. $a = \frac{r \text{ ſin. } a}{\text{tang. } \frac{a}{2}}$.

REMARQUE. Parce que l'angle APD eſt meſuré par la moitié de l'arc AF, & que AF eſt = AP dont la moitié meſure l'angle NCA, il eſt viſible que les triangles rectangles NAC, PDA ſont ſemblables. Donc PD : AD :: CA : AN, c'eſt-à-dire, ſin. $a$ : $r$ — co-ſin. $a$ :: $r$ : tang. $\frac{a}{2}$. Ainſi $r$ — co-ſin. $a = \frac{\text{ſin. } a}{r} \cdot \text{tang. } \frac{a}{2}$; & $\frac{r - \text{co-ſin. } a}{r + \text{co-ſin. } a} = \frac{(\text{tang.})^2 \frac{a}{2}}{rr}$. Donc

$rr \cdot \left(\frac{r - \text{co fin. } a}{r + \text{co-fin. } a}\right) = (tang.)^2 \frac{1}{2} a$ : mais $(co\text{-}tang.)^2 = \frac{r4}{(tang.)^2}$; donc $(co\text{-}tang.)^2 \frac{1}{2} a = rr \cdot \left(\frac{r + \text{co-fin. } a}{r - \text{co-fin. } a}\right)$.

Nous venons de voir que l'on a la proportion fin. $a : r +$ co-fin. $a ::$ tang. $\frac{a}{2} : r$: mais tang. $\frac{a}{2} : r :: r :$ co-tang. $\frac{a}{2}$; ainsi fin. $a : r +$ co-fin. $a :: r :$ co-tang. $\frac{a}{2}$. Maintenant si l'on fait le quart du cercle $= n$, l'on aura co-tang. $\frac{a}{2} =$ tang. $\left(n - \frac{a}{2}\right) =$ tang. $\left(\frac{n}{2} + \frac{n - a}{2}\right) =$ tang. $\left(\frac{n+p}{2}\right)$, en faisant $n - a = p$. Mais alors fin. $a =$ co-fin. $p$, & fin. $p =$ co-fin. $a$; donc la proportion fin. $a : r +$ co-fin. $a ::$ $r :$ co-tang. $\frac{a}{2}$ deviendra co-fin. $p : r +$ fin. $p :: r :$ tang. $\left(\frac{n+p}{2}\right)$. De plus l'on a encore fin. $a : r -$ co-fin. $a$ $:: r :$ tang. $\frac{a}{2} ::$ co-tang. $\frac{a}{2} : r$; donc à cause de co-tang. $\frac{a}{2}$ $=$ tang. $\left(n - \frac{a}{2}\right) =$ tang. $\left(\frac{n}{2} + \frac{n - a}{2}\right) =$ tang. $\left(\frac{n+p}{2}\right)$, de fin. $a =$ co-fin. $p$ & de fin. $p =$ co-fin. $a$, l'on aura co-fin. $p : r -$ fin. $p ::$ tang. $\left(\frac{n+p}{2}\right) : r$. Donc $r +$ fin. $p = \frac{\text{co-fin. } p \cdot \text{tang.} \left(\frac{n+p}{2}\right)}{r}$, $r -$ fin. $p =$ $\frac{\text{co-fin. } p \cdot r}{\text{tang.} \left(\frac{n+p}{2}\right)}$, $\frac{r + \text{fin. } p}{r - \text{fin. } p} = \frac{(tang.)^2 \left(\frac{n+p}{2}\right)}{rr}$; & enfin $\frac{rr \cdot (r + \text{fin. } p)}{r - \text{fin. } p} = (tang.)^2 \left(\frac{n+p}{2}\right)$.

## *De la réſolution des Triangles.*

140. Avant de paſſer à la réſolution des triangles, nous allons donner une idée du *Graphometre*, qui eſt un inſtrument d'un grand uſage (fig. 113). C'eſt un demi-cercle *abd*, armé de pinnules ou de deux lunettes *; l'une de ces lunettes repréſentée par *a d* eſt fixe & dans le ſens du diametre du demi-cercle, l'autre qu'on peut concevoir repréſentée par *f g* (qu'on nomme *alidade*) eſt mobile autour du centre *c* du demi-cercle. La circonférence de l'inſtrument eſt graduée. On ſe ſert du Graphometre pour meſurer les angles. *Par exemple*, pour connoître l'angle *h c o*, ayant fixé l'inſtrument en enfonçant ſon pied dans la terre ou d'une autre maniere, dirigez le diametre *a d* vers le point o, ayant ſoin de diſpoſer le plan de l'inſtrument de maniere qu'il ſe confonde avec le plan de l'angle *h c o*, tournez enſuite l'alidade *f g* juſqu'à ce que vous apperceviez l'objet *h* au travers des pinnules *f* & *g*. Suppoſons que l'alidade réponde alors à la diviſion marquée 30, l'angle *h c o* ſera meſuré par l'arc de 30°, c'eſt-à-dire que cet angle ſera de 30°. Venons maintenant à la réſolution des triangles rectangles **; pour cela nous avons beſoin des Théorêmes ſuivans.

141. THÉOREME. *Le rayon des tables eſt au*

* On ſe ſert le plus ſouvent de pinnules au lieu de lunettes. Les pinnules ſont des plaques de métal fendues verticalement pour donner paſſage au rayon viſuel. La fig. 113 repréſente un graphometre à pinnules & non à lunettes.

** Réſoudre un triangle, c'eſt trouver les côtés & les angles de ce triangle : c'eſt du moins dans ce ſens que nous prenons cette expreſſion.

*ſinus*

*ſinus d'un des angles aigus, comme l'hypothénuſe eſt au côté oppoſé à cet angle* (fig. 114). Soit le triangle rectangle *cap*, & ſuppoſons que *cd* repréſente le rayon des tables; du point *c*, comme centre, ayant décrit les arcs *dg* & *ab*, la perpendiculaire *df* ſera le ſinus des tables de l'angle *dcf* ou *acp*. Or à cauſe des paralleles *ap*, *df*, les triangles *acp*, *dcf* ſont ſemblables & donnent *cd* : *df* :: *ca* : *ap*, ou *r* : ſin. *acp* :: *ca* (*hypothénuſe* du triangle *acp*) : *ap*, côté oppoſé à l'angle *c*. On prouvera de même que *r* : ſin. *cap* :: *ca* : *cp*; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc dans tout triangle rectangle *acp* l'on a cette proportion, le rayon eſt au co-ſinus d'un angle aigu, comme l'hypothénuſe eſt au côté adjacent à cet angle. Car l'angle *cap* étant complément de l'angle *acp*, ſon ſinus eſt le co-ſinus de *acp*; or nous venons de voir que *r* : ſin. *cap* :: *ca* : *cp*; donc *r* : co-ſin. *acp* :: *ca* : *cp*; donc, &c.

142. THÉOREME. *Le rayon des tables eſt à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle eſt au côté oppoſé à ce même angle* (fig. 115). Si l'on ſuppoſe que la partie *cf* du côté *cb* du triangle rectangle *acb* repréſente le rayon des tables; ayant élevé la perpendiculaire *df* juſqu'à la rencontre de l'hypothénuſe, *fd* ſera la tangente des tables par rapport à l'angle *c* : mais les triangles ſemblables *cdf*, *cba* donnent *cf* : *df* :: *cb* : *ab*, ou *r* : tang. *c* :: *cb* : *ab*; donc; &c.

On prouvera de la même maniere que *r* : tang. *a* :: *ab* : *cb*, ou que *ab* : *cb* :: *r* : tang. *a*.

La réſolution des triangles rectangles ſe réduit à 4 cas. En effet, parce que l'angle droit eſt une choſe connue, & que les deux autres angles ſont complémens l'un de l'autre, il ſuffit dans un triangle rectangle de connoître deux choſes différentes de l'angle droit pourvu que parmi ces deux choſes il y ait au moins un côté, pour pouvoir réſoudre le triangle comme nous allons le voir. Maintenant ou les deux choſes connues ſont un des angles aigus & un côté de l'angle droit, ou un angle aigu & l'hypothénuſe, ou un côté de l'angle droit avec l'hypothénuſe, ou enfin les deux côtés de l'angle droit; & ces quatre cas trouveront toujours leur ſolution dans une des analogies des Théorêmes ci-deſſus.

143. PROBLEME I. *Trouver la hauteur d'une tour* p h *en ſuppoſant ſon pied* p *acceſſible* (fig. 116.) On s'éloignera de cet édifice à une diſtance *c o*, telle que l'angle *h c o*, compris entre les lignes qu'on imaginera menées du point *c* au ſommet & au pied de la tour, ne ſoit ni trop aigu ni fort approchant de 90° *, on fixera le centre du Graphometre en *c*, on meſurera la diſtance *c o* par le moyen d'une toiſe, d'une corde, &c. diſpoſant l'inſtrument de maniere que le diametre *a d* dirigé vers le point *o* ſoit horiſontal; ce qui ſe fait à l'aide d'un poids ſuſpendu par un fil attaché au centre: ce fil doit alors raſer le bord de l'inſtrument & répondre à 90°. Ayant obſervé le nombre

* Quand l'angle *c* eſt fort aigu ou approchant de 90°, une petite erreur dans l'angle en cauſe une grande ſur la diſtance: l'erreur ſera d'autant moins conſidérable que l'angle *c* approchera plus d'être = 45°.

des degrés de l'angle $acf = hco$, parce qu'ils ſont oppoſés au ſommet, l'on fera attention que la hauteur $hp$ de l'édifice étant perpendiculaire à l'horiſon eſt auſſi perpendiculaire à la ligne horiſontale $co$; de ſorte que le triangle $hco$ eſt rectangle en $o$ : mais dans ce triangle nous connoiſſons l'angle $c$ & le côté $co$; donc pour avoir la hauteur $ho$, on fera (142) $r$ : tang. $hco$ :: $co$ : $ho$, hauteur cherchée à laquelle on ajoutera $op$, pour avoir la hauteur totale.

REMARQUE. On peut donc réſoudre un triangle rectangle lorſqu'on connoît un des côtés & un angle aigu : car ayant un des côtés on trouvera l'autre par le dernier Théorême, parce que l'on connoîtra néceſſairement l'autre angle aigu, complément du premier; mais on connoîtra l'hypothénuſe par l'avant dernier Théorême.

144. PROBLEME II. *Dans un triangle* acb *rectangle en* b, *connoiſſant deux côtés* ab, bc, *on propoſe de trouver les angles aigus* (fig. 115). Faites le côté $cb$ : $ab$ :: $r$ : tang. $acb$. Cette tangente étant cherchée dans les tables, fera connoître l'angle cherché. Cette analogie eſt la même que celle du dernier Théorême; on a mis ſeulement la premiere raiſon à la place de la ſeconde & réciproquement.

REMARQUE. L'angle $c$ étant connu, ſon complément $cab$ ſera auſſi connu. De plus, par l'avant dernier Théorême l'on aura $r$ : ſin. $c$ :: $ca$ : $ab$, ou ſin. $c$ : $r$ :: $ab$ : $ca$ (hypothénuſe).

145. PROBLEME III. *L'hypothénuſe* ac *& le côté* ab *étant donnés, trouver les angles aigus.*

Faites l'hypothénuſe *ac* : au côté *ab* :: *r* : ſin. *bca*. Cette analogie eſt la même que celle de l'avant-dernier Théorême, en mettant la premiere raiſon à la place de la ſeconde & réciproquement. L'angle *c* étant connu, ſon complément *a* le ſera auſſi.

146. PROBLEME IV. *Etant donné un côté* cb, *& un des angles aigus, trouver l'autre côté.* Soit ſuppoſé l'angle *a* connu, ſon complément *c* le ſera auſſi, & parce qu'on connoît un des côtés, *par exemple*, le côté *cb*, on pourra faire cette analogie. Le rayon des tables eſt à la tangente de l'angle *c*, comme le côté *cb* au côté *ab*.

REMARQUE. Connoiſſant les angles aigus & les côtés, on trouvera facilement l'hypothénuſe par l'avant dernier Théorême.

147. PROBLEME V. *Etant donné un des angles aigus & l'hypothénuſe, trouver le côté oppoſé à cet angle.* Faites, le rayon eſt à l'hypothénuſe comme le ſinus de l'angle connu eſt au côté oppoſé. Et parce qu'un des angles aigus étant connu, l'autre angle eſt néceſſairement connu, on trouvera de même le côté qui lui eſt oppoſé. Voilà la ſolution des quatre cas.

*De la réſolution des Triangles obliquangles.*

148. THÉOREME I. *Dans tout triangle* abd *inſcrit au cercle*, ce qui eſt toujours poſſible (voyez le n°. 33), *les côtés ſont entre eux comme les ſinus des angles qui leur ſont oppoſés* (fig. 117). La moitié de la corde *ab* ou du côté *ab* eſt le ſinus de l'angle *adb*, moitié de l'angle *acb*, parce que l'angle *d* a pour meſure la moitié

de l'arc *a b*, c'eſt-à-dire, l'arc *a x* dont le ſinus eſt *a o* moitié de *a b*. De même la moitié du côté *a d* ſera le ſinus de l'angle *b*, & la moitié du côté *d b*, celui de l'angle *a*. Or les moitiés ſont comme les tous; donc les côtés d'un triangle quelconque *a b d* ſont entr'eux comme les ſinus des angles qui leur ſont oppoſés.

149. PROBLEME. *Etant donné un côté* a b *& les deux angles formés ſur ce côté, trouver un des autres côtés* g, *par exemple.* Parce que les deux angles *a* & *b* étant donnés, l'angle *d* eſt connu (puiſque les trois angles d'un triangle valent deux angles droits), on fera ſin. *d* : *a b* :: ſin. *a* : *g*. En faiſant ſin. *d* : *a b* :: ſin. *b* : *f*, on connoîtra l'autre côté *f* = *a d*.

150. PROBLEME. *Meſurer la largeur* a p *d'une riviere* (fig. 118). Sur le bord *a b* meſurez une baſe *a b* à-peu-près égale à la largeur cherchée *, & ſuppoſant que *p* eſt un objet remarquable, ſitué ſur l'autre bord de la riviere, comme un arbre, par exemple; meſurez avec le graphometre les angles *p a b*, *p b a*, ce qui vous fera auſſi connoître l'angle *p*. Faites enſuite ſin. *p* : *a b* :: ſin. *b* : *a p* largeur de la riviere.

151. THÉOREME II. : *Dans tout triangle ſcalène* b c a (fig. 119) *ſi du plus grand angle* c *on abaiſſe une perpendiculaire ſur le plus grand côté b a, le plus grand côté ſera à la ſomme des deux*

* Afin que l'erreur de l'angle obſervé, ſoit en a, influe moins dans l'erreur qu'on peut commettre ſur la diſtance. De plus il eſt viſible que pour avoir la largeur, il faut que *a p* ſoit perpendiculaire au lit de la riviere.

*autres, comme la différence de ces deux côtés est à la différence des ſegmens* a p, b p *faits par la perpendiculaire* p c. Du point *c* comme centre, avec le rayon *c b* égal au plus petit côté, décrivez un cercle, & prolongez *a c* juſqu'à la rencontre de la circonférence en *g*. A cauſe des deux rayons *g c* & *b c*, *a g* ſera $= ac + bc$, & parce que $bp = pd$ (20), $ap - bp$ ſera $= ap - pd = da$ différence des deux ſegmens *a p*, *b p*. De plus $af = ac - cf = ac - cb$ eſt la différence des côtés *a c* & *c b*. Mais *g a* & *b a* ſont deux ſécantes extérieures dont les parties hors du cercle ſont réciproquement proportionnelles aux ſécantes entieres (56); donc $ab : ag = ac + bc :: af : ad$; donc, &c.

152. THÉOREME III. *Dans tout triangle ſcalène* a b d (fig. 120) *la ſomme des deux côtés quelconques* a d, b d *eſt à leur différence comme la tangente de la demi-ſomme des angles* a & b *oppoſés à ces côtés, eſt à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.* Selon ce que nous avons démontré ci-deſſus (138) la ſomme des ſinus des deux angles *a* & *b* d'un triangle *a b d* eſt à la différence de ces mêmes ſinus comme $\text{tang.}\left(\frac{a+b}{2}\right) : \text{tang.}\left(\frac{a-b}{2}\right)$; or les côtés oppoſés aux angles *a* & *b* ſont dans le rapport de leur ſinus (148); donc la ſomme des côtés oppoſés aux angles *a* & *b* eſt à la différence de ces mêmes côtés comme la tangente de la demi-ſomme des angles *a* & *b*, eſt à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

Ces trois Théorêmes ſuffiſent pour réſoudre un

triangle quelconque dans lequel ſont données trois de ces cinq choſes, 2 angles & 3 côtés. Il y a quatre cas; où l'on connoît deux angles & le côté compris entre ces deux angles, ce cas a déja été réſolu (149); ou l'on connoît deux côtés & l'angle compris; ou l'on connoît les trois côtés; ou enfin l'on connoît deux côtés & un angle oppoſé à l'un de ces côtés. Mais il faut obſerver dans ce dernier cas qu'on trouve un ſinus qui peut également appartenir à un angle aigu ou à un angle obtus qui ſeroit ſon ſupplément. *Par exemple*, dans le triangle *a b c* (fig. 121), connoiſſant les côtés *a b*, *ac*, ſi du point *a* comme centre avec le rayon *a b*, on décrit l'arc *b d*, le côté *a d* ſera égal au côté *a b*, & les triangles *d a c*, *c a b* auront deux côtés égaux & le même angle *c* oppoſé à ces côtés égaux; donc on ne pourra déterminer l'angle *b*, à moins qu'on ne connoiſſe l'eſpece de cet angle, c'eſt-à-dire, s'il eſt aigu ou obtus: car ſi cet angle eſt aigu, le côté *a b* ſera ſitué ſur le côté *a d*, c'eſt-à-dire, à la gauche de la perpendiculaire *a p*; mais il ſera ſitué à la droite ſi cet angle eſt obtus. C'eſt pourquoi dans ce cas l'on a beſoin de connoître l'eſpece de l'angle oppoſé à l'autre côté connu.

153. PROBLEME. *Connoiſſant les côtés* g *&* f *& l'angle* a *oppoſé au côté* g, *connoiſſant de plus l'eſpece de l'angle* b, *réſoudre le triangle* a d b (fig. 117). Faites (Théorême I.) *d b* : ſin. *a* :: *a d* : ſin. *b*. Dans cette proportion les trois premiers termes ſont connus, puiſque l'angle *a* étant connu, ſon ſinus l'eſt auſſi par les tables; donc le ſinus de l'angle *b* ſera connu. Ce ſinus peut appartenir à un angle aigu ou à un angle obtus qui

ſeroit ſon ſupplément : mais comme on connoît l'eſpece de l'angle *b*, il ne peut y avoir aucune difficulté. Ce ſinus étant cherché dans les tables, on trouvera la valeur de l'angle cherché ; mais ſi l'angle *b* étoit obtus, on prendroit le ſupplément de cet angle. L'angle *a* & l'angle *b* étant connus, l'angle *d* le ſera, & l'on connoîtra le côté *a b* en faiſant ſin. *a* : ſin. *d* :: *d b* : *a b*.

154. PROBLEME. *Connoiſſant les trois côtés* a b, c a, c b *d'un triangle ſcalène* (fig. 119), *trouver les angles*. De l'angle *c* oppoſé au plus grand côté, abaiſſez la perpendiculaire *c p* ſur ce plus grand côté & faites (Théorême II) le grand côté eſt à la ſomme des deux autres, comme la différence *a f* de ces deux côtés, eſt à la différence *a d* des ſegmens faits par la perpendiculaire *c p*. Du grand côté *b a* ôtant cette différence *d a*, il reſtera *d b* dont la moitié *b p* eſt le petit ſegment, qui étant retranché de *b a*, il reſtera *p a* grand ſegment. Cela poſé dans le triangle rectangle *b p c*, on connoît l'hypothénuſe *b c* & un côté *b p* ; donc (145) on connoîtra l'angle *b*. De même dans le triangle rectangle *p c a*, on connoît le côté *p a* & l'hypothénuſe *a c* ; donc on aura facilement l'angle *a*. Connoiſſant les angles *b* & *a*, on connoîtra facilement l'angle *c*.

155. REMARQUE. Nous avons ſuppoſé que *b p* étoit la moitié de *b d*, ce qui eſt évident, puiſqu'une perpendiculaire *c p*, abaiſſée du centre d'un cercle ſur une corde, coupe cette corde en deux parties égales (20). Mais le triangle *b c d* eſt iſocelle ou équilatéral. Car les rayons *b c* & *c d* ſont égaux, & de plus ſi *b d* eſt égal à *b c*, il eſt viſible que les trois côtés ſeront égaux. Donc ſi du

ſommet d'un angle quelconque d'un triangle équilatéral, ou ſi du ſommet de l'angle compris entre les deux côtés égaux d'un triangle iſocelle, on abaiſſe une perpendiculaire ſur le côté oppoſé, ce côté ſera diviſé en deux également.

156. PROBLEME. *Dans un triangle ſcalène* a b d (fig. 120) *connoiſſant deux côtés* a b, b d *& l'angle* b *compris entre ces côtés, réſoudre ce triangle.* Cherchez un des angles oppoſés aux côtés connus, en faiſant (152) $bd + ab : bd - ab ::$ tang. $\left(\frac{a+d}{2}\right)$ : tang. $\left(\frac{a-d}{2}\right)$, le quatriéme terme de cette proportion dont les trois premiers termes ſont connus, fera connoître la tangente de la demi-différence des angles $a$ & $d$, dont la ſomme eſt $180° - b$ (parce que la ſomme de deux angles d'un triangle eſt le ſupplément du troiſiéme angle, à cauſe que les trois angles d'un triangle valent deux angles droits). Cette tangente étant cherchée dans les tables, fera connoître un angle qui, ajouté à la demi-ſomme des angles $a$ & $d$, donnera le plus grand angle cherché $a$ (car un plus grand angle eſt oppoſé à un plus grand côté), & qui retranché de cette demi-ſomme, donnera le plus petit angle $d$ (voyez le calcul, n° 66. Problême I.).

157. PROBLEME. *Meſurer la hauteur* f a *d'une tour dont le pied eſt ſuppoſé inacceſſible* (fig. 122). Ayant meſuré dans la campagne une baſe $b\,n$, je poſe le graphometre au point de ſtation $b$, & dirigeant la lunette fixe dans la ligne horiſontale $d\,c$ & la lunette mobile vers $a$, je prends l'angle $a\,d\,c$. Portant enſuite l'inſtrument à l'autre point de ſtation, je prends l'angle $a\,m\,c$ ſupplément de l'angle

*a m d*. Je connoîtrai donc l'angle *d a m* avec les angles *d* & *m*, & le côté *d m* du triangle *d a m*; donc je trouverai facilement le côté *a d*, en disant ſin. *a* : *d m* :: ſin. *a m d* : *a d*. Connoiſſant *a d*, je ferai (141) *r* : *a d* :: ſin. *d* : *a c**. Joignant au côté *a c* la hauteur *c f* = *d b*, hauteur du graphometre, j'aurai *a f* hauteur cherchée. (Il s'agit ici de la hauteur de la tour au-deſſus du niveau de la campagne qu'on ſuppoſe être une plaine). En opérant par les logarithmes, j'aurai L · *a c* = L · *a d* + L · ſin. *d* — L · *r*.

158. PROBLEME. *Meſurer la diſtance de deux lieux inacceſſibles* a & b (fig. 123). Prenez deux points de ſtation *c* & *d*, du point *d* meſurez l'angle *a d c*, & du point *c* meſurez l'angle *a c d*. Alors dans le triangle *a c d* vous connoiſſez deux angles & le côté *c d* que je ſuppoſe avoir été meſuré; donc vous connoîtrez facilement le troiſiéme angle *a*, & les deux autres côtés (149) : ainſi vous connoîtrez *a d* & *a c*. Réſolvez de même le triangle *b c d* dans lequel vous pouvez meſurer les angles *c* & *d* ſitués ſur le côté connu *c d*, & vous trouverez facilement le côté *b c*. Mais dans le triangle *a c b* vous pouvez meſurer facilement l'angle *c* compris entre les côtés connus *a c*, *b c*; donc (156) vous pourrez facilement trouver un des autres angles du même triangle, l'angle *c b a*, *par exemple*, ce qui fera connoître le troiſiéme angle. Cela poſé dans le triangle *a c b*, on connoîtra facilement le côté *a b* cherché, en faiſant (148) ſin. *a b c* : *a c* ::

* Cette analogie eſt la même que celle du numéro cité, en faiſant changer de place aux moyens.

ſin. $acb : ab$, diſtance cherchée ; ou $L \cdot ab = L \cdot ac + L \cdot \text{ſin. } acb - L \cdot \text{ſin. } abc$. *Par exemple*, ſuppoſant qu'on ait trouvé le côté $ac$ de 120 toiſes, le côté $cb$ de 142 toiſes & l'angle $acb$ de 48°. Pour avoir les angles $cab$, $cba$ & le côté $ab$, je retranche 48° de 180°, il me reſte 132° pour la ſomme des angles $cab$, $cba$, & par conſéquent 66° pour leur demi-ſomme. Je fais (156) $142^t + 120^t = 262^t : 142^t - 120^t = 22^t :: \text{tang. } 66° : \text{tang.}\left(\frac{cab - cba}{2}\right)$. En opérant par les logarithmes,

| | |
|---|---|
| Log. 22 | 1.342422 |
| Log. tang. 66° | 10.351417 |
| Somme | 11.693839 |
| Log. 262 | 2.418301 |
| Reſte | 9.275538. |

c'eſt-à-dire, de la ſomme des logarithmes des moyens, retranchant le logarithme de l'extrême connu, le reſte 9.275538 donne le logarithme de l'extrême cherché. Ce logarithme dans les tables eſt fort approchant de celui de 10°. 41′. * ajoutant cette quantité à la demi-ſomme des angles ci-deſſus, j'aurai le plus grand angle $cab$ de 76°. 41′, & par conſéquent l'angle $abc$ de 55°. 19′. Enfin pour avoir le côté $ab$, je fais cette proportion arithmétique log. ſin. $acb$. log. $ac$ : log. ſin. $acb$. log. $ab$, & je trouve le côté cherché $ab$ de $108^t$. 4 à-peu-près.

* Il y a une petite erreur, puiſque l'on ne prend qu'un angle approché, mais elle eſt peu conſidérable.

159. PROBLEME. *Mesurer* 1°. *la hauteur* a b, 2°. *la pente* a d *d'une montagne inaccessible* d a b (fig. 124). Ayant mesuré la base $gf$, je mesure les angles $agf$, $afg$ (supplément de $afb$), ce qui me fait connoître l'angle $gaf$. Dans le triangle $gaf$ je connois les angles & un côté $gf$; donc je connoîtrai facilement les côtés $af$, $ag$. Dans le triangle $agb$ rectangle en $b$ (puisque la ligne $ab$ hauteur de la montagne est perpendiculaire sur la ligne horisontale $gfb$), je connois l'angle $g$ & l'hypothénuse; donc je trouverai facilement le côté $ab$, en disant (141) $r : ga :: \sin. g : ab$, ou L. $r$ + L. $ga$ : L. sin. $g$ + L. $ab$. Maintenant prenant un point $p$ tel qu'ayant mesuré l'angle $dfp$, je puisse appercevoir de ce point le pied $d$ de la montagne, je mesure le côté $fp$ & l'angle $fpd$; donc dans le triangle $dfp$, je connois un côté $fp$, les deux angles qui comprennent ce côté, & par conséquent le troisiéme angle; donc je connoîtrai facilement le côté $fd$. Cela posé dans le triangle $agd$ je connois le côté $ag$, le côté $gd = gf + fd$ & l'angle $g$ compris entre ces côtés; donc je trouverai facilement le côté $ad$ (156) c'est-à-dire la pente de la montagne.

160. PROBLEME. *Lever une carte géographique* (fig. 125). Prenez une base $ab$ qui ne soit pas moindre que la dixiéme ou huitiéme partie de la distance des deux objets les plus éloignés qu'on veut représenter sur la carte *. Ayant mesuré $ab$ prenez

* L'erreur sera d'autant plus petite que la distance des deux objets les plus éloignés différera moins de la base $ab$. De plus nous supposons les objets situés sur un plan horisontal, & l'erreur sera d'autant plus petite que ces objets appro-

avec le graphométre la grandeur des angles *d a b*, *c a b*, *n a b*, *m a b*, *x a b*. Tranſportez-vous enſuite de *a* en *b*, & meſurez les angles *n b a*, *c b a*, *d b a*, *x b a*, *m b a*. Comme l'angle *h b a* ſeroit trop obtus, prenez *b n* pour baſe & meſurez les angles *h n b*, *h b n*. Cela fait, ſuppoſons que *a b* ſoit de 800$^t$, prenez une ligne à diſcrétion pour en faire une échelle de 100 parties égales, Ce qu'on peut faire en portant une petite ouverture de compas dix fois ſur une ligne arbitraire *p q*, ouvrant enſuite le compas de maniere que les deux pointes ſoient dix fois plus éloignées. Portez cette nouvelle ouverture neuf fois ſur la même ligne à compter depuis la dixiéme diviſion, & vous aurez l'échelle *p q* de 100 parties. Suppoſant maintenant que chaque diviſion de l'échelle vaille 20 toiſes, tirez ſur le papier une ligne *a b* qui doit être de quarante parties de l'échelle, faites en *a* & en *b* les angles *d a b*, *c a b*, &c. *n b a*, *c b a*, &c. tels que vous les avez trouvés dans l'opération; & tirant les lignes *c a*, *c b*, &c. ces lignes détermineront par leur rencontre la poſition du point *c*, &c. Faiſant enſuite ſur *n b* les angles *h n b*, *h b n*, de la grandeur trouvée, vous aurez la poſition de l'objet *h*. Il eſt viſible que les objets *d*, *c*, *n*, *h*, &c. ſeront placés ſur le papier comme ils le ſont ſur le terrein *; ainſi le Problême ſera réſolu. Pour con-

cheront plus d'être ſitués dans un tel plan. Dans nos Inſtitutions Mathématiques nous avons enſeigné la méthode de placer ſur une carte les points qui ſont au-deſſus ou au-deſſous de l'horiſon, de meſurer un terrein, de lever les plans, &c.

* On ſuppoſe que ces objets ſont ſitués ſur un plan horiſontal. Si cela n'étoit pas, on pourroit néanmoins repré-

noître la distance du point *n* au point *h*, *par exemple*, ouvrez le compas de *n* en *h*, & portant cette ouverture sur l'échelle, supposons qu'elle contienne 18 divisions $\frac{1}{4}$, puisque nous avons supposé chaque division de 20$^t$, la distance de ces points sera de 375$^t$.

161. PROBLEME. *Trouver le rapport approché du diametre à la circonférence d'un cercle* (fig. 126). Inscrivez dans ce cercle un polygone régulier de 48 côtés, circonscrivez au même cercle un pareil polygone, ce qui est facile; car divisant 360 par 48, le quotient 7 $\frac{1}{2}$ qui est le quart de 30, fait connoître l'angle au centre d'un tel polygone. Or (132) il est facile de trouver le sinus de l'angle de 30 degrés, & ensuite celui de sa moitié 15° puis celui de, $7\frac{1^\circ}{2}$ moitié de ce dernier (135). Supposant donc l'arc *g d* de 7 degrés 30′ (on a fait l'arc *g d* plus grand qu'il ne devroit être afin d'éviter la confusion), *g d* sera le côté du polygone inscrit, *p b* celui du polygone circonscrit. Tirant par le milieu de cet arc le rayon *o* C, *d x* sera le sinus & *o b* la tangente de 3° 45′; or en supposant le rayon = 10000000, le sinus *d x* de 3° 45′ est = 654031, & la tangente du même arc est = 655435; donc *g d* = 2 *g x* = 1308062, & *b p* = 2 *b o* = 1310870. Multipliant *g d* & *b p* par 48, le périmetre du polygone inscrit sera 62786976, & celui du polygone circonscrit sera = 62921760. L'arc *g o d* étant plus grand que sa corde *g d*, & plus petit que *p b*, on peut le considérer (*) sans une grande erreur comme moyen arithmétique entre ces deux lignes, & considérer de même la circonférence comme moyenne arithmétique entre les périmetres dont nous venons de parler; c'est pourquoi prenant la demi-somme des périmetres trouvés, on aura la circonférence du cercle à-peu-près = 62854368. Mais le rayon étant = 10000000, le dia-

---

senter la situation respective de ces objets ou lever la carte en employant la méthode dont nous avons parlé dans la seconde édition de nos Institutions.

* Parce que le polygone régulier circonscrit étant plus grand que le cercle, chaque côté d'un tel polygone est plus grand que l'arc correspondant.

mètre ſera = 20000000 ; ainſi le diametre eſt à la circonférence à-peu-près comme 20000000 : 62854368, ou comme 200 : 628 · 54368 (en diviſant par 100000), ou comme 200 : 628 (en négligeant la fraction décimale), ou comme 100 : 314 à-peu près (en diviſant ces deux derniers nombres par 2), ce qui donne un des rapports dont nous avons déja parlé (79).

162. PROBLEME. *Connoiſſant les trois côtés* a, b, c *d'un triangle ſcalene* a b d (fig. 127), *trouver l'aire de ce triangle.* Cherchez par la méthode ci-deſſus (154) les angles *a*, *b*, *c* & le ſegment *a p* du triangle propoſé. Cela poſé, dans le triangle *a b p*, rectangle en *p*, on connoîtra l'hypothénuſe *a b*, l'angle *a* & le côté *a p*; donc on trouvera facilement le côté *b p*, c'eſt-à-dire, la valeur de la perpendiculaire abaiſſée de l'angle *b* ſur le côté oppoſé *a d*. Multipliant la baſe *a d* par la moitié de la hauteur *b p*, l'on aura la ſurface du triangle propoſé.

D'une autre maniere. Soit $bp = y$ & $ap = x$, par la propriété du triangle rectangle $abp$, on a $x^2 + y^2 = b^2$. De même le triangle rectangle $bpd$ donne, en faiſant attention que $pd = a - x$, $y^2 + a^2 - 2ax + x^2 = c^2$. Retranchant cette équation de la premiere, il vient $2ax - a^2 = b^2 - c^2$, ou (en tranſpoſant) $2ax = a^2 + b^2 - c^2$, d'où je tire $x = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a} = \frac{(b+c)\cdot(b-c)}{2a} + \frac{a}{2}$; c'eſt-à-dire que pour avoir $x$ il faut trouver une quatriéme proportionnelle aux lignes $2a$, $b+c$, $b-c$, & lui ajouter $\frac{a}{2}$. Dès qu'on aura trouvé $x = ap$, on retranchera le quarré de $x$ du quarré de l'hypothénuſe $b$, prenant la racine du reſte, on aura $y = bp$, dont la moitié étant multipliée par $a$, donnera l'aire du triangle propoſé.

163. PROBLEME. *Trouver l'angle* a *du même triangle* a b d, *ſans avoir recours à la méthode ci-deſſus* (154). Du point *a* comme centre avec le rayon $ab = b$ décrivez l'arc *b g*, tirez la corde *b g*, & du point *a* le rayon *a o* par le milieu de cette corde. Cela poſé $ab$ eſt $= ag$ par la propriété du cercle, & *p g*

$= ag - ap = b - x$. mais le triangle rectangle $bpg$ donne $y^2 + b^2 - 2bx + x^2 = p^2$ (en ſuppoſant l'hypothénuſe $bg = p$) ou, en ſubſtituant $b^2$ à la place de $y^2 + x^2$, $2b^2 - 2bx = p^2$, ou $p^2 = 2b(b - x)$. Mettant pour $x$ ſa valeur trouvée dans le problême précédent, on a $p^2 = 2b \times \left(b + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a}\right) = 2b \cdot \left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)$; or $2ab - a^2 - b^2 = -(b - a)^2$; donc $p^2 = 2b \times \left(\frac{c^2 - (b-a)^2}{2a}\right) = \frac{2b}{2a}[c^2 - (b-a)^2] = \frac{b}{a}[c^2 - (b-a)^2]$. Faiſant $b - a = n$, on aura $p^2 = \frac{b}{a} \times (c^2 - n^2) = \frac{b}{a} \times (c+n) \times (c-n)$, & remettant la valeur de $n$, on a $p^2 = \frac{b}{a} \times (c + b - a) \cdot (c + a - b) = \frac{b}{a} \times (c + b + a - 2a) \cdot (c + a + b - 2b)$; donc appellant $2m$ la ſomme des trois côtés, on aura $p^2 = \frac{b}{a} \times (2m - 2a) \cdot (2m - 2b) = \frac{4b}{a}(m - a) \cdot (m - b)$. Mais dans le triangle rectangle $aog$, on a $ag = ab = b : og :: r : \text{ſin. } oag$, ou $b : \frac{p}{2} :: r : \text{ſin. } gao$; donc $\frac{p}{2} = \frac{b \cdot \text{ſin. } gao}{r}$, ou $p = \frac{2b}{r}\text{ſin. } gao$, & $p^2 = \frac{4b^2}{r^2} \cdot \text{ſin.}^2 gao$. Egalant les deux valeurs de $p^2$, on a $\frac{4b}{a}(m - a) \cdot (m - b) = \frac{4b}{r^2}\text{ſin.}^2 gao$, diviſant par $4b$ & faiſant diſparoître les dénominateurs, il vient $r^2(m-a) \cdot (m-b) = a \cdot b(\text{ſin. } gao)^2$, d'où l'on tire $a \cdot b : (m-a) \cdot (m-b) :: r^2 : (\text{ſin. } gao)^2$. C'eſt-à-dire, le produit des deux côtés $a$ & $b$ qui comprennent l'angle cherché $bad$, eſt au produit des différences de la demi-ſomme $m$ des trois côtés : à chacun des côtés de cet angle, comme le quarré du rayon au quarré du ſinus de la moitié de cet

cet angle. Prenant la racine du quatriéme terme de cette proportion l'on aura le ſinus de la moitié de l'angle $a$, ce qui fera connoître la moitié de cet angle par le moyen des tables; connoiſſant la moitié, on connoîtra l'angle entier. On s'y prendra de même pour connoître un autre angle quelconque.

164. PROBLEME. *Connoiſſans les trois côtés du même triangle trouver ſa ſurface indépendamment de la méthode ci-deſſus* (162). Nous avons déja trouvé (162) $x^2 + y^2 = b^2$; d'où l'on tire $y^2 = b^2 - x^2 = (b+x)\cdot(b-x)$, & en mettant pour $x$ ſa valeur $\frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}$, on a $y^2 = \left(b + \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}\right) \times \left(b + \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2a}\right) = \left(\frac{2ab + b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right) \times \left(\frac{2ab - b^2 - a^2 + c^2}{2a}\right) = \left(\frac{(b+a)^2 - c^2}{2a}\right) \times \left(\frac{c^2 - (b-a)^2}{2a}\right) = \left(\frac{(a+b+c) \times (a+b-c)}{2a}\right) \times \left(\frac{(c+b-a) \times (c-b+a)}{2a}\right)$; donc en ôtant la fraction, $4a^2y^2 = (a+b+c) \times (a+b-c) \times (b+c-a) \times (c+a-b)$ *, ou $4a^2y^2 = (a+b+c) \times (a+b+c-2c) \cdot (a+b+c-2a) \cdot (a+b+c-2b)$. Donc ſuppoſant la ſomme des trois côtés $= 2p$, on aura $4a^2y^2 = (2p) \cdot (2p-2c) \cdot (2p-2a) \cdot (2p-2b) = 16p \times (p-c) \cdot (p-a) \cdot (p-b)$; donc en diviſant par 16, l'on aura $\frac{a^2}{4}y^2 = p(p-c)(p-a)(p-b)$, & prenant la racine quarrée, il vient $\frac{a}{2}y = \sqrt{[p(p-c) \cdot (p-a) \cdot (p-b)]}$. Mais $\frac{ay}{2}$ eſt le produit de la moitié de la baſe du triangle par ſa hauteur; donc $\frac{a}{2}y$ eſt l'aire du triangle. C'eſt pourquoi l'aire d'un triangle dont on connoît les trois côtés ſe trouve en retranchant de la demi-ſomme des trois côtés chacun des côtés du triangle, multipliant ces trois reſtes entr'eux & par la demi-ſomme, &

* $2a$ doit être multiplié par lui-même, parce qu'il ſe trouve dans deux facteurs du ſecond membre de l'équation précédente.

prenant la racine du produit. Soit, *par exemple*, le côté $ad = a = 5$ toiſes, $b = 4^t$, $c = 3^t$, $2p$ ſera $= 12^t$, $p = 6^t$, $p - c = 3^t$, $p - a = 1^t$, $p - b = 2^t$; donc $\sqrt{[p \cdot (p-c) \times (p-a) \cdot (p-b)]} = \sqrt{(6 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2)} = \sqrt{(36)} = 6$, c'eſt-à-dire que l'aire de ce triangle ſera de 6 toiſes quarrées.

165. PROBLEME. *Etant donnés les côtés d'un triangle* abd, *connoître ſi un angle cherché eſt aigu ou obtus.* L'équation $2ax - a^2 = b^2 - c^2$ (162) devient en tranſpoſant, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$; c'eſt-à-dire, que le quarré d'un côté $c$ oppoſé à un angle aigu $a$ vaut moins que la ſomme des quarrés des deux autres côtés. Mais dans la figure 128, $ap$ étant toujours la diſtance $x$ de l'angle cherché à la perpendiculaire abaiſſée du ſommet de l'angle $b$ ſur la baſe $ad$ prolongée s'il le faut, $dp$ ſera $= x + a$; mais le triangle rectangle $abp$ donne $(bp)^2 + (ap)^2 = (ab)^2$, ou $y^2 + x^2 = b^2$, & le triangle rectangle $bpd$ donne $y^2 + a^2 + 2ax + x^2 = c^2$ (parce qu'ici $dp = a + x$). Retranchant la premiere équation de la ſeconde, l'on trouve $a^2 + 2ax = c^2 - b^2$, ou en tranſpoſant, $c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$. Mais (dans la fig. 128) le côté $c$ eſt oppoſé à un angle obtus; donc le quarré d'un côté oppoſé à un angle obtus eſt plus grand que la ſomme des quarrés des deux autres côtés, au contraire le quarré d'un côté oppoſé à un angle aigu vaut moins que la ſomme des quarrés des deux autres côtés. Ainſi en ſuppoſant qu'on connoît les côtés d'un triangle, il eſt facile de s'aſſurer quel eſt l'angle obtus, ou même s'il y en a.

166. REMARQUE. Ce que nous avons dit ci-deſſus ſur la théorie des ſinus, co-ſinus, &c. ſuffit pour ceux qui veulent s'en tenir à ce qu'on appelle *Elémens de Mathématiques*, & ils peuvent s'arrêter ici. Mais qu'il nous ſoit permis d'approfondir un peu cette matiere en faveur des jeunes Géometres qui veulent aller plus loin.

167. Si l'arc $ab$ (fig. 108) eſt regardé comme poſitif, ſon ſinus $bd$ ſera poſitif auſſi-bien que ſon co-ſinus $cd$. Lorſque cet arc deviendra $= ha = 90°$, ſon ſinus ſera égal au rayon $= r$ & ſon co-ſinus $= 0$; cet arc devenant $ahu$ plus grand qu'un quart de cercle, aura ſon ſinus $uq$ tourné du

même côté, & par conſéquent poſitif; mais ſon co-ſinus $cq$ ſe trouvant de l'autre côté du centre dans une ſituation oppoſée à $cd$ co-ſinus de $ab$, ſera négatif; & enfin il deviendra $= -r$, lorſque l'arc $ba$ deviendra égal à la demi-circonférence $ahp = 2m$, en faiſant le quart de cercle $ah = m$; au contraire ſon ſinus deviendra $= 0$. Si l'arc devient $ahz > 2m$, mais plus petit que $3m$, ſon ſinus $qz$ & ſon co-ſinus $cq$ ſeront négatifs; puiſque ces lignes ſont dans une ſituation oppoſée à celle des lignes $bd$, $cd$. Si l'arc dont nous parlons & que nous déſignerons par $a$ devient $= 3m = 270°$, ſon co-ſinus deviendra $= 0$, & ſon ſinus $= -r$. en ſuppoſant $a$ plus grand que $3m$, mais moindre que $4m = 360°$, ſon ſinus $dg$ ſera négatif & ſon co-ſinus $cd$ poſitif. Si $a = 4m = 360°$, ſon ſinus ſera $= 0$ & ſon co-ſinus $= r$, ſi $a$ devient plus grand que $4m$, *par exemple*, $= 4m + ab$, mais moindre que $5m$, ſon ſinus $bd$ ſera poſitif auſſi-bien que ſon co-ſinus; de ſorte qu'en ajoutant une ou même pluſieurs circonférences à un arc, cela ne change rien à ſon ſinus, ou à ſon co-ſinus. En prenant $a$ pour l'origine de l'arc $ab$ poſitif, l'arc $ag$ ſera négatif, mais ſon co-ſinus ſera poſitif ſi cet arc eſt $< m$. Si cet arc $a$ négatif devient plus grand que $m$, mais moindre que $2m$, ſon ſinus & ſon co-ſinus ſeront tous les deux négatifs; ſi cet arc devient plus grand que $2m$ & moindre que $3m$, ſon ſinus deviendra poſitif, mais ſon co-ſinus reſtera négatif. Cet arc étant plus grand que $3m$, mais moindre que $4m$, ſon ſinus continuera d'être poſitif & ſon co-ſinus ſera auſſi poſitif. En général un arc poſitif, plus petit que $2m$, a toujours ſon ſinus poſitif; mais un arc poſitif plus

grand que $2m$ & plus petit que $4m$, a ſon ſinus negatif. Un arc poſitif $a$, plus petit que $m$, a toujours ſon co-ſinus poſitif; il l'a négatif lorſque cet arc eſt entre $m$ & $3m$, poſitif lorſqu'il eſt entre $3m$, $4m$ & $m$. A l'égard d'un arc $a$ négatif, ſon ſinus eſt négatif l'arc étant entre o & $2m$, & poſitif l'arc étant entre $2m$ & $4m$. Le co-ſinus eſt poſitif l'arc étant entre o & $m$, négatif entre $m$ & $3m$; mais il eſt poſitif ſi $a$ eſt entre $3m$ & $4m$. On ne change rien au ſinus, ni au co-ſinus en ajoutant à l'arc une ou pluſieurs circonférences entieres, ſoit avec le ſigne + ou avec le ſigne —. En ſuppoſant $r = 1$, on aura ſin. o = o, co-ſin. o = 1, ſin. $m = 1$, co-ſin. $m = 0$, ſin. $2m = 0$, co-ſin. $2m = -1$, ſin. $3m = -1$, co-ſin. $3m = 0$, ſin. $4m = 0$, co-ſin. $4m = 1$. Ainſi tous les ſinus & co-ſinus ſont renfermés entre + 1 & — 1. On a encore co-ſin. $a$ = ſin. $(m - a)$, ſin. $a$ = co-ſin. $(m - a)$, & parce que le triangle $cdb$ eſt rectangle en $d$, on a $(c\,d)^2 + (b\,d)^2 = (c\,b)^2$, ou (co-ſin. $a)^2$ + (ſin. $a)^2 = r^2 = 1$.

168. L'arc $a$ étant poſitif & moindre que $m$, ſa tangente $a\,n$ & ſa co-tangente $h\,m$ ſont poſitives. Mais ſi $a$ eſt plus grand que $m$ & moindre que $2m$, ſa co-tangente &, ſa tangente ſeront négatives. Car ſoit l'arc $a\,h\,u$, ſa tangente ſe trouvera ſur le prolongement de la ligne $a\,n$ qui paſſe par l'origine de l'arc $a$, & d'ailleurs elle doit être terminée par la rencontre du rayon $c\,u$ qui paſſe par l'autre extrémité du même arc; or $c\,u$ ne peut rencontrer $a\,n$, à moins de prolonger cette ligne juſqu'en $2q$. A l'égard de la co-tangente $h\,2p$, il eſt évident que ſa ſituation eſt oppoſée à $h\,m$ co-tangente de l'arc $a\,h$; donc, &c.

Si $a$ devient plus grand que $2m$, mais moindre que $3m$, ſa tangente & ſa co-tangente deviendront poſitives ; car $an$ eſt la tangente de l'arc $ahz$, & $hm$ ſa co-tangente. Si $a$ devient plus grand que $3m$ & moindre que $4m$, ſa tangente & ſa co-tangente deviendront négatives ; ainſi l'arc $ahxg$ aura pour tangente la ligne $a2q$, & pour co-tangente la ligne $h2p$. On peut voir par-là que l'origine de la co-tangente d'un arc doit être éloignée de 90° de l'origine de cet arc.

A un arc $ag$ négatif, répondra une tangente & une co-tangente négatives, ſi cet arc eſt plus petit que $m$ ; s'il eſt plus grand que $m$ & plus petit que $2m$, ſa tangente & ſa co-tangente ſont poſitives. Ainſi l'arc $ag$ a pour tangente $a2q$, & pour co-tangente $k2p$ ; mais l'arc $axz$ a pour tangente $an$ & pour co-tangente $hm$. Si cet arc devient $axu$ plus grand que $m$ & moindre que $3m$, ſa tangente & ſa co-tangente redeviendront négatives ; & enfin ces lignes ſeront poſitives lorſque cet arc $axhb$ ſera plus grand que $3m$ & moindre que $4m$.

169. COROLLAIRE. Donc un arc dont la tangente ſeroit poſitive & la co-tangente négative & réciproquement, eſt abſurde & imaginaire. C'eſt d'ailleurs ce qui ſuit de la formule tang. $a \times$ co-tang. $a = r^2$, car l'on a tang. $a = \frac{r^2}{\text{co-tang. } a}$ ; or $r^2$ eſt une quantité poſitive ; donc tang. $a \times$ co-tang. $a$ eſt auſſi une quantité poſitive ; ce qui ne peut être à moins que co-tang. $a$ & tang. $a$ ne ſoient toutes deux poſitives ou toutes deux négatives. Donc ſi co-tang. $a$ eſt poſitive, l'on aura

tang. $a = \frac{r^2}{\text{co-tang. } a}$ positive ; mais cette quantité ſera négative, ſi co-tang. $a$ eſt négative.

170. En ſuppoſant $r = 1$, l'on a 1°. ſin. $(a+b)$ * $=$ ſin. $a \cdot$ co-ſin. $b +$ co-ſin. $a \cdot$ ſin. $b$; 2°. co-ſin. $(a+b)$ $=$ co-ſin. $a \cdot$ co-ſin. $b -$ ſin. $a \cdot$ ſin. $b$ ; 3°. ſin. $(a-b)$ $=$ ſin. $a \cdot$ co-ſin. $b -$ ſin. $b$. co-ſin. $a$; 4°. co-ſin. $(a-b)$ $=$ co-ſin $a \cdot$ co-ſin. $b +$ ſin. $a \cdot$ ſin. $b$ ; 5°. tang. $a = \frac{\text{ſin. } a}{\text{co-ſin. } a}$ ; 6°. co-tang. $a = \frac{\text{co-ſin. } a}{\text{ſin. } a}$.

Cela poſé l'on aura tang. $(a+b) = \frac{\text{ſin. } a \cdot \text{co-ſin. } b + \text{ſin. } b \cdot \text{co-ſin. } a}{\text{co-ſin. } a \cdot \text{co-ſin. } b - \text{ſin. } a \cdot \text{ſin. } b}$, & diviſant le ſecond membre haut & bas par co-ſin. $a \cdot$ co-ſin. $b$, il vient tang. $(a+b) = \frac{\frac{\text{ſin. } a}{\text{co-ſin. } a} + \frac{\text{ſin. } b}{\text{co-ſin. } b}}{1 - \frac{\text{ſin. } a \cdot \text{ſin. } b}{\text{co-ſin. } a \cdot \text{co-ſin. } b}} = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \cdot \text{tang. } b}$. De même co-tang. $(a+b)$ $= \frac{\text{co-ſin. } (a+b)}{\text{ſin. } (a+b)} = \frac{\text{co-ſin. } a \cdot \text{co-ſin. } b - \text{ſin. } a \cdot \text{ſin. } b}{\text{ſin. } a \cdot \text{co-ſin. } b + \text{ſin. } b \cdot \text{co-ſin. } a}$ $= \frac{\frac{\text{co-ſin. } a}{\text{ſin. } a} - \frac{\text{ſin. } b}{\text{co-ſin. } b}}{1 + \frac{\text{ſin. } b \cdot \text{co-ſin. } a}{\text{co-ſin. } b \cdot \text{ſin. } a}}$ ( en diviſant haut & bas par ſin. $a \cdot$ co-ſin. $b$ ) $= \frac{\text{co-tang. } a - \text{tang. } b}{1 + \text{co-tang. } a \cdot \text{tang. } b}$. On trouvera par un calcul ſemblable tang. $(a-b) =$

* $a$ & $b$ déſignent des arcs ; nous ſuppoſons $a > b$.

$\frac{\text{sin.}(a+b)}{\text{co-sin.}(a-b)} = \frac{\text{tang.}\,a + \text{tang.}\,b}{1 + \text{tang.}\,a \cdot \text{tang.}\,b}$, & co-t. $(a+b) = \frac{\text{co-sin.}(a-b)}{\text{sin.}(a-b)} = \frac{\text{co-tang.}\,a + \text{tang.}\,b}{1 - \text{tang.}\,b \cdot \text{co-tang.}\,a}$.

En ajoutant enſemble les valeurs de ſin. $(a+b)$ & de ſin. $(a-b)$, & diviſant par 2 on aura ſin. $a \cdot$ co-ſin. $b = \frac{\text{sin.}(a+b) + \text{sin.}(a-b)}{2}$. En retranchant la valeur de ſin. $(a-b)$ de celle de ſin. $(a+b)$, & diviſant le réſultat par 2, il vient ſin. $b \cdot$ co-ſin. $a = \frac{\text{sin.}(a+b) - \text{sin.}(a-b)}{2}$. En ajoutant les valeurs de co-ſin. $(a-b)$, de co-ſin. $(a+b)$ & diviſant par 2, l'on a co-ſin. $a \cdot$ co-ſin. $b = \frac{\text{co-sin.}(a-b) + \text{co-sin.}(a+b)}{2}$. Retranchant la valeur de co-ſin. $(a+b)$ de celle de co-ſin. $(a-b)$, & diviſant enſuite par 2, l'on trouve cette quatrième formule ſin. $a \cdot$ ſin. $b = \frac{\text{co-sin.}(a-b) - \text{co-sin.}(a+b)}{2}$.

En faiſant $a+b=m$, $a-b=n$, l'on aura $(a+b)+(a-b)=2a=m+n$, ou $a=\frac{m+n}{2}$, & $(a+b)-(a-b)=2b=m-n$, ou $b=\frac{m-n}{2}$. Si dans les quatre dernieres formules qu'on vient de trouver, on ſubſtitue les valeurs de $a$ & de $b$, qu'on faſſe diſparoître le dénominateur, & que de plus on faſſe changer de place aux membres de chaque équation, l'on trouvera les 4 formules ſuivantes :

1°. $\text{sin. } m + \text{sin. } n = 2 \cdot \text{sin.}\left(\frac{m+n}{2}\right) \cdot \text{co-sin.}\left(\frac{m-n}{2}\right)$.

2°. $\text{sin. } m - \text{sin. } n = 2 \cdot \text{sin.}\left(\frac{m-n}{2}\right) \cdot \text{co-sin.}\left(\frac{m+n}{2}\right)$.

3°. $\text{cof. } n + \text{cof. } m = 2 \cdot \text{cof.}\left(\frac{m+n}{2}\right) \cdot \text{co-sin.}\left(\frac{m-n}{2}\right)$.

4°. $\text{cof. } n - \text{cof. } m = 2 \cdot \text{sin.}\left(\frac{m+n}{2}\right) \cdot \text{sin.}\left(\frac{m-n}{2}\right)$.

REMARQUE. Rien n'empêche de considérer $m$ & $n$ chacune comme un seul arc, & non comme la somme ou la différence de deux arcs. Si l'on fait $n = 0$, les deux dernieres formules donneront, à cause de co-sin. $0 = 1$, $1 + \text{co-sin. } m = 2 \cdot (\text{co-sin.})^2 \frac{1}{2} m$, & $1 - \text{co-sin. } m = 2 \cdot (\text{sin.})^2 \frac{1}{2} m$; donc $\frac{1 - \text{co-sin. } m}{1 + \text{co-sin. } m} = \frac{(\text{sin.})^2 \frac{1}{2} m}{(\text{co-sin.})^2 \frac{1}{2} m} = (\text{tang.})^2 \frac{1}{2} m$, & $\frac{1 + \text{co-sin. } m}{1 - \text{co-sin. } m} = (\text{co-tang.})^2 \frac{1}{2} m$.

171. PROBLEME. *Trouver les facteurs de la quantité* $a^2 + b^2$. Supposant $a^2 + b^2 = 0$, l'on aura $a^2 = -b^2$, $a = \pm \sqrt{(-b^2)} = \pm \sqrt{(-1 \times b^2)} = \pm b \sqrt{(-1)}$; donc $a + b\sqrt{(-1)}$, & $a - b\sqrt{(-1)}$ sont les facteurs cherchés. En effet en les multipliant l'un par l'autre l'on retrouvera la quantité proposée.

172. Nous avons déja dit que $(\text{sin. } a)^2 + (\text{co-sin. } a)^2 = r^2 = 1$; or par le Problême précédent, en supposant sin. $a = a$, & co-sin. $a = b$, l'on aura $[\text{co-sin.} + \text{sin.} \sqrt{(-1)}]\,[\text{co-sin.} - \text{sin.} \sqrt{(-1)}] = r^2$ *, & $[\text{co-sin. } a + \text{sin. } a \sqrt{(-1)}]$

* Co-sin. & sin. désignent le co-sinus & le sinus d'un même

$\times$ [ co-ſin. $a$ — ſin. $a\sqrt{(-1)}$ ] = [ co-ſin. $b$ + ſin. $b\sqrt{(-1)}$ ] · [ co-ſin. $b$ — ſin. $b\sqrt{(-1)}$ ] = $r^2$. Si l'on multiplie co-ſin. $a$ + ſin. $a\cdot\sqrt{(-1)}$ par co-ſin. $b$ + ſin. $b\cdot\sqrt{(-1)}$, le produit ſera co-ſin. $a$ · co-ſin. $b$ — ſin. $a$ · ſin. $b$ + (co-ſin. $a$ · ſin. $b$ + ſin. $a$ · co-ſin. $b$) $\times\sqrt{(-1)}$ ; mais en faiſant $r = 1$, co-ſin. $a\times$ co-ſin. $b$ — ſin. $a$ · ſin. $b$ = co-ſin. $(a+b)$, & co-ſin. $a$ · ſin. $b$ + ſin. $a$ · co-ſin. $b$ = ſin. $(a+b)$ ; donc le produit que nous venons de trouver eſt = co-ſin. $(a+b)$ + ſin. $(a+b)\times\sqrt{(-1)}$. De même [co-ſin. $a$ — ſin. $a\cdot\sqrt{(-1)}$ ] · [ co-ſin. $b$ — ſin. $b\times\sqrt{(-1)}$ ] = co-ſin. $(a+b)$ — $\sqrt{(-1)}$. ſin. $(a+b)$. On trouve par un calcul ſemblable [ co-ſin. $a\pm$ ſin. $a\cdot\sqrt{(-1)}$ ] $\times$ [co-ſin. $b\pm$ ſin. $b\cdot\sqrt{(-1)}$ ] $\times$ [co-ſin. $x\pm$ ſin. $x\sqrt{(-1)}$ ] = co-ſin. $(a+b+x)$. $\pm\sqrt{(-1)}$. ſin. $(a+b+x)$.

173. COROLLAIRE I. Donc ſuppoſant $b = a$ on aura [co-ſin. $a\pm$ ſin. $a\cdot\sqrt{(-1)}$]$^2$ = [co-ſin. $2a\pm$ ſin. $2a\cdot\sqrt{(-1)}$ ], & en ſuppoſant $x = b = a$, on aura [ co-ſin. $a\pm$ ſin. $a\cdot\sqrt{(-1)}$ ]$^3$ = co-ſin. $3a\pm$ ſin. $3a\cdot\sqrt{(-1)}$ : en général [co-ſin. $a\pm$ ſin. $a\times\sqrt{(-1)}$ ]$^n$ = co-ſin. $na\pm$ ſin. $na\cdot\sqrt{(-1)}$.

174. COROLLAIRE II. De la derniere équation on tire, en prenant + pour le ſigne du radical & tranſpoſant, ſin. $na\cdot\sqrt{(-1)}$ = — co-ſin. $na$ + [ co-ſin. $a$ + ſin. $a\cdot\sqrt{(-1)}$ ]$^n$, & prenant le ſigne du radical en —, on a ſin. $na\cdot\sqrt{(-1)}$ = co-ſin. $na$ — [ co-ſin. $a$ — ſin. $a\cdot\sqrt{(-1)}$ ]$^n$. Ajoutant ces deux équations & diviſant par $2\cdot\sqrt{(-1)}$, on trouve l'équation ſin. $na$ =

$$\frac{[\text{co-ſin. } a+\text{ſin. } a\cdot\sqrt{(-1)}]^n-[\text{co-ſin. } a-\text{ſin. } a\cdot\sqrt{(-1)}]^n}{2\cdot\sqrt{(-1)}}.$$

ar: ou d'un même angle $a$, ſans qu'il ſoit néceſſaire de le ſpécifier.

On trouve auſſi en retranchant la ſeconde équation de la premiere, tranſpoſant & diviſant par 2, co-ſin. $na =$

$$\frac{[\text{co-ſin. } a + \text{ſin. } a \cdot \sqrt{(-1)}]^n + [\text{co-ſin. } a - \text{ſin. } a \cdot \sqrt{(-1)}]^n}{2}.$$

175. COROLLAIRE III. Elevant les deux Binomes à la puiſſance $n$ par la formule de *Newton*, on trouve les deux formules ſuivantes ſans imaginaires.

I. $$\text{ſin. } na = \frac{n}{1}(\text{co-ſin. } a)^{n-1} \cdot \text{ſin. } a - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\text{co-ſin. } a)^{n-3}(\text{ſin. } a)^3 + \frac{n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\text{co-ſin. } a)^{n-5} \times (\text{ſin. } a)^5 - \&c.$$

II. $$\text{co-ſin. } na = (\text{co-ſin. } a)^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\text{co-ſin. } a)^{n-2} \times (\text{ſin. } a)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\text{co-ſin. } a)^{n-4} \times (\text{ſin. } a)^4 - \&c.$$

REMARQUE I. La premiere formule eſt compoſée des termes de rang pair, c'eſt-à-dire, du ſecond, quatriéme, ſixiéme, &c. du Binome $[\text{co-ſin. } a + \text{ſin. } a]^n$, & la ſeconde des termes de rang impair du même Binome. Dans les deux formules le premier terme eſt poſitif, les autres étant alternativement négatifs & poſitifs.

176. REMARQUE II. Nous avons ſuppoſé $r = 1$; mais ſi l'on vouloit exprimer le rayon, il faudroit diviſer les deux formules précédentes

par $r^{n-1}$. Voici une autre maniere de trouver ces formules en exprimant le rayon. Les formules

$$\text{co-sin.}\,(a+b) = \frac{\text{co-sin.}\,a \cdot \text{co-sin.}\,b - \text{sin.}\,a \cdot \text{sin.}\,b}{r},$$

$$\text{sin.}\,(a+b) = \frac{\text{sin.}\,a \cdot \text{co-sin.}\,b + \text{sin.}\,b \cdot \text{co-sin.}\,a}{r}$$ peuvent s'exprimer ainsi :

$$\text{co-sin.}\,(a+b) = [(\text{co-sin.}\,a + \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,a) \times (\text{co-sin.}\,b + \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,b) + (\text{co-sin.}\,a - \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,a)(\text{co-sin.}\,b - \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,b)] : {}^{*}\,2r;$$

$$\text{sin.}\,(a+b) = [(\text{co-sin.}\,a + \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,a) \times (\text{co-sin.}\,b + \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,b) - (\text{co-sin.}\,a - \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,a)(\text{co-sin.}\,b - \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,b)] : 2 \cdot r \cdot \sqrt{(-1)}.$$

Multipliant la derniere équation par $\sqrt{(-1)}$ pour l'ajouter à la premiere & l'en retrancher enſuite, on trouvera les équations ſuivantes :

(M) $$\text{co-sin.}\,(a+b) + \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin.}\,(a+b) = \frac{[\text{co-sin.}\,a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin.}\,a] \cdot [\text{co-sin.}\,b + \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin.}\,b]}{r}$$

(P) $$\text{co-sin.}\,(a+b) - \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin.}\,(a+b) = \frac{[\text{co-sin.}\,a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin.}\,a] \cdot [\text{co-sin.}\,b - \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin.}\,b]}{r}$$

S'il s'agit du ſinus ou du co-ſinus de $(a-b)$, il

* Les deux points indiquent la diviſion ; c'eſt-à-dire, que la quantité qui précéde les deux points eſt le dividende, & que celle qui ſuit eſt le diviſeur ; ou, ce qui revient au même, la quantité qui précéde les deux points eſt le numérateur d'une fraction, dont la quantité qui ſuit les deux points eſt le dénominateur.

ſuffira de changer le ſigne de ſin. $b$, parce que $b$ étant un arc quelconque, $-$ ſin. $b$ eſt $=$ ſin. $-b$, & co-ſin. $(-b) =$ co-ſin. $b$. Si on ſuppoſe $q = b$, les équations précédentes ſe changent en celles-ci : co-ſin. $2a + \sqrt{(-1)} \cdot$ ſin. $2a =$ $\frac{[\text{co-ſin. } a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } a]^2}{r}$, co-ſin. $2a - \sqrt{(-1)} \times$ ſin. $2a = \frac{[\text{co-ſin. } a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } a]^2}{r}$. Ajoutant ces deux dernieres équations, retranchant enſuite la ſeconde de la premiere, & diviſant par 2 on a les deux équations ſuivantes : co-ſin. $2a =$ $\frac{[\text{co-ſin. } a + \sqrt{(-1)} \text{ ſin. } a]^2 + [\text{co-ſin. } a - \sqrt{(-1)} \text{ ſin. } a]^2}{2 \cdot r}$,

$\sqrt{(-1)} \cdot$ ſin. $2a =$ $\frac{[\text{co-ſin. } a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } a]^2 - [\text{co-ſin. } a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } a]^2}{2 \cdot r}$.

Si avant d'ajouter & de retrancher ces équations on en prend les racines quarrées, on trouvera les deux équations ſuivantes : co-ſin. $a =$ $\frac{[\text{co-ſin. } 2a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } 2a]^{\frac{1}{2}} + [\text{co-ſin. } 2a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } 2a]^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot r^{\frac{-1}{2}}}$,

$\sqrt{(-1)} \cdot$ ſin. $a =$ $\frac{[\text{co-ſin. } 2a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } 2a]^{\frac{1}{2}} - [\text{co-ſin. } 2a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } 2a]^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot r^{\frac{-1}{2}}}$.

Ajoutant un troiſiéme arc $d$ aux arcs $a$ & $b$, il eſt viſible par les équations M & P, que co-ſin. $(a+b+d) + \sqrt{(-1)}[\text{ſin. } (a+b+d)] =$ $\frac{[\text{co-ſin. } (a+b) + \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } (a+b)] \cdot [\text{co-ſin. } d + \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } d]}{r}$,

$$\text{co-sin.}(a+b+d)-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}(a+b+d)=$$
$$[\text{co-sin.}(a+b)-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}(a+b)]\cdot[\text{co-sin.}\,d-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}\,d]$$

Subſtituant les valeurs de co-ſin. $(a+b)+\sqrt{(-1)}\cdot$ſin. $(a+b)$, & de co-ſin. $(a+b)-\sqrt{(-1)}\cdot$ſin. $(a+b)$ que donnent les équations M & P, on aura $[(\text{co-sin.}\,a+\sqrt{-1}\cdot\text{sin.}\,a)\times(\text{co-sin.}\,b+\sqrt{-1}\cdot\text{sin.}\,b)(\text{co-sin.}\,d+\sqrt{-1}\cdot\text{sin.}\,d)]:r^2=\text{co-sin.}(a+b+d)+\sqrt{-1}\cdot\text{sin.}(a+b+d)$, & $[(\text{co-sin.}\,a-\sqrt{-1}\cdot\text{sin.}\,a)(\text{co-sin.}\,b-\sqrt{-1}\,\text{sin.}\,b)\times(\text{co-sin.}\,d-\sqrt{-1}\cdot\text{sin.}\,d)]:r^2=\text{co-sin.}(a+b+d)-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}(a+b+d)$. Suppoſant $a=b=d$, ajoutant la derniere équation à la premiere, l'en retranchant enſuite, tranſpoſant & diviſant par 2, l'on aura les deux équations ſuivantes :

$$\text{co-sin.}\,3a=\frac{[\text{co-sin.}\,a+\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}\,a]^3+[\text{co-sin.}\,a-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}\,a]^3}{2\cdot r^2}$$

$$\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}\,3a=\frac{[\text{co-sin.}\,a+\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}\,a]^3-[\text{co-sin.}\,a-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}\,a]^3}{2\cdot r^2}$$

Si avant d'ajouter & de retrancher ces équations on prend la racine cubique des deux membres, nous aurons co-ſin. $a=$

$$\frac{[\text{co-sin.}\,3a+\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}\,3a]^{\frac{1}{3}}+[\text{co-sin.}\,3a-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}\,3a]^{\frac{1}{3}}}{2\cdot r^{\frac{-1}{3}}}$$

$$\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}\,a=\frac{[\text{co-sin.}\,3a+\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}\,3a]^{\frac{1}{3}}-[\text{co-sin.}\,3a-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}\,a]^{\frac{1}{3}}}{2\cdot r^{\frac{-1}{3}}}$$

En général l'analogie fait aſſez voir qu'on aura,

ayant attention de diviſer la formule du ſinus par $\sqrt{(-1)}$, les formules ſuivantes : co-ſin. $na =$

$$\frac{[\text{co-ſin. } a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } a]^n + [\text{co-ſin. } a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } a]^n}{2 \cdot r^{n-1}},$$

ſin. $na =$

$$\frac{[\text{co-ſin. } a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } a]^n - [\text{co-ſin. } a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin. } a]^n}{2 \cdot r^{n-1} \sqrt{(-1)}}.$$

De ces formules on déduira aiſément par le Binome de *Newton*, celles dont nous avons parlé ci-deſſus, mais elles ſe trouveront diviſées par $r^{n-1}$ ; de ſorte qu'en ſuppoſant co-ſin. $a = p$, ſin. $a = b$, l'on aura les formules ſuivantes :

$$\text{ſin. } na = \left[\frac{n}{1} p^{n-1} b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{n-3} b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^{n-5} b^5 - \&c.\right] : r^{n-1},$$

$$\& \text{ co-ſin. } na = \left[p^n - \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} p^{n-4} b^4 - \&c.\right] : r^{n-1}.$$

Si l'on ſuppoſe l'arc $a$ infiniment petit, ſon ſinus ſe confondra avec cet arc, & ſon co-ſinus ſera $= r$, & pour que l'arc $n \cdot a$ ſoit d'une grandeur finie, il faudra ſuppoſer $n$ infiniment grand, & alors les produits $n \cdot (n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, &c. ſe réduiront aux puiſſances ſeconde, troiſiéme, &c. de $n$ ſelon le nombre des facteurs de ces produits : car dans cette ſuppoſition $n - 1 = n$, $n - 2 = n$, &c. Faiſant donc l'arc fini $n \cdot a = d$, on aura $\frac{d}{n} = a =$ ſin. $a$, $\frac{d^2}{n^2} =$ (ſin.)$^2$ $a = b^2$ (en

ſuppoſant ſin. $a = b$), $\frac{d^3}{n^3} = b^3$, &c. & co-ſin. $a = 1 = p$; ainſi toutes les puiſſances de $p =$ co-ſin. $a$ ſeront = à l'unité. Subſtituant ces valeurs dans les formules ci-deſſus & ſuppoſant $r = 1$, l'on a les formules ſuivantes :

$$\text{ſin. } na = \text{ſin. } d = d - \frac{d^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{d^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{d^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \&c.$$

$$\text{co-ſin. } na = \text{co-ſin. } d = 1 - \frac{d^2}{1\cdot2} + \frac{d^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{d^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \&c.$$

177. COROLLAIRE. Puiſque $r$ étant $= 1$, on a tang. $a = \frac{\text{ſin. } a}{\text{co-ſin. } a}$, il ſuit des deux formules précédentes qu'on aura tang. $na =$ tang. $d$

$$= \frac{d - \frac{d^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{d^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \&c.}{1 - \frac{d^2}{1\cdot2} + \frac{d^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \&c.}$$

178. REMARQUE. Parce que (133) ſin. $= \frac{tang \times co\text{-}ſin}{r} = \frac{t\cdot co\text{-}ſin}{r}$, en faiſant $tang = t$, on aura co-ſin. $a = p =$ ſin. $\frac{a\cdot r}{t} = \frac{br}{t}$. Subſtituant cette valeur de $p$ dans les formules ci-deſſus (176), faiſant une équation fractionnaire telle que le premier membre ſoit $\frac{\text{ſin. } na}{\text{co-ſin. } na} =$ tang. $na$, & que le

ſecond membre ait pour numérateur la valeur de ſin. $na$, & pour dénominateur celle de co-ſin. $na$, diviſant de plus le numérateur & le dénominateur de cette derniere fraction par $b^n$ & les multipliant par $t^n$, on aura tang. $na =$

$$\left[n \cdot r^{n-1} t - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{n-3} t^3 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} r^{n-5} t^5 - \text{&c.}\right] : \left[r^n - \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} r^{n-2} t^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^{n-4} t^4 - \text{&c.}\right]$$

Cette expreſſion eſt compoſée de la puiſſance $n$ du Binome $r + t$, mais dont le numérateur eſt compoſé des termes de rang pair & multiplié par le rayon, le dénominateur contenant les termes de rang impair : les termes du numérateur & du dénominateur ayant alternativement les ſignes + & —.

REMARQUE I. En faiſant $r = 1$, cette formule deviendroit plus ſimple.

REMARQUE II. De la formule co-ſin. $na = p^n$ — &c., trouvée ci-deſſus (176), on déduit facilement la ſécante de $na$ qu'on peut exprimer ainſi :

$$\text{séc. } na = \frac{r^{n+1}}{p^n - \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2} b^2 + \text{&c.}}$$, parce que

les triangles $cbd$, $can$ (fig. 108), en ſuppoſant l'arc $ab = a$, donnent $cd : cb :: ca : cn$, ou co-ſin. $na : r :: r :$

$$\text{séc. } na = \frac{r^2}{\text{co-sin. } na}.$$

179. PROBLEME. *Trouver le ſinus d'un arc multiple de l'arc* a *indépendamment de la formule ci-deſſus* (176). Faiſant $r = 1$, $b = a$, co-ſin. $b$ = co-ſin. $a = q$, ſi dans la formule ſin. $(a + b)$ = ſin. $a$ co-ſin. $b$ + ſin. $b$ co-ſin. $a$, on

ſuppoſe

ſuppoſe $b$ ſucceſſivement $= a$, $2a$, $3a$, &c. on aura

Sin. $a = \sqrt{(1-q^2)}$ *

Sin. $2a = 2q\sqrt{(1-q^2)}$

Sin. $3a = (4q^2-1)\sqrt{(1-q^2)}$

Sin. $4a = (8q^3-4q)\sqrt{(1-q^2)}$

Sin. $5a = (16q^4-12q^2+1)\sqrt{(1-q^2)}$

Sin. $6a = (32q^5-32q^3+6q)\sqrt{(1-q^2)}$

Sin. $7a = (64q^6-80q^4+24q^2-1)\sqrt{(1-q^2}$.

En général $\text{sin. } na = \left(2^{n-1}q^{n-1} - (n-2)\,2^{n-3}q^{n-3} + \frac{(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2}\,2^{n-5}q^{n-5} - \text{&c.}\right)\sqrt{(1-q^2)}$.

En ſuppoſant $\text{sin. } a = p$, on trouvera

Sin. $a = p$

Sin. $2a = 2p\sqrt{(1-p^2)}$

Sin. $3a = 3p - 4p^3$

Sin. $4a = (4p-8p^3)\sqrt{(1-p^2)}$

Sin. $5a = 5p - 20p^3 + 16p^5$

Sin. $6a = (6p - 32p^3 + 32p^5)\sqrt{(1-p^2)}$

Sin. $7a = 7p - 56p^3 + 112p^5 - 64p^7$

Sin. $8a =$ &c.

Pour trouver chacune des tables précédentes, il n'y a qu'à ſuppoſer le dernier ſinus trouvé $=$ ſin. $b$, tandis que le ſinus & le co-ſinus de $a$ ſeront toujours déſignés par $p$ & $q$, faiſant attention que ſinus de $a = \sqrt{(1-q^2)}$, & co-ſin. $a = \sqrt{(1-p^2)}$, & chercher le ſinus de $a+b$ par la formule $\text{ſin. } (a+b) = \text{ſin. } a \cdot \text{co-ſin. } b + \text{ſin. } b \cdot \text{co-ſin. } a$. On ſuppoſe $r = 1$.

* Car le quarré 1 du rayon étant égal au quarré du ſinus plus le quarré du co-ſinus $q$, on a le quarré du ſinus $= 1-q^2$, & ſinus $= \sqrt{(1-q^2)}$.

180. PROBLEME. *Trouver les co-ſinus des arcs multipliés indépendamment de la formule ci-deſſus* (176). Si dans la formule co-ſin. $(a+b) =$ co-ſin. $a \cdot$ co-ſin. $b -$ ſin. $a \cdot$ ſin. $b$, on fait ſucceſſivement $b = a, 2a, 3a$ &c. on aura

Co-ſin. $a = q$

Co-ſin. $2a = 2q^2 - 1$

Co-ſin. $3a = 4q^3 - 3q$

Co-ſin. $4a = 8q^4 - 8q^2 + 1$

Co-ſin. $5a = 16q^5 - 20q^3 + 5q$.

En général, en exprimant le rayon, on a $r^{n-1}$ co-ſin. $na =$

$$2^{n-1}q^n - \frac{n}{1}r^2.2^{n-3}.q^{n-2} + \frac{n\cdot(n-3)}{1\cdot 2}r^4\cdot 2^{n-5}\cdot q^{n-4} - \text{&c.}$$

On peut auſſi exprimer les co-ſinus des arcs multipliés par la table ſuivante.

Co-ſin. $a = \sqrt{(1-p^2)}$

Co-ſin. $2a = -2p^2 + 1$

Co-ſin. $3a = (-4p^2 + 1)\sqrt{(1-p^2)}$

Co-ſin. $4a = 8p^4 - 8p^2 + 1$

Co-ſin. $5a = (16p^4 - 12p^2 + 1)\sqrt{(1-p^2)}$

Co-ſin. $6a = -32p^6 + 48p^4 - 18p^2 + 1$

Co-ſin. $7a =$ &c.

Pour que les Commençans puiſſent mieux concevoir la formation des tables des Problêmes précédens, nous allons démontrer quelques-unes des équations des deux premieres tables. La premiere ſin. $a = \sqrt{(1-q^2)}$ eſt évidente (note du n° 179). La ſeconde ſe tire facilement de la formule ſin. $(a+b) =$ ſin. $a \cdot$ co-ſin. $b +$ ſin. $b \cdot$ co-ſin. $a =$ $2pq$ (en ſuppoſant $a = b$) $= 2q\sqrt{(1-q^2)}$. La troiſiéme ſe tire de la même formule en faiſant $b = 2a$ ; car alors le ſecond membre de cette formule devient ſin. $a$ co-ſin. $2a$ + ſin. $2a \cdot$ co-ſin. $a = p \cdot$ co-ſin. $2a. + 2p\cdot q^2$ Or co-ſin. $2a = \sqrt{[1 - (\text{ſin. } 2a)^2]} = \sqrt{(1 - 4p^2q^2)} = \sqrt{(1 - 4p^2 + 4p^4)} = 1 - 2p^2$, parce que $q^2 = 1 - p^2$. Subſtituant maintenant la valeur de $q^2$ dans $2pq^2$, on aura

ſin. $3a = 3p - 4p^3$, troiſiéme équation de la ſeconde table. On peut de celle-ci tirer ſa correſpondante dans la premiere table, en ſubſtituant pour $p$ ſa valeur $\sqrt{(1 - q^2)}$ & réduiſant. On peut voir par-là comment il faut s'y prendre pour trouver les autres équations de ces mêmes tables, auſſi bien que les équations des tables du dernier problême.

181. PROBLEME. *Exprimer les puiſſances des ſinus & co-ſinus d'un arc a par les ſinus & co-ſinus de cet arc ou de ſes multiples.* Il eſt viſible que les termes de rang impair de la ſeconde table de l'avant-dernier Problême donnent des puiſſances impaires de $p$, & les termes de rang pair de la ſeconde table du dernier Problême donnent des puiſſances paires de $p$. Maintenant on aura ſin. $a = p$; & de l'équation $-2p^2 + 1 =$ co-ſin. $2a$ *, on tirera $2p^2 = 1 -$ co-ſin. $2a$. Paſſant à la ſeconde table de l'avant dernier Problême, de l'équation ſin. $3a = 3p - 4p^3$, on tire $4p^3 = 3p -$ ſin. $3a$. Revenant à la ſeconde table du dernier Problême, l'équation co-ſin. $4a = 8p^4 - 8p^2 + 1$ donne $8p^4 =$ co-ſin. $4a - 4$ co ſin. $2a + 3$, (en ſubſtituant la valeur de $8p^2$ priſe de la ſeconde équation de la ſeconde table du même Problême, & réduiſant): en ſuivant ce procédé on formera la table ſuivante.

Sin. $a =$ ſin. $a = p$

$2p^2 = 1 -$ co-ſin. $2a$

$4p^3 = 3p -$ ſin. $3a$

$8p^4 = 3 - 4$ co-ſin. $2a +$ co-ſin. $4a$

$16p^5 = 10p - 5$ ſin. $3a +$ ſin. $5a$

$32p^6 = 10 - 15$ co-ſin. $2a + 6$ co-ſin. $4a -$ co-ſin. $6a$

$64p^7 = 35$ ſin. $a - 21$ ſin. $3a + 7$ ſin. $5a -$ ſin. $7a$

$128p^8 =$ &c.

Il eſt viſible que les puiſſances impaires de $p =$ ſin. $a$ ſont exprimées en ſinus d'arcs multipliés, tandis que les puiſſances paires de $p$ ſont exprimées en co-ſinus d'arcs multiples. De plus la loi des coefficiens numeriques eſt la même que celle du binome de Newton, excepté que dans les puiſſances paires

* Voyez la ſeconde équation de la ſeconde table du dernier Problême.

le nombre abſtrait qui forme le premier terme du ſecond membre de l'équation, n'eſt que la moitié de celui de même rang que donne le Binome. *Par exemple*, dans la quatriéme équation, en commençant par le dernier terme, l'on a co-ſin. $4a - 4$ co-ſin. $2a + 3 = 8p^4$, on voit que 3 eſt la moitié de 6, coefficient numérique du troiſiéme terme du binome $a + b$ élevé à la quatriéme puiſſance. Cela poſé il eſt viſible qu'on a beſoin de deux formules, ſelon que l'expoſant de $p$ eſt pair ou impair; ainſi nous aurons $2^{n-1} p^n =$

$2^{n-1}(\text{ſin. } a)^n = \pm \text{ſin. } na \mp n\text{ſin. } (n-2)\cdot a \pm \frac{n\cdot(n-1)}{2} \times$

$\text{ſin. } (n-4)\cdot a \mp \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \text{ſin. } (n-6)\cdot a$

$\ldots\ldots \pm \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2\cdot \&c.}{2\cdot 2\cdot 3\cdot \&c.} \cdot \text{ſin. } a$, $n$ étant un nombre impair. On a renverſé l'ordre des termes de la table par rapport au ſecond membre de l'équation. Mais ſi $n$ étoit un nombre pair, on auroit $2^{n-1} p^n =$

$\pm$ co-ſin. $na \mp n$ co-ſin. $(n-2)\cdot a \pm \frac{n\cdot(n-1)}{2} \times$

co ſin. $(n-4)\cdot a \mp \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot$ co-ſin. $(n-6)\cdot a$

$\ldots \mp \frac{1}{2}\left(\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ \&c.}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \&c.}\right)$ co-ſin. $0\cdot a$ *.

Dans la premiere formule dans laquelle $n$ eſt un nombre impair, les ſignes ſupérieurs auront lieu ſi $n = 4m + 1$, mais il faudra ſe ſervir de ſignes inférieurs ſi $n = 4m - 1$, $m$ étant un nombre entier pair ou impair**. Dans la ſeconde formule dans laquelle $n$ eſt un nombre pair, ou ſe ſervira des ſignes ſupérieurs ſi $n = 4m$, $m$ étant un nombre pair ou impair; mais l'on fera uſage des ſignes inférieurs ſi $n = 2m$, $m$ étant un nombre impair.

* Dans la ſuppoſition de $r = 1$, co-ſin. $0\cdot a =$ co-ſin. $0 = 1$.

** En ſuppoſant $m = 1$, $4m + 1$ ſera $= 5$; or en faiſant $n = 5$, on voit par la table que les ſignes ſupérieurs doivent avoir lieu; qu'on doit ſe ſervir des inférieurs en ſuppoſant $m = 2$, & $n = 4m - 1 = 7$.

182. Pour avoir une formule ſemblable par rapport aux puiſſances des co-ſinus d'un arc, on fera des deux prmieres tables des problêmes ci-deſſus (179) le même uſage que nous venons de faire des deux dernieres, & l'on formera la table ſuivante.

$q = \text{co-ſin. } a$

$2\,q^2 = 1 + \text{co-ſin. } 2a$

$4\,q^3 = 3\,\text{co-ſin. } a + \text{co-ſin. } 3a$

$8\,q^4 = 3 + 4\,\text{co-ſin. } 2a + \text{co-ſin. } 4a$

$16\,q^5 = 10\,\text{co-ſin. } a + 5\,\text{co-ſin. } 3a + \text{co-ſin. } 5a$

$32\,q^6 = 10 + 15\,\text{co-ſin. } 2a + 6\,\text{co-ſin. } 4a + \text{co-ſin. } 6a$

$64\,q^7 = 35\,\text{co-ſin. } a + \&c.$

Renverſant l'ordre des termes qui ſont à la droite du ſigne d'égalité, on formera la formule ſuivante, $n$ étant un nombre pair ou impair, $2^{n-1}(\text{co-ſin. } a)^n = \text{co-ſin. } na + n\,\text{co-ſin. } (n-2)\cdot a + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\,\text{co-ſin. } (n-4)\cdot a + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \times \text{co-ſin. } (n-6)\cdot a \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ \&c.}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ \&c.}\right) \times \text{co-ſin. } 0\cdot a$, ou $+\left(\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ \&c.}{1\cdot 2\ \&c.}\right)\text{co-ſin. } a$, ſelon que $n$ eſt pair ou impair.

Remarque. Il ſeroit facile d'avoir l'expreſſion des tangentes & des co-tangentes de l'arc multiple $n\cdot a$, en ſe ſouvenant que $\text{tang.} = \frac{\text{ſin}}{\text{co-ſin}}$, & $\text{co-tang.} = \frac{\text{co-ſin}}{\text{ſin}}$; car on concluroit facilement que $\text{tang. } na = \frac{\text{ſin. } na}{\text{co-ſin. } na} = \&c.$ De même $\text{co-tang. } na = \frac{\text{co-ſin. } na}{\text{ſin. } na} = \&c.$, ou il faudroit avoir égard à la nature du nombre $n$. Pour avoir la formule des co-ſécantes, on feroit attention que les triangles ſemblables $chm$,

$c\,i\,b$ (fig. 108) donnent $c\,i = b\,d =$ sin : $r$ :: $r$ : co-séc $= \frac{r^2}{sin.} =$ $\frac{1}{sin}$, en faisant $r = 1$ ; donc co-séc. $n\,a = \frac{1}{\text{sin. } n\,a} =$ &c. Et de même on auroit co-tang. $n\,a = \frac{1}{\text{tang. } n\,a}$

$$= \frac{1 - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\,t^2 + \text{&c.}}{n\,t - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,t^3 + \text{&c.}}\ *.$$

183. PROBLEME. *Exprimer en puiſſances des ſinus ou co-ſinus de l'arc ſimple le ſinus ou le co-ſinus de l'arc multiple.* Si $n$ eſt pair, la ſeconde table du Problême ci-deſſus (179) donne, en ſuppoſant $n$ pair, sin. $n\,a = \Big( \mp 2^{n-1} p^{n-1} \pm (n-2)\cdot 2^{n-3} p^{n-3} \mp \frac{(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2}(2)^{n-5} p^{n-5} \ldots + np \Big) \sqrt{(1-p^2)}$. Le ſigne ſupérieur a lieu lorſque $n = 2m$, $m$ étant un nombre pair, mais on ſe ſervira du ſigne inférieur ſi $m$ eſt impair. Si $n$ eſt un nombre impair, on aura

$$\text{sin. } n\,a = \mp 2^{n-1} p^n \pm n\cdot 2^{n-3} p^{n-2} \mp \frac{n\cdot(n-3)}{1\cdot 2} \times (2)^{n-5} p^{n-4} \pm \text{&c.}$$

Le ſigne ſupérieur a lieu ſi $n = 4m - 1$, & l'inférieur ſi $n = 4m + 1$, $m$ étant pair ou impair.

La premiere table du Problême ci-deſſus (180) donne, en ſuppoſant $n$ un nombre impair, $\pm$ co-ſin. $n\,a = nq - \frac{n\cdot(n^2-1)}{2\cdot 3}q^3 + \frac{n\cdot(n^2-1)\cdot(n^2-9)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}q^5 -$ &c. **. Mais

---

* C'eſt le quotient de 1 diviſé par la formule de la tangente (178) en faiſant $r = 1$.

** Si, *par exemple*, $m = 1$, & $n = 3 = 4m - 1$, on aura $-$ co-ſin. $3\,a = 3q - 4q^3$, ou $+$ co-ſin. $3\,a = 4q^3 - 3q$ ; les autres termes de la ſérie étant $= 0$, ce qui eſt facile

si $n$ est un nombre pair, l'on aura $\pm$ co-sin. $na = 1 - \frac{n^2}{1\cdot 2} q^2 + \frac{n^2\cdot(n^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} q^4 - \frac{n^2\cdot(n^2-4)\cdot(n^2-16)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} q^6 +$ &c.

Le signe supérieur a lieu pour le premier membre de l'équation dans cette derniere formule du co-sinus, si $n = 4m$, $m$ étant un nombre pair ou impair tel que 8, *par exemple*. On se servira du signe — si $n = 2m$. $m$ étant impair. Mais dans la premiere formule du co-sinus, on fera usage du signe + si $n = 4m + 1$, & du signe —, si $n = 4m - 1$, $m$ étant un nombre pair ou impair.

184. Corollaire. Si l'on suppose sin. $a = x$, sin. $3a = b$, $n = 3$, l'on aura par la seconde formule du Problême, l'équation $4x^3 - 3x + b = 0$, équation qui est dans le cas irréductible, $b$ étant plus petit que $1 = r$; & les trois racines de cette équation sont sin. $\frac{a}{3}$, sin. $\frac{a+m}{3}$, sin. $\frac{a+2m}{3}$, $m$ désignant la circonférence du cercle; car les sinus de $a$, $a+m$, $a+2m$ sont égaux. Si $b$ avoit le signe —, la troisiéme formule donneroit la même équation avec cette différence que $b$ auroit le signe —, & les racines seroient dans ce cas $\frac{\text{co-sin. } a}{3}$, co-sin. $\frac{m+a}{3}$, co-sin. $\frac{2m+a}{3}$; car co-sin. $a$, co-sin. $(m+a)$, (co-sin. $(2m+a)$ sont des quantités égales, & de plus la somme de ces racines est $= 0$, ce qui n'est pas surprenant, parce que toutes n'ont pas le même signe. Si *par exemple* l'arc $a$ est de 90°, les trois racines seront, en supposant $r = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$ dont la somme $= 0$.

De-là on peut tirer une méthode pour résoudre toute équation du troisiéme degré dans le cas irréductible. Soit l'équation $x^3 - dx \pm q = 0$ qu'on suppose dans le cas irréductible, la comparant avec notre équation $4x^3 - 3x \pm b = 0$, ou (divisant par 4 & exprimant le rayon) $x^3 - \frac{3r^2x}{4} \pm \frac{r^2b}{4} = 0$, nous aurons $\frac{3r^2}{4} = d$, $\frac{br^2}{4} = q$. De la premiere des deux

à comprendre en faisant attention que $n^2 - 9$ est alors $= 0$, ce qui rend le troisiéme terme $= 0$. D'ailleurs l'exposant de $q$ ne peut pas être plus grand que $n$.

dernieres équations on tire $r^2 = \frac{4d}{3}$, ou $r = \sqrt{\left(\frac{4d}{3}\right)}$, de la ſeconde en ſubſtituant la valeur de $r^2$, ou de $1^2$ ſi l'on ne ne veut pas introduire $r$, on tire $b = \frac{3q}{d}$. Faiſant $r$ (rayon de l'équation) ou 1 (ſi $r$ n'eſt pas exprimé) : $b$ ou $\sqrt{\left(\frac{4d}{3}\right)}$ : $\frac{3q}{d}$ :: R (rayon des tables) : $\frac{3Rq}{d\sqrt{\left(\frac{4d}{3}\right)}}$, ce quatriéme terme étant cherché dans les tables donnera le ſinus d'un arc $a$ ſi $b$ eſt poſitif, ou ſon co-ſinus ſi $b$ eſt négatif, & les racines ſeront telles que nous venons de le voir, c'eſt-à-dire, $x = \text{ſin.} \frac{a}{3}$, $x = \text{ſin.} \frac{m+a}{3}$ &c., ou $x = \text{co-ſin.} \frac{a}{3}$, $x =$ &c.

185. PROBLEME. *Couper la circonférence d'un cercle en un nombre* 2 n *de parties égales par des lignes tirées d'un point* m *ſitué ſur le diametre du cercle, mais hors du centre.* Avant de réſoudre ce Problême, qui renferme le célébre Théorême de M. *Cotes*, nous allons établir deux Lemmes.

LEMME I. *Soit l'arc* a b = a (fig. 129), *ſon co ſinus* s p = $\frac{x}{2}$, s m = z, *je dis que* b m = $z^2 - xz + r^2$, *en faiſant* s a = s g = r. Car $(bp)^2 = (sb)^2 - (sp)^2 = r^2 - \frac{x^2}{4}$, & $(bm)^2 = (bp)^2 + (pm)^2$, à cauſe du triangle rectangle $bpm$; or $pm = \frac{x}{2} - z$ ou $pm = z - \frac{x}{2}$, ſelon que le point $m$ tombe de différens côtés de $bp$ par rapport au centre $s$ : mais dans l'un & l'autre cas $(pm)^2 = z^2 - zx + \frac{x^2}{4}$. Cette quantité étant ajoutée à $(bp)^2 = r^2 - \frac{x^2}{4}$ donne $(bm)^2 = z^2 - zx + r^2$.

LEMME II. *Si dans la formule ci-deſſus* (180) $r^{n-1} \times$ co-ſin. $na = z^{n-1} q^n - \frac{n}{1} r^2 z^{n-3} q^{n-2} + \frac{n \cdot (n-3)}{1 \cdot 2}$

$\times r^4\ z^{n-1} \cdot q^{n-4}$ — &c. *on multiplie les deux membres par* 2, *qu'on faſſe* $x = 2q$, *ou* $q = \frac{x}{2}$ & co-ſin. $na = c$, *il eſt évident qu'on aura* $x^n - nr^2 x^{n-2} + \frac{n\cdot(n-3)}{1\cdot 2} r^4 \times x^{n-4} - \frac{n\cdot(n-4)\cdot(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} r^6 x^{n-6}$ &c. $= 2c \cdot r^{n-1}$,

Si on ſuppoſe ſucceſſivement $n = 0, 1, 2, 3$, &c. on aura $2 \cdot$ co-ſin. $(0 \cdot a) = 2r$. On aura encore

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot\text{co-ſin. } 1\cdot a = x \\ 2\cdot\text{co-ſin. } 2\cdot a = x^2 - 2r^2 \\ 2\cdot\text{co-ſin. } 3\cdot a = x^3 - 3r^2 x \\ \text{\&c.} \end{array}\right\} = 2c\cdot r^{n-1},$$

$x$ étant le double co-ſinus de l'arc ſimple. Si dans les équations que nous venons de trouver, on fait $x = z + \frac{r^2}{z}$, on aura pour le double co-ſinus de $0\cdot a$, $1\cdot a$, $2\cdot a$, &c. ces autres valeurs $2r$, $z + \frac{r^2}{z}$, $z^2 + \frac{r^4}{z^2}$, $z^3 + \frac{r^6}{z^3}$, &c. En général $z^n + \frac{r^{2n}}{z^n} = 2c\cdot r^{n-1}$, ou faiſant diſparoître la fraction & tranſpoſant, $z^{2n} - 2cr^{n-1} z^n + r^{2n} = 0$. Mais cette équation a pour racines les doubles co-ſinus de $a$, $a + \frac{2m}{n}$, $a + \frac{4m}{n}$, $a + \frac{6m}{n}$, &c. $m$ déſignant la demi-circonférence du cercle, & $a$ l'arc dont le double co-ſinus $= 2c$. Mais le double co-ſinus de $a$ eſt $= x$ (par ſuppoſition), & déſignant par $x'$, $x''$, $x'''$, &c. les doubles co-ſinus de $a + \frac{2m}{n}$, $a + \frac{4m}{n}$, &c. on aura $z + \frac{r^2}{z} - x$, $z + \frac{r^2}{z} - x'$ &c. pour les facteurs de l'équation trouvée; or ces facteurs doivent être chacun $= 0$, ce qui donne $z + \frac{r^2}{z} - x = 0$,

* L'équation du double co-ſinus de $0\cdot a$, c'eſt-à-dire, $2\cdot$co-ſin. $(0\cdot a) = 2r$ eſt évidente. Les autres peuvent ſe déduire de la formule, ou de la premiere table du n° (180), pourvu qu'on forme cette table en exprimant le rayon $r$.

d'où l'on tire $z^2 - zx + r^2 = 0$ &c. ; donc l'équation précédente eſt compoſée d'un nombre $n$ de trinomes $z^2 - zx + r^2$, $z^2 - zx' + r^2$, $z^2 - zx'' + r^2$, &c.*. Venons maintenant à la ſolution du Problême.

Il ſuit de ce que nous venons de dire, que l'équation $z^{2n} - 2cr^{n-1}z^n + r^{2n} = 0$ eſt le produit de tous les quarrés $(bm)^2$, $(cm)^2$, &c.; donc ſi on ſuppoſe $c = -r$, hypotheſe qui renferme que la demi-circonférence eſt diviſée en un nombre $n$ de parties égales, & par conſéquent la circonférence en un nombre $2n$ des mêmes parties, les $x$, $x'$, $x''$, &c. donneront les doubles co-ſinus des arcs $a$, $3a$, $5a$, &c.; puiſque dans ce cas $\frac{m}{n} = a$. Donc les produits $z^2 - xz + r^2$, $z^2 - x'z + r^2$, &c. dénotent les quarrés des droites paires $cm$, $mf$, &c. Si l'on extrait la racine quarrée de $z^{2n} - 2cr^{n-1}z^n + r^{2n}$ en faiſant $c = r$, on aura $z^n - r^n = mc \times mf$, &c. En effet, dans la ſuppoſition de $c = r$, ſuppoſition qui déſigne que la circonférence entiere eſt diviſée en un nombre $n$ de parties égales, l'arc eſt $= 0$, & ſon co-ſinus eſt évidemment égal au rayon, ou $= +r$, & l'on a la racine que nous venons de trouver : mais dans la ſuppoſition de $c = -r$, c'eſt-à-dire, dans la ſuppoſition de $c$ négatif, on a $z^{2n} + 2r^n z^n + r^{2n} = 0$, dont la racine eſt $z^n + r^n = mb \times md$; &c. c'eſt-à-dire, que cette racine dénote le produit des droites impaires $mb$, $md$, &c. ; donc $(z^n - r^n) \times (z^n + r^n) = z^{2n} - r^{2n} = mb \times mc \times md$, &c. ** équation qui renferme la ſolution du Problême, & le célebre Théorême de M. *Cotes*.

---

* Ainſi cette équation eſt réſoluble en un nombre $n$ de trinomes.

** Cette équation eſt évidemment réſoluble en $2n$ facteurs ; puiſque ſes racines ſont au nombre de $2n$; & parce que l'équation $z^{2n} \mp 2r^n z^n + r^{2n} = 0$, eſt compoſée d'un nombre $n$ de facteurs trinomes, elle eſt réſoluble en un nombre $n$ de ces facteurs. De plus parce que les racines réelles d'une équation donnent chacune un facteur ſimple réel, les racines imaginaires ſe trouvant toujours en nombre pair dans une

186. REMARQUE. La circonférence étant diviſée en un nombre $2n$ de parties égales, chacun des facteurs $z^n - r^n$, $z^n + r^n$, repréſente toutes les droites paires, ou toutes les droites impaires : car il ne peut repréſenter à la fois les unes & les autres, puiſque chacun n'a qu'un nombre $n$ de dimenſions. Mais le facteur $z^n - r^n$, qui répond à la ſuppoſition de $c = +r$, doit évidemment repréſenter la droite qui répond à l'arc $o \cdot a = o$, ou $ma$, & comme il ne peut repréſenter deux droites de ſuite ; il ne peut repréſenter $mb$. Si on ſuppoſe $n = 5$, il eſt viſible que le facteur $z^n + r^n$ doit repréſenter la droite $mg$ qui répond à $c = -r$. Donc il ne peut repréſenter $ma$ ; donc, &c.

## *Trigonométrie Sphérique.*

187. Si un angle ſolide C (fig. 130) eſt formé par trois angles plans ACB, ACD, BCD (que nous appellerons *côtés* de l'angle ſolide) ; ces angles auront pour meſure les arcs AB, AD, BD décrits entre leurs côtés du point C comme centre ; & ſi nous ſuppoſons que ces arcs ſont décrits avec le même rayon, le point C pourra être regardé comme le centre d'une ſphere ; ces arcs ſeront des parties de trois grands cercles de la ſphere : & formeront un triangle BAD qu'on nomme *triangle ſphérique*. La trigonométrie *ſphérique* s'occupe de la réſolution de ces ſortes de triangles comme la trigonométrie *plane*, ou *rectiligne* (c'eſt celle dont nous avons déja parlé ſous le nom de trigonométrie) traite des triangles rectilignes, c'eſt-à-dire, des triangles dont tous les côtés ſont des lignes droites. Pour meſurer un angle ſphérique, tel que l'angle B, *par exemple*, il ſuffit de trouver la meſure de l'angle formé par les deux plans ACB, DCB qui, en ſe joignant dans la ligne BC, forment cet angle ; mais, ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus (n° 83), un tel angle eſt égal à celui que formeroient deux perpendiculaires menées à la ligne BC par un même point B, *par exemple*,

---

équation, & telles que leur produit deux à deux eſt un facteur rationel du ſecond degré, il s'enſuit que toute équation rationelle eſt réſoluble en facteurs réels, ſimples ou doubles, ou en partie ſimples & en partie doubles.

l'une dans le plan DCB, l'autre dans le plan ABC. Mais ces lignes étant perpendiculaires au rayon commun BC des arcs BA & BD seroient évidemment des tangentes de ces arcs ; donc en général un angle sphérique quelconque formé par deux arcs de grands cercles sur la surface d'une sphere est égal à celui que forment entr'elles les tangentes de ces arcs menées au point où ils se rencontrent.

188. *Un triangle sphérique* ABD n'est autre chose qu'une partie d'une surface sphérique terminée par trois arcs de grands cercles de cette sphere AB, AD, BD, qui sont les côtés de ce triangle, dont les angles A, B, D sont les mêmes que ceux que formeroient les tangentes de ces arcs, menées aux points A, B, D.

Les angles plans ACB, ACD, BCD, qui sont les côtés de l'angle solide C, ont pour mesure les arcs AB, AD, BD qui forment le triangle sphérique ABD. Et si l'on exprime les côtés & les angles d'un triangle sphérique par degrés, minutes, secondes, tierces, &c., ces nombres seront les mesures des côtés & des angles de l'angle solide ACBD.

189. On peut facilement concevoir la construction d'un angle solide de trois côtés, & d'un triangle sphérique de la maniere suivante. On prendra pour base un secteur de cercle ACD (fig. 131), & l'on menera par son centre une ligne CE perpendiculaire, ou inclinée au plan du secteur. On décrira ensuite du centre C & dans le plan ACE un arc AE qui terminera le secteur ACE, on décrira de même avec le rayon DC = AC l'arc ED qui terminera le secteur ECD. Le secteur ACD qu'on prend pour base étant supposé plus petit qu'un demi cercle, son supplément à 360 degrés sera plus grand qu'un demi-cercle ; & l'angle qui sera opposé à ce supplément, sera le supplément de l'angle AED. Mais celui-ci vaut moins de deux angles droits, puisque, si l'on conçoit le plan du secteur ACE prolongé, les plans AED, ACE formeront deux angles de suite, qui ne vaudront que deux angles droits ; donc si un angle AED vaut moins de deux angles droits, le côté opposé vaudra moins de 180°, & le côté opposé au supplément de cet angle, c'est-à-dire, le côté opposé à un angle saillant ou extérieur & supplément à 360° de l'angle AED, vaut plus de 180°. Mais dans la trigonométrie sphérique on ne considere pas ces sortes d'angles, ni les côtés qui leur sont opposés ; ainsi dans la suite il ne sera question que des triangles

dont tous les angles & les côtés ſont moindres que 180°. Au reſte ſi un des angles du triangle eſt droit, le triangle ſphérique eſt appellé *rectangle*, le côté oppoſé à l'angle droit prend le nom d'*hypothénuſe*, l'on nomme *baſe* l'un des autres côtés, & le troiſiéme s'appelle *la perpendiculaire*. Si aucun des angles n'eſt droit, le triangle ſphérique ſe nomme *obliquangle*.

Dans la ſuite lorſqu'il ſera queſtion d'un triangle ſphérique rectangle, nous déſignerons ſa baſe par B ou *b*, le côté perpendiculaire par P ou *p*, l'hypothénuſe par H ou *h*, l'angle droit par R ou *r*, l'angle compris entre l'hypothénuſe & la baſe, & oppoſé à la perpendiculaire par M ou *m*, & enfin l'angle oppoſé à la baſe, & formé par la rencontre de l'hypothénuſe & du côté perpendiculaire, par N ou *n*.

190. THÉOREME. *Dans un triangle ſphérique rectangle* NRM (fig. 132), *ſi l'angle* M *eſt plus petit ou plus grand qu'un angle droit, le côté* P *qui lui eſt oppoſé ſera plus petit ou plus grand qu'un quart de cercle; & ſi l'angle* M *eſt droit, le côté* P *ſera un quart de cercle.* Je fais paſſer par la ligne C M dans laquelle le plan de l'hypothénuſe coupe le plan de la baſe, un plan M C D perpendiculaire au plan de la baſe; cela poſé, puiſque le plan P eſt perdendiculaire au même plan B, D C commune interſection des plans P & M C D ſera perpendiculaire à B (voyez le n°. 82). Donc le point D ſera éloigné du plan de la baſe de 90, en comptant cette diſtance ſur un grand cercle de la ſphere dont le point C eſt ſuppoſé le centre; & par conſéquent D R & D *r* ſeront des quarts de cercle. Donc le côté N R ſera plus petit qu'un quart de cercle, ou égal à un quart de cercle, ou plus grand qu'un quart de cercle, ſelon que M ſera plus petit qu'un angle droit, qu'il ſera un angle droit, ou plus grand qu'un angle droit. Car ſi M = 90°, M N tombera ſur D M; puiſque l'angle D M R eſt droit, le point D étant éloigné du plan B de 90 degrés. Si M < 90°, l'arc M N ſera ſitué entre le plan D C M & la baſe; donc le point N ſera éloigné de B de moins de 90°, mais il ſera éloigné de B de plus de 90° ſi M > 90° : parce qu'alors M N ſera ſitué au-delà du plan D C M, c'eſt-à-dire, ſera ſitué entre ce plan & le prolongement de celui de la baſe.

COROLLAIRE. En prenant P pour baſe, B devient le côté perpendiculaire; donc N ſera auſſi de même eſpece que le côté oppoſé, c'eſt-à-dire, que l'angle N ſera aigu, droit ou obtus, ſelon que B ſera < 90°, ou = 90°, ou > 90°; de ſorte

qu'un angle ſitué ſur l'hypothénuſe eſt toujours de la même eſpece que le côté oppoſé, & réciproquement.

191. THÉOREME. *Dans un triangle ſphérique rectangle ſi les côtés* B & P *ſont tous les deux plus petits, ou tous les deux plus grands qu'un quart de cercle, l'hypothénuſe ſera plus petite qu'un quart de cercle; ſi l'un de deux côtés eſt plus grand & l'autre plus petit qu'un quart de cercle, l'hypothénuſe ſera plus grande qu'un quart de cercle. Mais ſi l'un de deux côtés eſt un quart de cercle, l'hypothénuſe ſera auſſi un quart de cercle.* Dans le plan RM*r* (fig. 133) ſur lequel eſt ſituée la baſe, & auquel le plan RA*r* eſt perpendiculaire, menons la ligne MC oblique au diametre R*r* *, à laquelle le plan DAE (qui coupe en AC le plan *r*AR) doit être perpendiculaire; donc la ligne AC, commune ſection des plans ADE, RA*r* perpendiculaires au plan RM*r*, ſera perpendiculaire ſur ce dernier plan & ſur la ligne *r*CR ſituée ſur RM*r*; les angles ACR, AC*r* ſeront droits, & les arcs AR & A*r* ſeront des quarts de cercle. Les angles formés par la ligne MC & toutes celles qu'on peut mener par le point C dans le plan DAE, ſeront droits (82). Donc MCG ſera droit, *g*CM, auſſi-bien que NCM, ſera $< 90°$; mais MC*n* ſera $> 90°$. D'où il ſuit que dans un triangle rectangle ſphérique NRM, dont les côtés B, P ſont plus petits qu'un quart de cercle, l'hypothénuſe NM eſt plus petite que le quart de cercle GM. De même dans le triangle M*r*N, dont les côtés N*r*, M*r*, c'eſt-à-dire, B & P ſont plus grands qu'un quart de cercle, l'hypothénuſe MN eſt plus petite qu'un quart de cercle. Mais dans le triangle ſphérique MR*n* dans lequel *n*R ou P eſt plus grand qu'un quart de cercle, tandis que MR ou B eſt plus petit qu'un quart de cercle, l'hypothénuſe M*n* ſera plus grande que le quart de cercle M*g*. De même dans le triangle ſphérique *r*M*n*, dans lequel *n r* ou P eſt plus petit qu'un quart de cercle, & *r*M ou B plus grand qu'un quart de cercle, l'hypothénuſe eſt plus grande qu'un quart de cercle. Mais ſi P devient AR, alors l'hypothénuſe meſurant l'angle droit ACM, devient un quart de cercle.

COROLLAIRE. De-là il ſuit réciproquement que l'hypothénuſe d'un triangle ſphérique étant aigue, c'eſt-à-dire, moindre qu'un quart de cercle, les deux côtés P & B ſeront tous les

* Il faut concevoir que la ligne R*r*, dont une partie eſt ponctuée, paſſe par le centre C de la ſphère.

deux plus grands ou plus petits qu'un quart de cercle, ſi l'hypothénuſe eſt obtuſe ou plus grande qu'un quart de cercle, l'un des côtés ſera plus grand & l'autre plus petit qu'un quart de cercle; mais ſi l'hypothénuſe eſt un quart de cercle, l'un des côtés au moins ſera un quart de cercle; car il eſt viſible que B & P peuvent être à la fois des quarts de cercle.

192. REMARQUE. Si l'hypothénuſe eſt moindre qu'un quart de cercle, le triangle ſera ou NMR dont les côtés P & B ſont moindres qu'un quart de cercle, & dont les angles M & N ſont aigus, ou N M $r$ auquel le premier triangle N M R eſt contigu. Si l'hypothénuſe eſt plus grande qu'un quart de cercle, le triangle ſera ou $n$ M R ou $n$ M $r$; mais $n$ M $r$ a pour triangle contigu un triangle ſitué de l'autre côté du plan R A $r$, dont l'hypothénuſe eſt le ſupplément de l'hypothénuſe M $n$, & par conſéquent plus petite qu'un quart de cercle, & dont la baſe eſt ſupplément de la baſe M $r$ & = MR, & par conſéquent auſſi plus petite qu'un quart de cercle. Mais $r$ $n$ ou le côté perpendiculaire eſt auſſi plus petit qu'un quart de cercle; donc tous les côtés de ce triangle ſeront plus petit chacun qu'un quart de cercle, & par conſéquent les angles ſitués ſur l'hypothénuſe ſeront aigus *. Il y aura auſſi ſur la baſe CMR un triangle contigu au triangle $n$ M R, dont l'hypothénuſe (ſituée au-deſſous de la baſe) ſera le ſupplément de $n$ M, & dont le côté perpendiculaire (ſitué auſſi au-deſſous de la même baſe) ſera ſupplément de $n$ R. On voit donc qu'un triangle ſphérique rectangle, dont l'un des côtés eſt plus grand qu'un quart de cercle, a un triangle contigu, dont les côtés ſont moindres qu'un quart de cercle, dont la baſe & les angles ſur l'hypothénuſe ſont aigus; or les côtés & l'hypothénuſe de ce triangle que nous appellons *contigu*, ſont toujours égaux aux côtés & à l'hypothénuſe de l'autre où ſont leurs ſupplémens.

193. PROBLEME. *Dans un triangle ſphérique-rectangle, dont les côtés ſoient moindres qu'un quart de cercle, & dont par conſéquent les angles ſur l'hypothénuſe ſoient aigus, étant don-*

* L'eſpece de l'hypothénuſe détermine l'eſpece du triangle. Or l'hypothénuſe eſt plus petite ou plus grande qu'un quart de cercle, ou elle eſt égale à un quart de cercle. Mais parce qu'on peut regarder l'angle droit comme le plus grand des angles aigus, ou comme le plus petit des angles obtus, on ne diſtingue que deux eſpeces de triangles ſphériques-rectangles, l'une, dont l'hypothénuſe eſt plus grande qu'un quart de cercle, l'autre, dont l'hypothénuſe eſt moindre qu'un quart de cercle.

*nés, ou les deux angles aigus ou les deux côtés, ou un angle aigu & un côté*, ou l'hypothénuſe avec un angle aigu ou avec un côté, *réſoudre ce triangle.* Ayant pris, au lieu du triangle ſphérique, un angle ſolide de trois côtés NCMR (fig. 134), tel que RM ſoit perpendiculaire ſur MC, & que les plans MNR, NRC ſoient perpendiculaires ſur la baſe RCM; NR commune interſection de ces derniers plans ſera perpendiculaire à la même baſe RCM, auſſi-bien qu'aux lignes RC, RM ſituées ſur cette baſe & paſſant par le point R. Mais la ligne MC ſituée ſur le plan RMC perpendiculaire au plan NMR & perpendiculaire à la commune interſection RM de ces plans, eſt évidemment perpendiculaire au plan NRM auſſi bien qu'à la ligne MN. Donc les triangles NRC, RCM, NCM& NRM ſeront tous rectangles, & l'angle M de l'angle ſolide ſera le même que l'angle M de l'angle plan NMR (83). Suppoſons maintenant qu'on développe ces triangles ſur un plan (fig. 135), & qu'on emploie les mêmes lettres dont on s'eſt ſervi dans l'angle ſolide trilatere; il eſt viſible que les triangles RCM, NCM rectangles en M donnent CM:MN::*r*:tang. H*, & CM:MR::*r*:tang. B. Donc CM:*r*::MN:tang. H & CM:*r*::MR:tang. B, & partant MN:MR::tang. H:tang. B.

Le triangle NRM donne MN:MR::*r*:co-ſin. M. De cette analogie & de la précédente on peut en tirer cette autre.

I. *r*:co-ſin. M::tang. H:tang. B, ou *r*:co-ſin. M::co-tang. B:co-tang. H; parce que (134) les tangentes ſont en raiſon inverſe des co-tangentes.

Mais il eſt viſible qu'on peut changer les dénominations M, N en mettant l'une à la place de l'autre, ſi l'on appelle B ce qu'on vient d'appeller P, & réciproquement; donc on aura *r*:co-ſin. N::co-tang. P:co-tang. H.

Mais ſi l'on prend NC (qui ſe trouve deux fois dans la figure) pour rayon, le triangle MCN donnera NC:*r*::MN:ſin. H, tandis que le triangle NCR donne NC:*r*::NR:ſin. P. Donc MN:NR::ſin. H:ſin. P. D'un autre côté le triangle NRM fait voir que NM:NR::*r*:ſin. M; donc

II. *r*:ſin. M::ſin. H:ſin. P, & en changeant entr'elles les dénominations M & N, B & P, *r*:ſin. N::ſin. H:ſin. B.

* H déſigne l'angle MCN ou l'arc qui meſure cet angle, ou l'hypothénuſe du triangle ſphérique correſpondant, B déſigne la baſe du même triangle ſphérique, ou l'arc qui meſure l'angle RMC, & P la perpendiculaire ou le côté perpendiculaire du même triangle ſphérique.

Maintenant

Maintenant ſi l'on prend RC pour rayon, le triangle RCM donnera RC : $r$ :: RM : ſin. B ; mais par le triangle NRC *, RC : $r$ :: NR : tang. P. Donc RM : NR :: ſin. B : tang. P. D'un autre côté le triangle NRM donne RM : RN :: $r$ : tang. M ; c'eſt pourquoi l'on a cette troiſiéme analogie :

III. $r$ : tang. M :: ſin. B : tang. P, ou $r$ : ſin. B :: tang. M : tang. P, ou $r$ : ſin. B :: co-tang. P : co-tang. M ; & en changeant les dénominations, $r$ : ſin. P :: co-tang. B : co-tang. N.

Par la ſeconde analogie, on a les deux proportions ſuivantes, $r$ : ſin. H :: ſin. M : ſin. P, & $r$ : ſin. H :: ſin. N : ſin. B. Donc ſin. B : ſin. N :: ſin. P : ſin. M ; de cette analogie & de la troiſiéme $r$ : ſin. B :: co-tang. P : co-tang. M, on tire aiſément, en multipliant par ordre, $r$ : ſin. N :: ſin. P × co-tang. P : ſin. M · co tang. M. Et parce que (132) $r$ : ſin :: co-tang : co-ſin, ou $r$ · co ſin = ſin. co-tang ; ſi au lieu de ſin. P. co-tang. P, & de ſin. M. co-tang. M, on écrit reſpectivement $r$. co-ſin. P, $r$. co-ſin. M, l'on aura la quatriéme analogie ſuivante.

IV. $r$ : ſin. N :: co-ſin. P : co-ſin. M, & en changeant les dénominations, $r$ : ſin. M :: co-ſin. B : co-ſin. N. Mais par la troiſiéme analogie, co-tang. M : co-tang. P :: ſin. B : $r$, & par l'analogie II, ſin. M : ſin. P :: $r$ : ſin. H ; donc, en multipliant par ordre, ſin. M · co-tang. M : ſin. P · co-tang. P :: ſin. B : ſin. H. Si à la place de ſin. M × co-tang. M & de ſin. P · co-tang. P, on écrit reſpectivement $r$ · co-ſin. $m$, $r$ · co-ſin. P, il viendra co-ſin. M : co-ſin. P :: ſin. B : ſin. H. Mais l'analogie I donne $r$ : co-ſin. M :: co-tang. B : co-tang. H ; donc, en multipliant encore par ordre, on trouvera $r$ : co-ſin. P :: ſin. B · co-tang. B : ſin. H × co-tang. H, & par une ſubſtitution ſemblable à celle dont nous venons de faire uſage,

V. $r$ : co-ſin. P :: co-ſin. B : coſin. H. Mais l'analogie I donne $r$ : co-ſin. M :: co-tang. B : cotang. H, proportion que j'appellerai (*a*). Par l'analogie II, on a la proportion ſuivante ſin. M : ſin. P :: $r$ · ſin. H, proportion que je déſignerai par (*b*). L'analogie III donne $r$ : ſin. B :: co-tang. P : co-tang. M, ou ſin. B : $r$ :: co-tang. M : co-tang. P, & en changeant les dénominations, ſin. P : $r$ :: co-tang. N : co-tang. B. Multipliant par ordre les termes de cette derniere proportion par

* C'eſt celui dans lequel ſe trouve la lettre P.

ceux des proportions $a$ & $b$, il vient sin. M : co sin. M :: $r$ × co-tang. N : sin. H × co-tang. H. Mais sin. co-tang $= r \times$ co-sin, ou co-sin. M $= \frac{\text{sin. M. co-tang. M}}{r}$, & sin. H × co tang. H $= r \cdot$ co-sin. H; donc en substituant ces valeurs, on aura

VI. $r$ : co-tang. M :: co-tang. N : co-sin. H.

194. Les six analogies que nous venons de trouver, & quatre autres dont nous avons besoin, & que nous avons déduites par le changement des dénominations, sont les suivantes

I. $r$ : co sin. M :: co-tang. B : co-tang. H,
ou co-sin. M : $r$ :: co-tang. H : co-tang. B
II. $r$ : sin. H :: sin. M : sin. P
III. $r$ : sin. B :: co-tang. P : co-tang. M
IV. $r$ : sin. N :: co-sin. P : co-sin. M
V. $r$ : co sin. B :: co-sin. P : co sin. H
VI. $r$ : co-tang. M :: co-tang. N : co-sin. H

VII. $r$ : co-sin. N :: co-tang. P : co-tang. H
VIII. $r$ : sin H :: sin. N : sin. B
IX. $r$ : sin. P :: co-tang. B : co-tang. N
X. $r$ : sin. M :: co-sin. B : co-sin. N

195. Etant donné dans un triangle rectangle, dont les côtés sont plus petits qu'un quart de cercle & les angles sur l'hypothénuse aigus, outre l'angle droit deux autres choses quelconques, c'est-à-dire, ou les côtés ou les angles aigus, ou un angle avec l'hypothénuse, ou un angle & un côté, ou l'hypothénuse & un côté, on trouvera facilement les autres par les analogies précédentes, qu'on peut regarder comme autant de Théorêmes. Supposons, *par exemple*, que dans le triangle rectangle N M R (fig. 133) on connoisse l'angle M, la base B ou le côté adjacent, & qu'on demande l'hypothénuse, la premiere analogie nous dit que le rayon est au co-sinus de l'angle M, comme la co tangente du côté qui lui est adjacent est à la co-tangente de l'hypothénuse. Je cherche donc dans les tables le co-sinus de l'angle M, & la co-tangente du côté B ou de l'arc M R, dont le nombre des degrés est connu par supposition; ainsi je connoîtrai les trois premiers termes de la I analogie, & par conséquent je trouverai facilement le quatriéme. Si l'on veut employer les logarithmes, on ajou-

tera les logarithmes des moyens, on retranchéra le logarithme du rayon, & l'on aura le logarithme de la co-tangente de l'hypothénuſe. Ce logarithme étant cherché dans les tables dans la colonne des co-tangentes, fera connoître l'hypothénuſe.

196. Si quelque côté du triangle ſphérique étoit plus grand qu'un quart de cercle, au lieu de ce triangle on réſoudroit le contigu, dont les côtés & les angles ſur l'hypothénuſe valent moins de 90 degrés (192). Or connoiſſant les côtés & les angles de ce triangle contigu, il ſera très-facile de connoître les angles & les côtés du triangle propoſé. Mais, parce que le ſinus d'un angle obtus eſt le même que celui d'un angle aigu qui eſt ſon ſupplément; ſi ce qu'on cherche eſt exprimé par un ſinus, il faudra tâcher de connoître (par le n° 190) ſi l'angle ou le côté cherché eſt plus petit ou plus grand que 90°. S'il s'agit d'un angle obtus, ſon co-ſinus doit avoir le ſigne — auſſi-bien que ſa tangente & ſa co-tangente; mais il il ne peut y avoir de cas douteux que lorſque M & P ſont donnés, ou bien N & B. Suppoſons les plans de deux demi-cercles M N *m*, M R *m* (fig. 135.B) inclinés l'un à l'autre, & qui ſe coupent dans la ligne M *m*; ſi par le centre C de ces demi-cercles on fait paſſer le plan N C R perpendiculaire au demi-cercle M R *m*, l'on aura deux triangles ſphériques-rectangles M N R, N *m* R, qui auront chacun un angle droit en R les angles M & *m* égaux, & le côté N R = P commun. Donc étant donnés M & P, on ne peut pas déterminer B ou H, c'eſt-à-dire, on ne peut pas ſavoir ſi ce qu'on cherche vaut plus ou moins de 90°. Mais les cas douteux n'ont guere lieu dans la pratique de l'aſtronomie, où l'on n'emploie dans le calcul des triangles rectangles que des arcs moindres que 90°, parce que quand on a des arcs plus grands, on prend leurs ſupplémens en les ſuppoſant prolongés juſqu'à la demi-circonférence. Comme ſi (dans la fig. 135.B) on avoit à calculer le triangle rectangle *m* N R, on calculeroit le triangle M N R par le moyen duquel ayant trouvé M N, *par exemple*, de 60°, on concluroit que N *m*, ſupplément de M N, eſt de 120°.

197. THÉOREME. *Si dans un triangle ſphérique obliquangle* M T *m* (fig. 136 & 137) *on abaiſſe du point* T *le côté ou l'arc* T R *perpendiculaire au côté oppoſé* M m, *ce côté tombera dans l'angle* T = M T *m*, *ſi* M & m *ſont tous les deux aigus ou tous les deux obtus*; *mais* T R *tombera hors de l'angle* T, *ſi l'un des deux angles* M, m *eſt aigu & l'autre obtus*. Conſidérons les trian-

gles rectangles T M R & T *m* R qui ont le côté T R = P commun, ſi M eſt ſuppoſé aigu, & *m* obtus (fig. 136), le côté P devroit être de même eſpece que M (190); & comme il doit auſſi être de même eſpece que l'angle *m* qui lui eſt oppoſé dans le triangle T *m* R, il ſeroit à la fois plus petit & plus grand qu'un quart de cercle, ce qui étant impoſſible, on doit conclure que M & *m* ſont de même eſpece lorſque P tombe dans l'angle T. Si P (fig. 137) tombe hors de l'angle T, & qu'on ſuppoſe M aigu auſſi-bien que T *m* M, T *m* R ſera obtus, & P devroit alors être à la fois plus petit & plus grand qu'un quart de cercle; car P doit être de même eſpece que M dans le triangle RTM, & de même eſpece que T *m* R dans le triangle T *m* R. De-là il ſuit que M & T *m* R ſont de même eſpece; donc ſi M eſt aigu, T *m* M, ſupplément de T *m* R, ſera obtus, & réciproquement. Donc P tombera hors de l'angle T, ſi M & *m* ſont de différente eſpece; mais il tombera dans l'angle T, ſi M & *m* ſont de même eſpece.

198 SCHOLIE. Lorſque P tombe dans l'angle T (fig. 136), le triangle obliquangle M T *m* réſulte de l'addition des triangles rectangles M T R, *m* T R; au contraire dans le cas de la fig. 137 ce triangle eſt la différence des deux triangles rectangles dont on vient de parler. Si dans le triangle rectangle T R M (fig. 136 & 137) nous déſignons les côtés, l'hypothénuſe & les angles comme ci-deſſus par H, B, P, M, N, & que dans l'autre triangle T *m* R qui a le côté T R, nous déſignions les mêmes quantités par *h*, *b*, P, *m*, *n* (on met P & non pas *p*, parce que T R eſt le même pour les deux triangles); dans le premier cas dans lequel M & *m* ſont tous les deux aigus, ou tous les deux obtus, T ſera = N + *n* (fig. 138), & M *m* = B + *b*. Mais ſi M & *m* ſont de différente eſpece (fig. 139) l'on aura T = N − *n*, & M *m* = B − *b*. Donc on aura toujours T = N ± *n*, & M *m* = B ± *b*; les ſignes ſupérieurs ont lieu ſi M & *m* ſont de même eſpece, mais on employera les ſignes inférieurs ſi M & *m* ſont d'eſpece différente. Il eſt aiſé de voir que N déſigne l'angle formé par les arcs H & P.

199. PROBLEME. *Trouver des analogies par le moyen deſquelles étant données dans un triangle ſphérique obliquangle, trois de ces ſix choſes, trois angles & trois côtés, on puiſſe trouver les autres.* Ayant mené le côté T R (fig. 138 & 139) perpendiculairement ſur le côté oppoſé, prolongé s'il le faut

on appliquera à chacun des triangles rectangles rectangles M T R, *m* T R les analogies trouvées ci-deſſus. Par l'analogie II l'on aura R : ſin. H :: ſin. M : ſin. P *, & R : ſin. *h* :: ſin. *m* : ſin. P. Donc 1° R · ſin. P = ſin. H · ſin. M = ſin. *h* · ſin. *m*; donc 2°.

I. ſin. H : ſin. *h* :: ſin. *m* : ſin. M.

Par l'analogie III l'on a R : ſin. B :: co-tang. P : co-tang. M, & R : ſin. *b* :: co-tang. P : co-tang. *m*; donc 1° R : co-tang. P :: ſin. B : co-tang. M :: ſin. *b* : co-tang. *m*; donc 2°.

II. ſin. B : ſin. *b* :: co-tang. M : co-tang. *m*.

Par l'analogie IV l'on a R : ſin. N :: co-ſin. P : co-ſin. M, & R : ſin. *n* :: co-ſin. P : co-ſin. *m*; donc R : co ſin. P :: ſin. N : co-ſin. M :: ſin. *n* : co-ſin. *m*, & par conſéquent

III. ſin. N : ſin. *n* :: co-ſin. M : co-ſin. *m*.

Donc *componendo*, (ſin. N + ſin. *n*) : (co-ſin. M + co-ſin. *m*) :: ſin. N : ſin. *n*, & *dividendo* (ſin. N — ſin. *n*) : (co-ſin. M — co-ſin. *m*) : ſin. N : ſin. *n*; & partant (ſin. N + ſin. *n*) : (co-ſin. M + co-ſin. *m*) :: (ſin. N — ſin. *n*) : (co-ſin. M — co-ſin. *m*), ou (ſin. N + ſin. *n*) : (ſin. N — ſin. *n*) :: (co-ſin. M + co-ſin. *m*) : (co-ſin. M — co-ſin. *m*). Mais (ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus n°. 138) l'on a les proportions (ſin. N + ſin. *n*) : (ſin. N — ſin. *n*) :: tang. $\left(\frac{N+n}{2}\right)$ :: tang. $\left(\frac{N-n}{2}\right)$, (co-ſin. M + co-ſin. *m*) : (co-ſin. M — co-ſin. *m*) :: co-tang. $\left(\frac{M+m}{2}\right)$ : tang. $\left(\frac{M-m}{2}\right)$, ou en déſignant les complémens de M & de *m* par *c* M & *c m*, (co ſin. M + co ſin. *m*) : (co-ſin. M — co-ſin. *m*) :: tang. $(\frac{1}{2} c\,M + \frac{1}{2} c\,m)$ : tang. $(\frac{1}{2} c\,M - \frac{1}{2} c\,m)$. L'on a donc l'analogie ſuivante

IV. tang. $(\frac{1}{2} N + \frac{1}{2} n)$ : tang. $(\frac{1}{2} N - \frac{1}{2} n)$ :: tang. $(\frac{1}{2} c\,M + \frac{1}{2} c\,m)$ : tang. $(\frac{1}{2} c\,M - \frac{1}{2} c\,m)$. Mais parce que *a*, *b*, *f*, *g*, étant des angles ou des arcs, on a tang. *b* : tang. *a* :: co-tang. *a* : co-tang. *b*, & tang. *f* : tang. *g* :: co-tang. *g* : co-tang. *f*, on aura, en ſubſtituant les co-tangentes aux tangentes dans la proportion précédente, co-tang. $(\frac{1}{2} N - \frac{1}{2} n)$ : co-tang. $(\frac{1}{2} N + \frac{1}{2} n)$ :: co-tang. $(\frac{1}{2} c\,M - \frac{1}{2} c\,m)$ : co-tang. $(\frac{1}{2} c\,M + \frac{1}{2} c\,m)$, ou co-tang. $(\frac{1}{2} c\,M + \frac{1}{2} c\,m)$ : co-tang. $(\frac{1}{2} c\,M - \frac{1}{2} c\,m)$ :: co-tang. $(\frac{1}{2} N + \frac{1}{2} n)$ : co-tang $(\frac{1}{2} N - \frac{1}{2} n)$. Il eſt bon de retenir cette formule,

* Nous déſignons ici le ſinus total ou le rayon par R, au lieu que nous l'avons déſigné par *r* dans l'analogie I I.

dont nous ferons uſage dans la premiere table ſuivante. Si l'on connoît $N + n$, on connoîtra par les tables, co-tang. $(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}n)$, & le quatriéme terme de la proportion, dont je ſuppoſe les trois premiers connus, fera trouver la demi-différence des angles N & $n$. Ajoutant cette demi-différence à leur demi-ſomme, l'on aura le plus grand angle que je ſuppoſe être N; retranchant la même demi-différence de la demi-ſomme, l'on aura le plus petit angle que je ſuppoſe $= n$. Si l'on connoiſſoit $N - n$, avec $m$ & M, le troiſiéme terme de la proportion ſeroit le terme cherché. L'ayant trouvé, on auroit facilement N & $n$.

D'un autre côté l'analogie V donne R : co-ſin. P :: co-ſin. B : co-ſin. H, & R : co-ſin. P :: co-ſin. $b$ : co-ſin. $h$, & de là l'on tire aiſément

V. co-ſin. B : co ſin. $b$ :: co-ſin. H : co-ſin. $h$.

Puiſque co-ſin. B : co-ſin. $b$ :: co-ſin. H : co-ſin. $h$, l'on aura (co-ſin. B + coſin. $b$) : (co-ſin. B — co-ſin. $b$) :: (co-ſin H + co-ſin. $h$) : (co-ſin. H — co-ſin. $h$). Mais (co-ſin. B + co-ſin. $b$) : (co-ſin. B — co-ſin. $b$) :: tang. $(\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb)$ : tang $(\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb)$, & (co-ſin. H + co-ſin. $h$) : (co-ſin. H — co-ſin. $h$) :: tang. $(\frac{1}{2}cH + \frac{1}{2}ch)$ : tang. $(\frac{1}{2}cH - \frac{1}{2}ch)$; ainſi l'on a l'analogie ſuivante.

VI. tang. $(\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb)$ : tang. $(\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb)$ :: tang. $(\frac{1}{2}cH + \frac{1}{2}ch)$ : tang. $(\frac{1}{2}cH - \frac{1}{2}ch)$, ou co-tang. $(\frac{1}{2}cH + \frac{1}{2}ch)$ : co-tang. $(\frac{1}{2}cH - \frac{1}{2}ch)$ :: co-tang. $(\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb)$ : co-tang. $(\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb)$.

Enfin, de l'analogie VII, on tire R : co-ſin. N :: co-tang. P : co-tang. H, ou R : co-tang. P : co-ſin. N : co-tang. H, & R : co-tang. P :: co-ſin. $n$ : co-tang. $h$; donc

VII co-ſin. N : co-ſin. $n$ :: co-tang. H : co-tang. $h$.

200. Ces ſept analogies contiennent la ſolution du Problême propoſé. Suppoſons que ce que l'on cherche, angle ou côté, eſt déſigné par Q, ce qui eſt oppoſé à la choſe cherchée côté ou angle par T, les choſes adjacentes de part & d'autre de ce que l'on cherche, de maniere que ce que l'on cherche angle ou côté ſoit compris entr'elles par K & $k$, & les choſes entre leſquelles eſt compris ce qui eſt oppoſé à ce l'on cherche par P & $p$, en mettant les lettres majuſcules d'un côté, & les petites lettres de l'autre; de maniere que P & K ſoient contigus l'un à l'autre, auſſi bien que $p$ & $k$, on aura cinq lettres K, P, $k$, $p$, T, dont trois marqueront dans chaque cas les trois choſes données,

Q étant toujours ce que l'on cherche. Les lettres K, *k* & P, *p* peuvent être miſes les unes pour les autres, ſans repréſenter des cas réellement différens, *par exemple*, le cas K *k* P n'eſt pas réellement différent du cas repréſenté par K *k p*, parce qu'il importe peu de quel côté on écrive les lettres K, *k* & P, *p*, pourvu que l'on conſerve le reſte de l'ordre. Par la même raiſon la combinaiſon K *p* T eſt cenſée la même que *k* P T. Cela poſé il eſt facile de voir que tous les cas poſſibles ſe réduiſent aux ſix ſuivans I. K *k* P ou *k* K *p*, II. K *k* T ou *k* K T, III. K P *p* ou K *p* P, IV. K P T ou *kp* T, V. K *p* T ou *k* P T, VI. P *p* T ou *p* P T. Mais parce que la choſe cherchée Q peut être un angle ou un côté, il y a en tout douze queſtions à réſoudre.

Si on cherche un côté, & que T (choſe oppoſée à ce qu'on cherche) ſoit connu, ſuppoſez que Q eſt *h* (dans les fig. 138 & 139), & que T eſt M. Mais ſi vous cherchez un angle, ſuppoſez que Q eſt M, & que T eſt *h*. Mais ſi T n'eſt pas donné, & qu'on cherche un côté, ſuppoſez que ce côté eſt repréſenté par B $\mp b$, & que l'angle cherché eſt = N $\mp n$. Ayant enſuite marqué (dans les figures 138 & 139) les autres choſes qui ſont cenſées données, j'ai joint ici deux tables, par le moyen deſquelles on peut répondre aux douze queſtions dont on a beſoin dans la réſolution des triangles ſphériques oblique-angles. Si l'on cherche un côté, on fera uſage de la premiere table, & de la ſeconde lorſqu'on cherchera un angle. Au reſte dans ces tables nous avons déſigné le ſinus par ſin; le coſinus par coſ, la cotangente par cot; ainſi cot. M exprime la cotangente de l'angle M, coſ. H le coſinus de l'arc H, &c.

## On cherche un Côté.

| Cas. | Choſes données. | on demande | Premiere Analogie. | Seconde Analogie. |
|---|---|---|---|---|
| K p T<br>k P T | m, H, M. | h | *sin.* m : *sin.* M :: *sin.* H : *sin.* h. | |
| P p T<br>p P T | H, B ∓ b, M. | h | *cos.* M : r :: *cot.* H : *cot.* B. | *cos.* B : *cos.* b :: *cos.* H : *cos.* h |
| K P T<br>k p T | N ∓ n, H, M. | h | *cot.* M : r :: *cos.* H : *cot.* N. | *cos.* N : *cos.* n :: *cot.* H : *cot.* h. |
| K k T<br>k K T | N ∓ n, m, M. | h | *cot.* $(\frac{1}{2}cM+\frac{1}{2}cM)$ : *cot.* $(\frac{1}{2}cM-\frac{1}{2}cM)$ :: *cot.* $(\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}n)$ : *cot.* $(\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}n)$ | r : *cot.* m :: *cot.* n :: *cos.* h. |
| K P p<br>k p P | H, h, M. | B ∓ b | *cos.* M : r :: *cot.* H : *cot.* B. | *cos.* H : *cos.* h :: *cos.* B : *cos.* b. |
| K k P<br>k K p | H, m, M. | B ∓ b | *cos.* M : r :: *cot.* H : *cot.* B. | *cot.* M : *cot.* :: *sin.* B : *sin.* b. |

## On cherche un Angle.

| Cas. | choſes données. | on demande | Premiere Analogie. | Seconde analogie. |
|---|---|---|---|---|
| K p T<br>k P T | M, h, H. | m | *sin.* h : *sin.* H :: *sin.* M : *sin.* m | |
| P p T<br>p P T | M, N ∓ n, H. | m | *cot.* M : r :: *cos.* H : *cot.* N | *sin.* N : *sin.* n :: *cos.* M : *cos.* m. |
| K p T<br>k p T | B ∓ b, M, H. | m | *cos.* M : r :: *cot.* H : *cot.* B. | *sin.* B : *sin.* b :: *cot.* M : *cot.* m. |
| K k T<br>k K T | B ∓ b, h, H | m | *cot.* $(\frac{1}{2}c\mathrm{H}+\frac{1}{2}ch) : cot.(\frac{1}{2}c\mathrm{H}-\frac{1}{2}ch)$ :: *cot.* $(\frac{1}{2}c\mathrm{B}+\frac{1}{2}cb) : cot.(\frac{1}{2}c\mathrm{B}-\frac{1}{2}cb)$ | *cot.* b : *cot.* h :: r : *cos.* m. |
| K k P<br>k K P | H, h, M | N ∓ n | *cot.* M : r :: *cos.* H : *cot.* N. | *cot.* H : *cot.* h :: *cos.* N : *cos.* n |
| K P p<br>k p P | H, m, M | N ∓ n | *cot.* M : r :: *cos.* H : *cot.* N | *cos.* M : *cos.* m :: *sin.* N : *sin.* n |

201. L'uſage de ces tables eſt facile à comprendre. Suppoſons que dans un triangle M N $m$ on connoiſſe les angles $m$, M, le côté oppoſé à l'angle $m$ & qu'on demande le côté $h$ oppoſé à l'angle M, la premiere analogie de la premiere table vous dit que le ſinus de l'angle $m$ eſt à celui de l'angle M, comme le ſinus de l'arc H oppoſé à l'angle $m$ eſt au ſinus de l'arc ou du côté $h$ cherché. Mais ce même ſinus pouvant appartenir à un arc plus petit qu'un quart de cercle ou à ſon ſupplément, on ne peut s'aſſurer par cette regle ſi $h$ eſt plus grand ou moindre qu'un quart de cercle. Ici K repréſente l'angle T $m$ M, l'angle $m$ T M étant repréſenté par $k$, cet angle dans la fig. 139 eſt une des choſes entre leſquelles eſt compris le côté ou l'arc $h$ cherché. Mais M eſt compris entre le côté H & le côté B; ainſi $p$ ou P eſt ici repréſenté par H. A l'égard de T ou de la choſe oppoſée à ce qu'on cherche, il eſt viſible que c'eſt l'angle M oppoſé au côté cherché $h$.

Suppoſons maintenant qu'étant donné le côté H, la baſe M $m$ = B $\mp$ $b$ (ſelon que le côté NR tombe en dehors ou en dedans de l'angle M T $m$, ou ſelon que les angles M & $m$ ſont tous les deux de différente ou de même eſpece (197)) l'angle M, & qu'on cherche $h$ c'eſt-à-dire, le côté oppoſé à l'angle M. Or l'angle M eſt compris entre H & M $m$; ainſi H & B $\mp$ $b$ repréſentent ici P & $p$. L'analogie co-ſin M : $r$ :: co-tang. H : co-tang. B ſera évidemment trouver la valeur de B; B étant connu, $b$ le ſera auſſi, puiſqu'on connoît B $\mp$ $b$ (par ſuppoſition). C'eſt pourquoi par la ſeconde analogie (qui eſt à la droite de celle dont nous venons de parler) co-ſin. B : co-ſin. $b$ :: co-ſin. H : co-ſin. $h$, on trouvera la valeur de $h$.

Au reſte on peut ſe diſpenſer de faire attention à la premiere colonne de chaque table; ſuppoſons, *par exemple*, qu'étant donné le côté H adjacent à l'angle M avec les deux angles M & $m$ qui comprennent le côté M $m$ auquel eſt oppoſé l'angle N $\mp$ $n$ cherché. Les données H, $m$, M ſe trouvent au bas de la ſeconde colonne de la ſeconde table, & à côté dans la troiſiéme colonne je trouve N $\mp$ $n$. L'analogie cot. M : $r$ :: cof. H : cot. N me fait trouver N. L'analogie (qui eſt à côté) cof. M : cof. $m$ :: ſin. N : ſin. $n$ me fera connoître $n$, pourvu que je ſache ſi $n$ eſt un angle aigu ou obtus. Donc je trouverai facilement N $\mp$ $n$, le ſigne ſupé-

rieur aura lieu ſi M & *m* ſont d'eſpece différente, & le ſigne inférieur, ſi M & *m* ſont de même eſpece.

202. Cependant on ne peut pas toujours s'aſſurer par le moyen des regles précédentes ſi le côté ou l'angle cherché eſt plus grand ou moindre que 90°. Car ſuppoſons que le plan du demi-cercle A N B (fig. 40) eſt oblique à celui du demi-cercle A D B & que du centre C de la ſphere avec le rayon C N, on décrive l'arc N R perpendiculaire au plan du demi-cercle A D B, qu'on décrive de même, en prenant R D = R E, les arcs N D, N E, il eſt viſible que les triangles ſphériques rectangles N R D, N R E ayant les côtés qui comprennent l'angle droit égaux, ſont égaux *. Donc les angles N D R, N E R ſont égaux entr'eux auſſi-bien que leurs ſupplémens N D A, N E B. C'eſt pourquoi l'on peut former deux triangles ſphériques obliquangles différens N D A, N E B dans leſquels les angles A & B ſoient égaux entr'eux auſſi-bien que les côtés N D, N E qui leur ſont oppoſés, & les angles N D A & N E B. De-là il ſuit 1°. qu'étant donnés deux angles A, A D N, & le côté N D adjacent à l'un de ces angles, le triangle n'eſt pas déterminé; puiſque deux triangles différens peuvent avoir ces trois choſes égales. 2° Deux côtés donnés N A, N D & l'angle A non compris entre ces côtés ne déterminent pas non plus un triangle ſphérique NAD; puiſque le triangle N A E a ces trois mêmes choſes égales.

De-là il ſuit que toutes les fois que par le moyen de deux angles & d'un côté qui n'eſt pas compris entre ces angles, on cherche un côté ou un angle, on ne peut s'aſſurer ſi ce que l'on a trouvé vaut plus ou moins de 90°. De ſorte qu'étant donnés M, *m*, & H, il y a de l'ambiguité, à moins qu'on ne ſache d'ailleurs ſi le côté ou l'angle cherché eſt aigu ou obtus. Il y aura auſſi la même ambiguité, lorſqu'on cherchera un angle ou un côté par le moyen des trois données H, *h*, M, c'eſt-à-dire, par le moyen de deux côtés & d'un angle qui ne ſera pas compris entre ces côtés. Ainſi dans le premier cas de la ſeconde table on ne ſait pas ſi l'angle

* Si dans deux triangles rectangles, dont les côtés qui comprennent l'angle droit ſont ſuppoſés égaux, on conçoit les côtés qui comprennent l'angle droit de l'un appliqués ſur ceux qui comprennent l'angle droit de l'autre, il eſt viſible que ces côtés ſe confondront auſſi-bien que les deux hypothénuſes, & que ces triangles ne formeront qu'un ſeul & même triangle; de ſorte qu'ils ſont égaux en tout.

cherché *m* eſt aigu ou obtus ; parce que le même ſinus peut appartenir à deux angles différens, ſupplémens l'un de l'autre.

Dans le cinquiéme cas de la même table l'ambiguité conſiſte en ce qu'on n'a pas plus de raiſon pour prendre la ſomme, que la différence des angles N & *n*. Dans le cinquiéme cas de la premiere table on ne ſait pas non plus ſi l'on doit prendre la ſomme ou la différence de B & de *b*.

Dans les cas différens de ceux dont on vient de parler, il ne ſauroit y avoir aucun doute.

FIN DU TOME PREMIER.

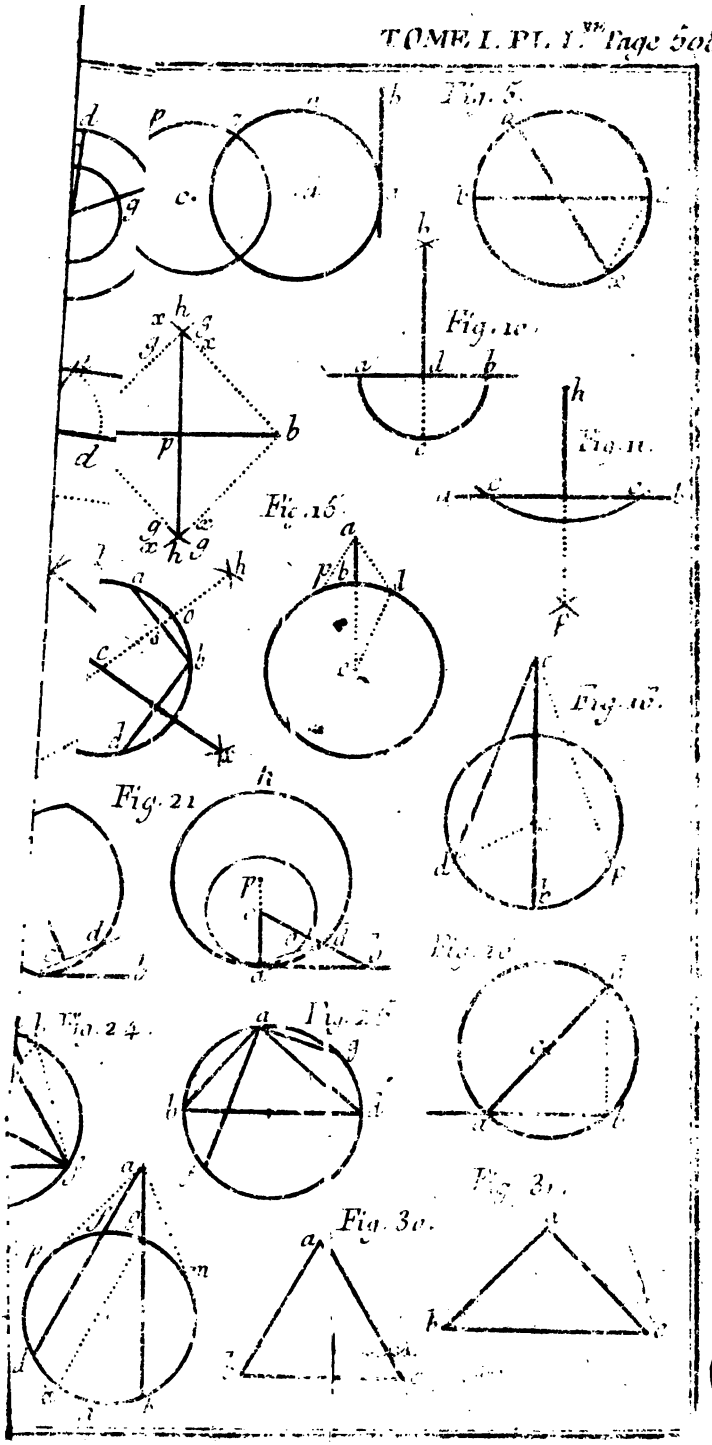


Fig. 5.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 15.
Fig. 17.
Fig. 21
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 30.
Fig. 31.

Fig. 34.

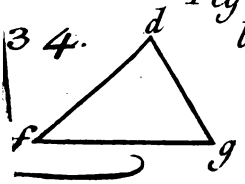



Fig. 35

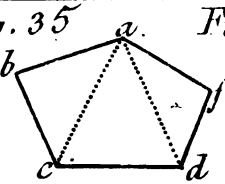



Fig. 36.

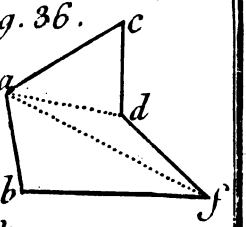



Fig. 39.

Fig. 40.

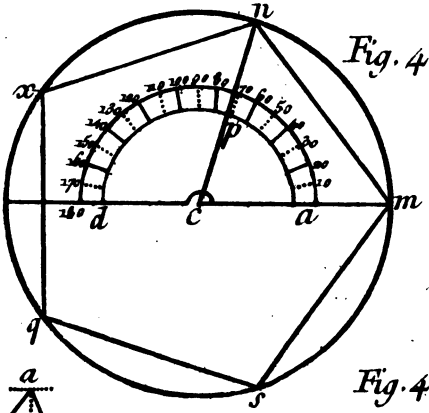


Fig. 43.

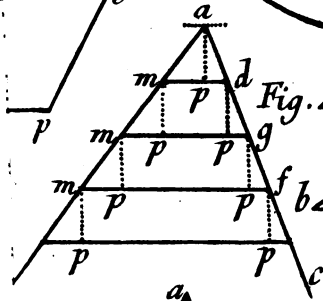



Fig. 44.

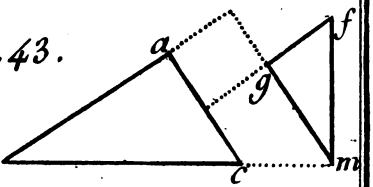



Fig. 50.

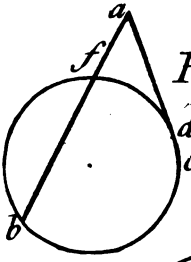



Fig. 51.

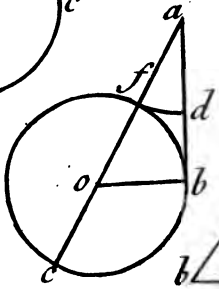



Fig. 52.

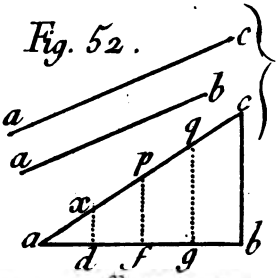



Fig. 53.

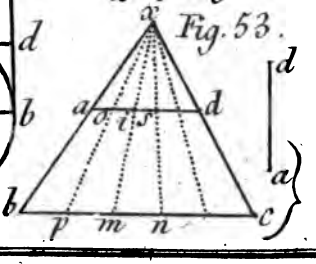


Fig. 56.

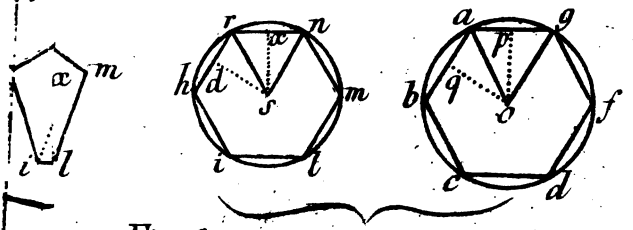



Fig. 60.

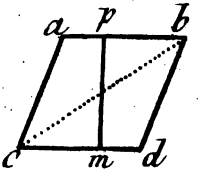



Fig. 61.

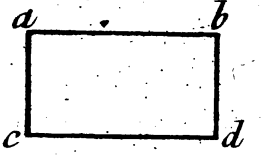



Fig. 64.

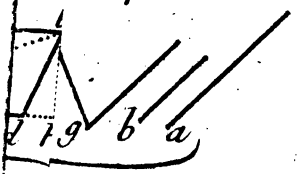



Fig. 65.

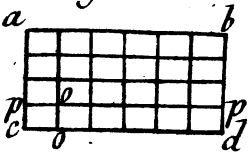



Fig. 68.

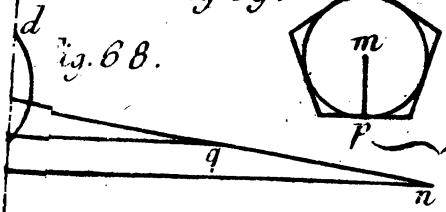



Fig. 69.

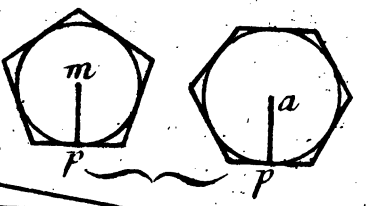



Fig. 74.

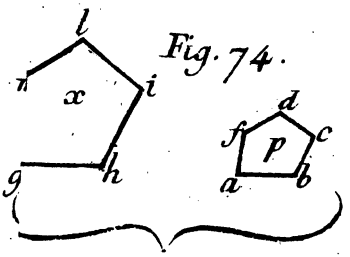



Fig. 75.

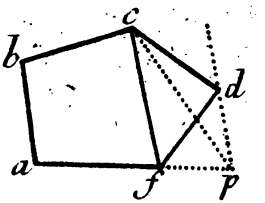


Fig. 79.

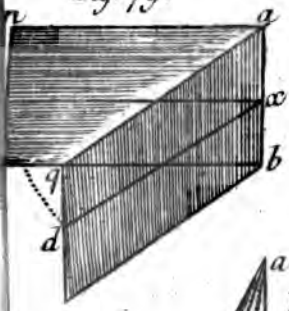



Fig. 80.

Fig. 81.

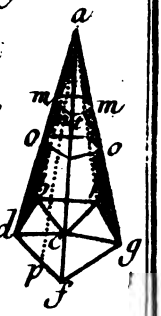
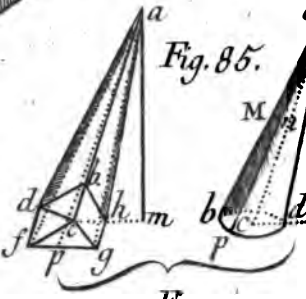


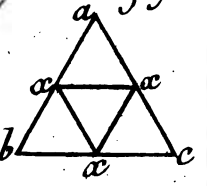

Fig. 85.




4.

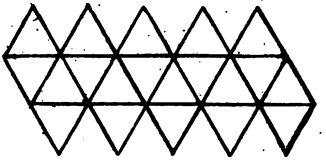
Fig. 91.

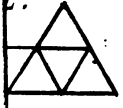
Fig. 92.




g. 90.

Fig. 96.





g.

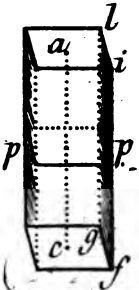


Fig. 100.

8.

b

Picquet Sculp.

T

103.

Fig. 104

Fig. 105.

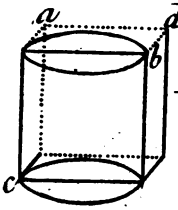



Fig. 110.

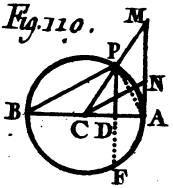



Fig. 109.

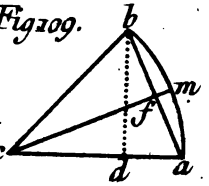



Fig. m.

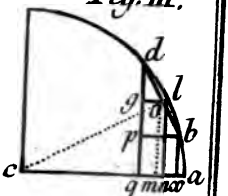



Fig. 116.

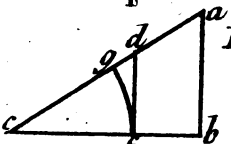



Fig. 114.

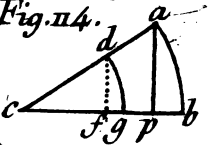



Fig. 116.

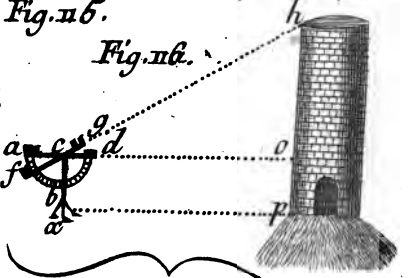
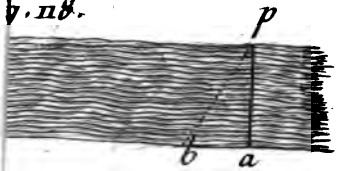



Fig. 119.

Fig. 118.



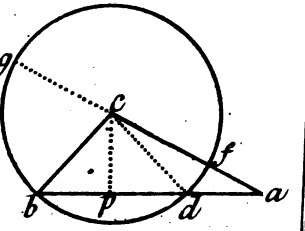




Fig. 123

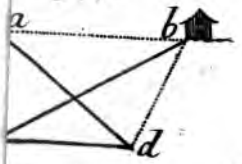
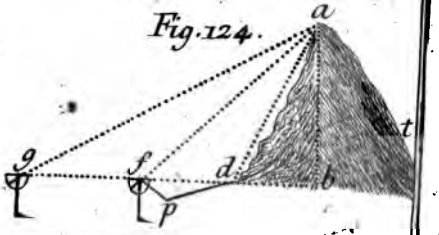



Fig. 124.




Picquet Sculp.

Fig. 127.

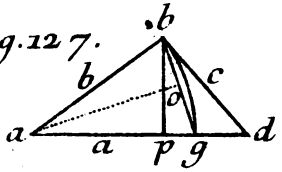



Fig. 128.

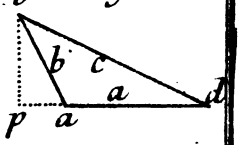



Fig. 132.

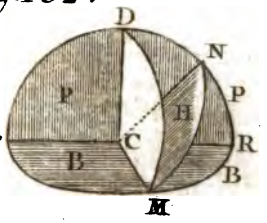



Fig. 131.

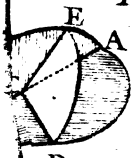



Fig. 133.

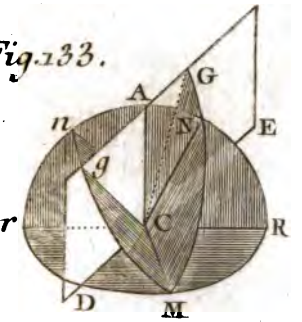



Fig. 135. B

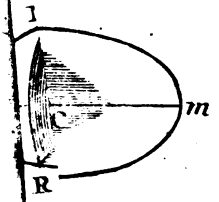



Fig. 136.

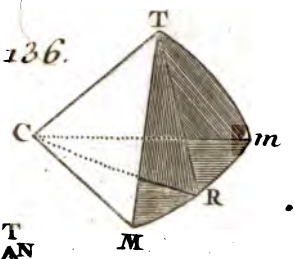


Fig. 140.

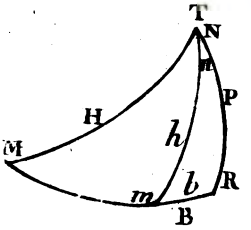



Fig. 139.

UNIV. OF MICH.

Picquet Sculp.

# TABLE
## DES MATIERES
### Contenues dans le Tome premier.


| | |
|---|---|
| CALCUL. | Page 1 |
| *De l'Arithmétique.* | 3 |
| *De l'Addition.* | 4 |
| *De la Souſtraction.* | 7 |
| *De la Multiplication.* | 10 |
| *De la Diviſion.* | 15 |
| *Des Fractions.* | 21 |
| *Des Fractions Décimales.* | 29 |
| *De l'Evaluation des Fractions.* | 34 |
| *De la multiplication & diviſion des Nombres complexes.* | ibid. |
| *De l'Algebre.* | 39 |
| *Des Fractions algébriques.* | 53 |
| *Des Raiſons & Proportions.* | 94 |
| *Des Progreſſions géométriques.* | 109 |
| *Des Proportions & Progreſſions arithmétiques.* | 117 |
| *Des Logarithmes.* | 121 |
| *Des Equations.* | 132 |
| *Des Problêmes indéterminés, ſémidéterminés, & plus que déterminés.* | 159 |
| *Des Equations à deux termes.* | 203 |
| *Des Equations de tous les degrés.* | 209 |
| *De la réſolution des Equations par le moyen des diviſeurs d'un ordre quelconque.* | 242 |
| *Des Equations des Degrés ſupérieurs.* | 283 |